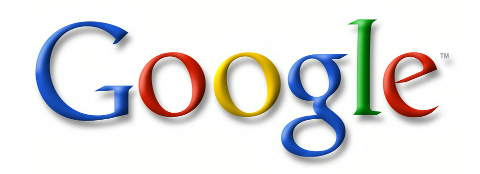
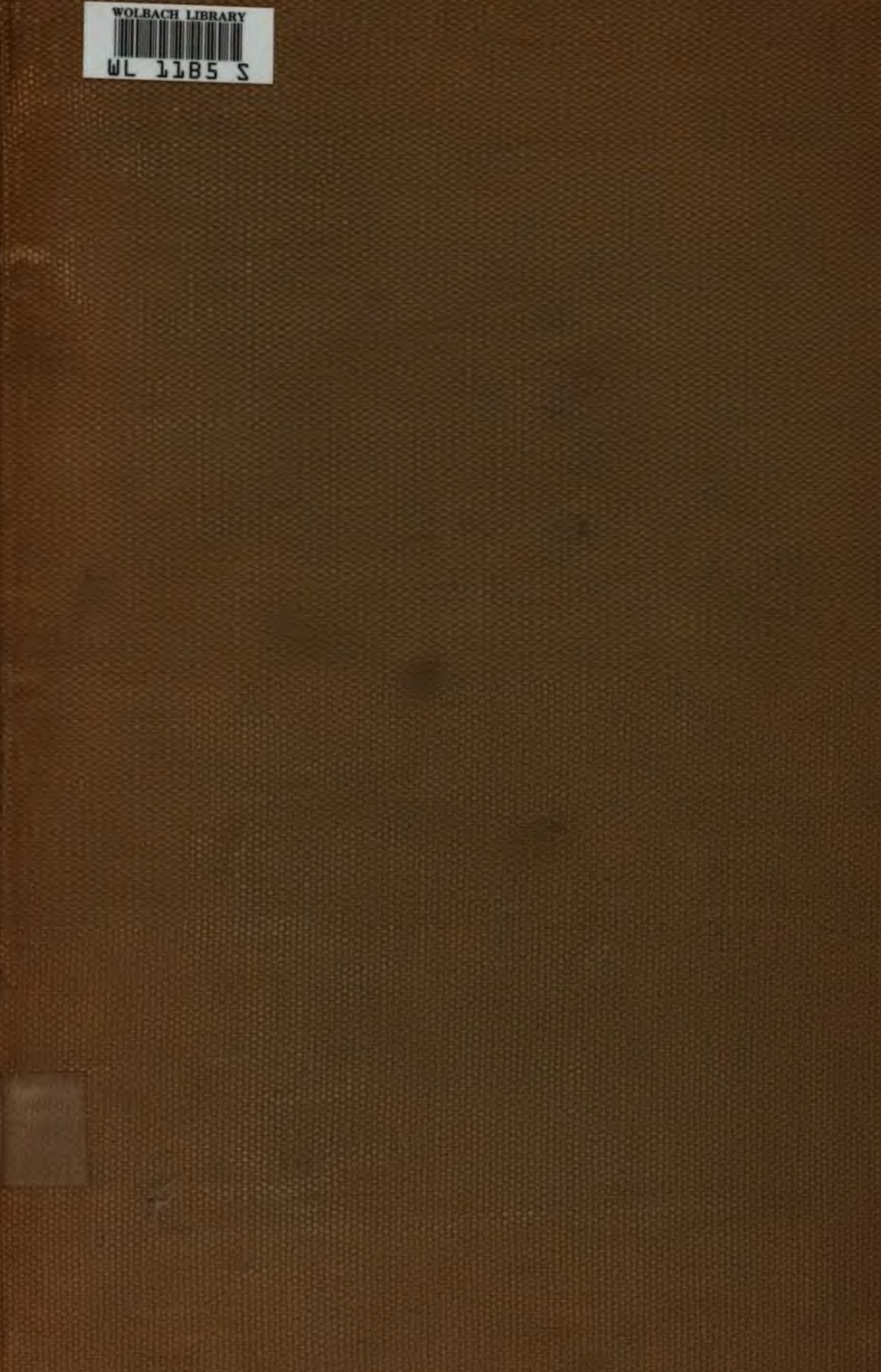
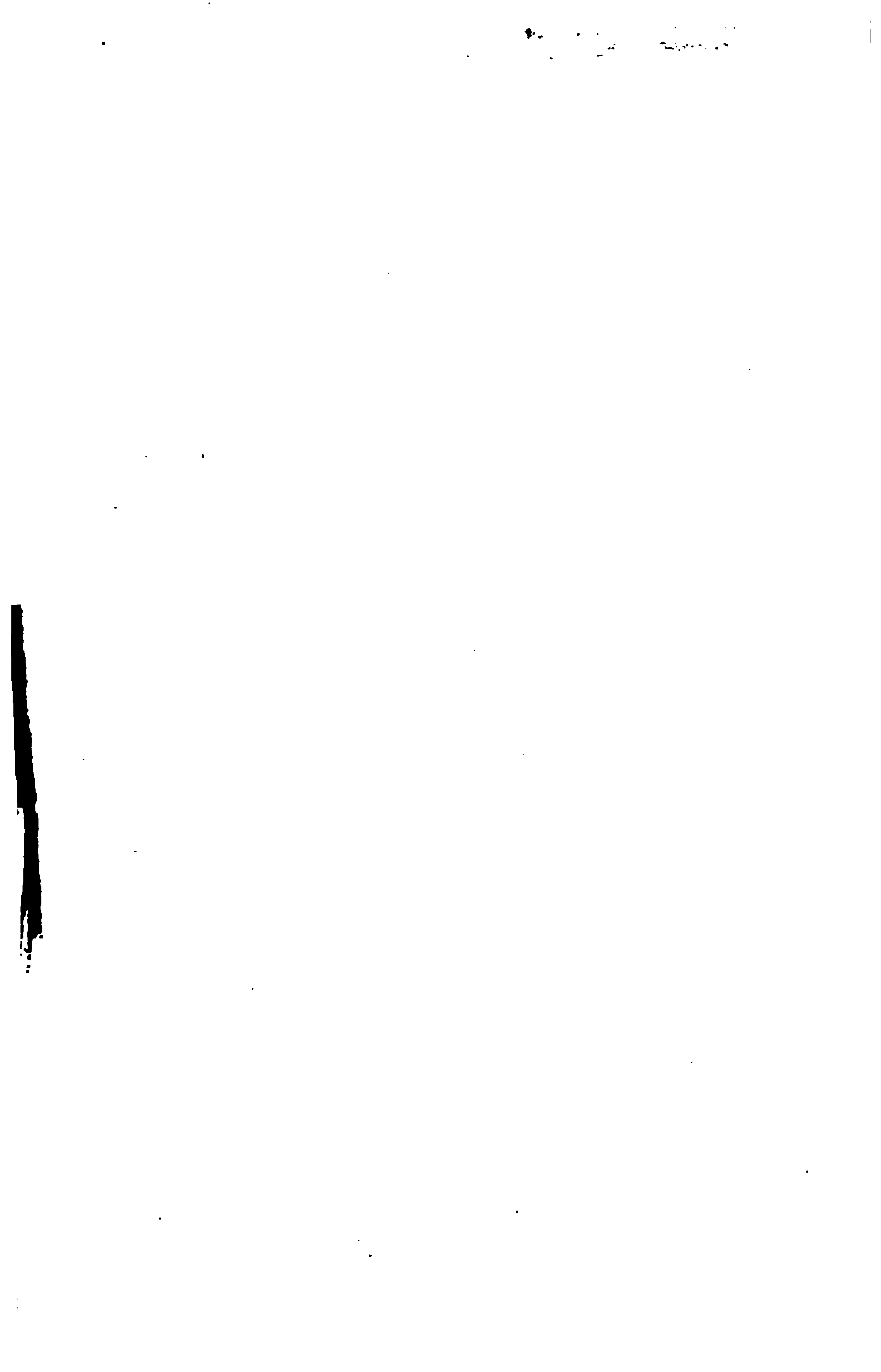
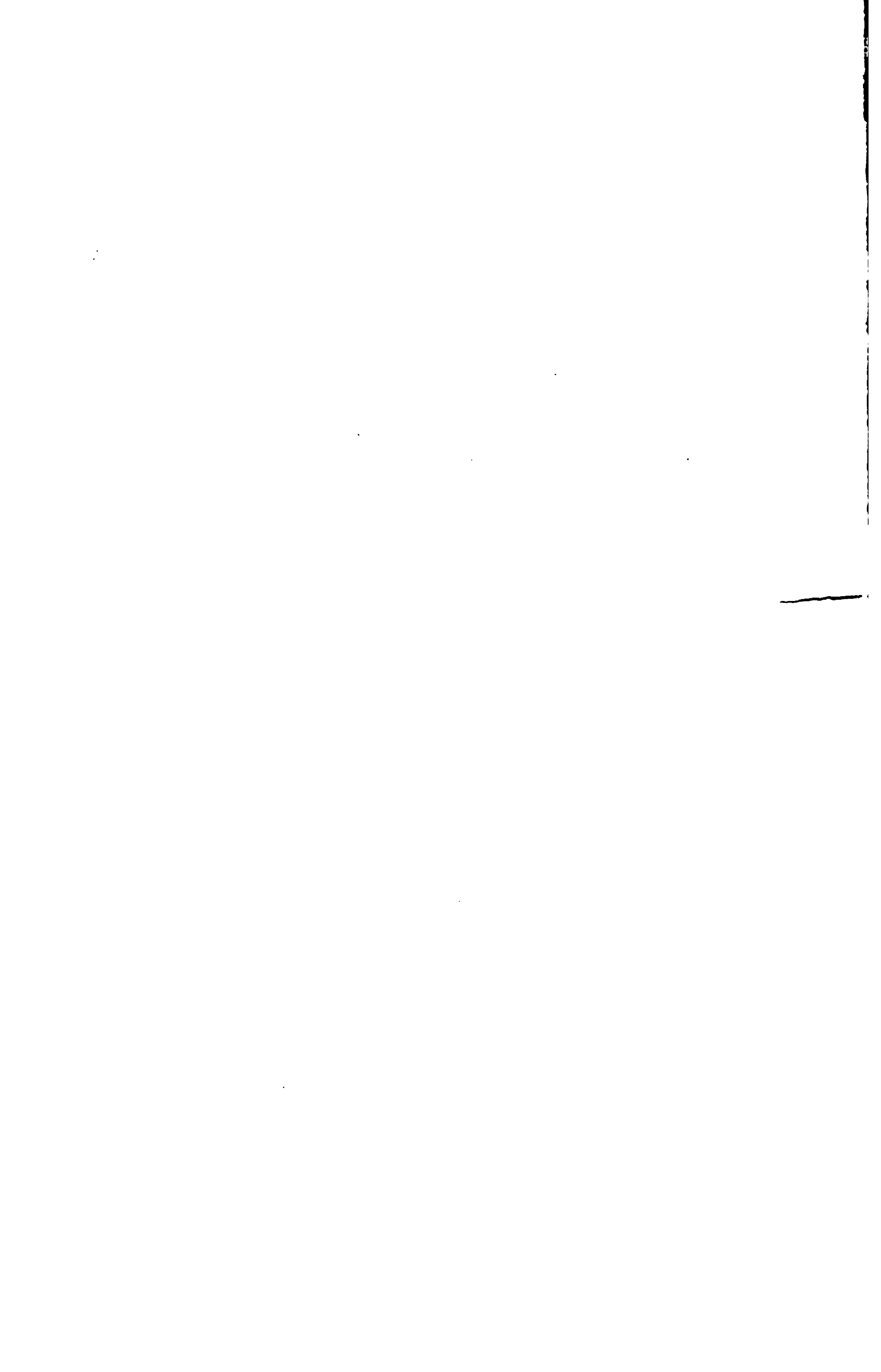
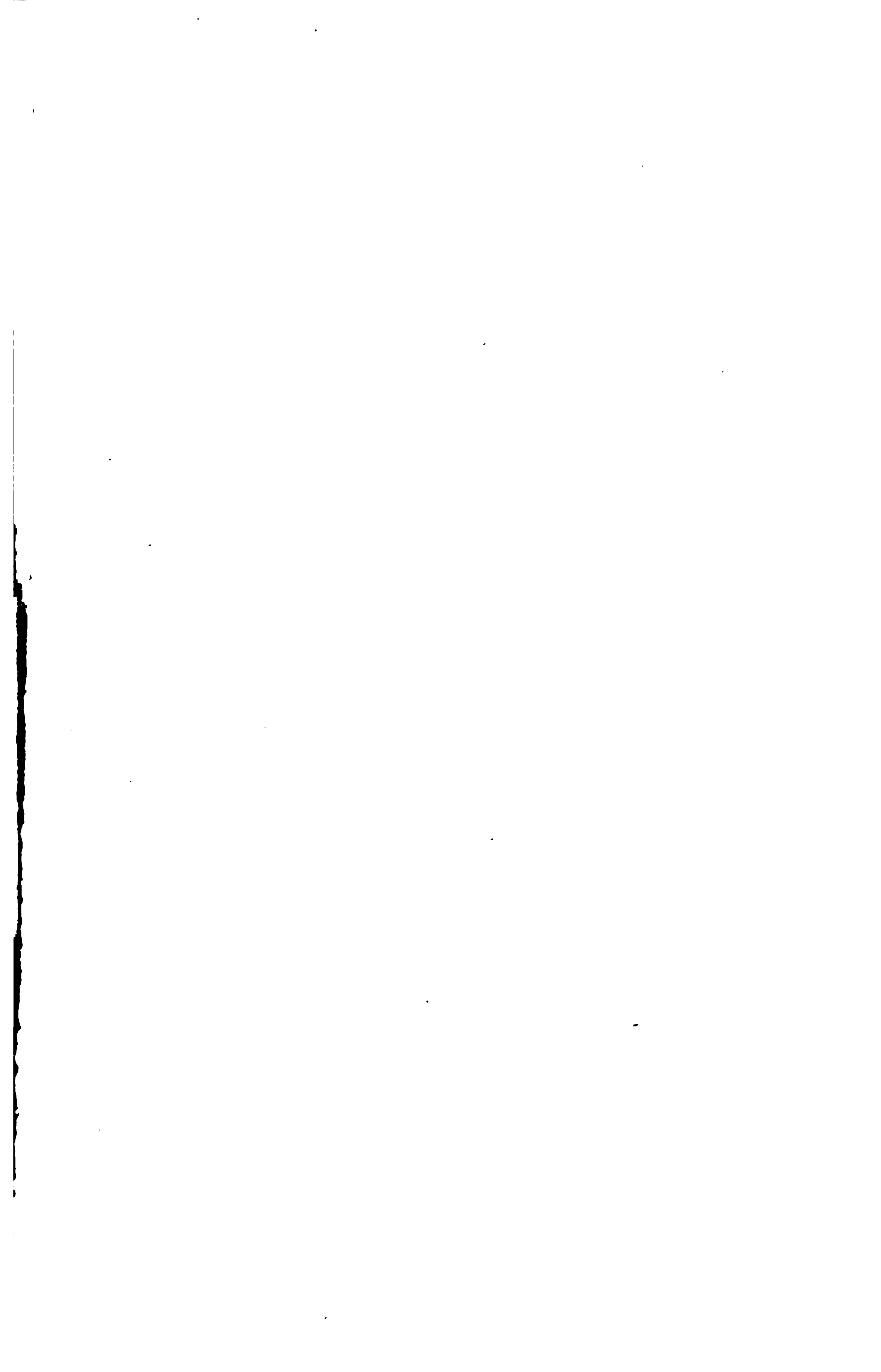
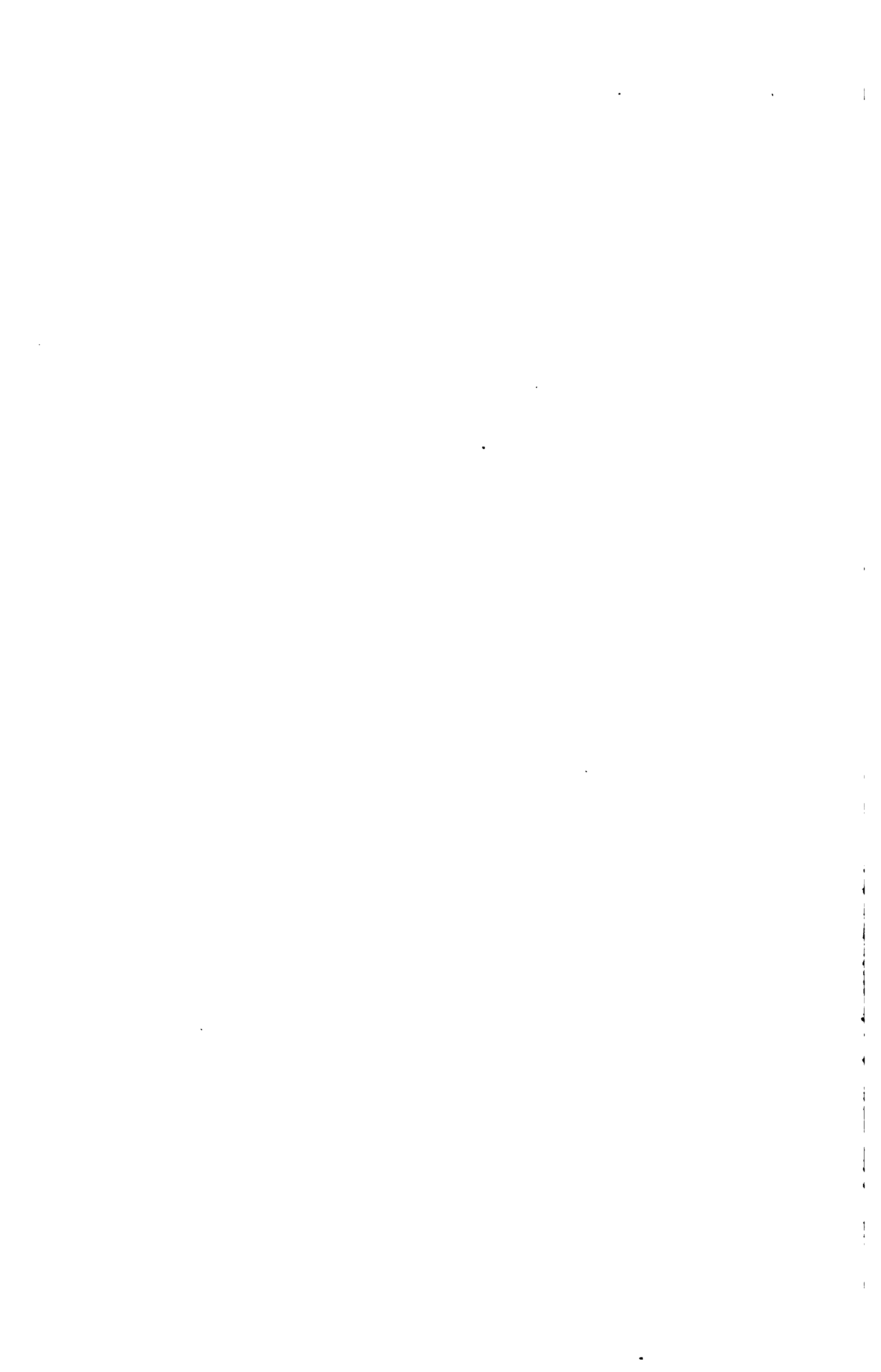



WOLBACH LIBRARY
WL 1185 S









ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. W. FÖRSTER, PROF. DR. A. KENNGOTT, PROF. DR. A. LADENBURG, KUSTOS P. MATSCHIE, PROF. DR. A. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. O. SCHLÖMILCH, PROF. DR. W. VALENTINER, PROF. DR. A. WINKELMANN, PROF. DR. G. C. WITTSTEIN.

III. ABTHEILUNG

II. THEIL:

HANDWÖRTERBUCH DER ASTRONOMIE

HERAUSGEGEBEN

VON

PROFESSOR DR. W. VALENTINER.

BRESLAU
VERLAG VON EDUARD TREWENDT
1899.

HANDWÖRTERBUCH

DER

ASTRONOMIE

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. E. BECKER-STRASSBURG, PROF. DR. E. GERLAND-KLAUSTHAL, DR. N. HERZ-HEIDELBERG, DR. H. KOBOLD-STRASSBURG, DR. N. v. KONKOLY-BUDAPEST, PROF. DR. C. W. PETERS (†), DR. E. v. REBEUR-PASCHWITZ (†), DR. FR. RISTENPART-HEIDELBERG, PROF. DR. W. SCHUR-GÖTTINGEN, PROF. DR. H. SEELIGER-MÜNCHEN, DR. C. STECHERT-HAMBURG, PROF. DR. W. WISLICENUS-STRASSBURG, DR. K. ZELBR-BRÜNN

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. W. VALENTINER

Ordentl. Professor der Astronomie an der Universität und Direktor der Astrometrischen Abtheilung der Grossherzoglichen Sternwarte zu Heidelberg

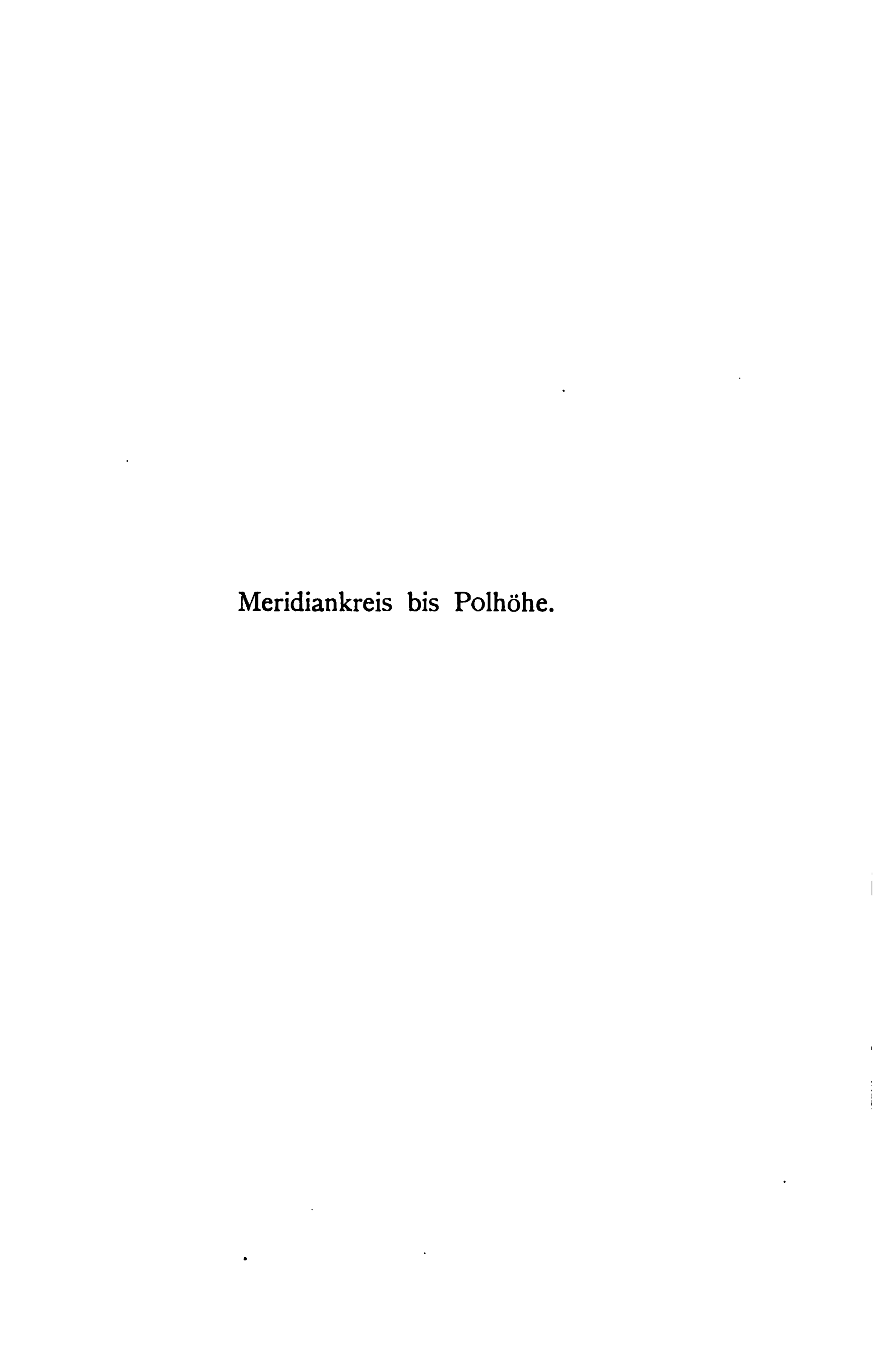
DRITTER BAND, ERSTE ABTHEILUNG

MIT 119 ABBILDUNGEN IM TEXTE UND 4 TAFELN



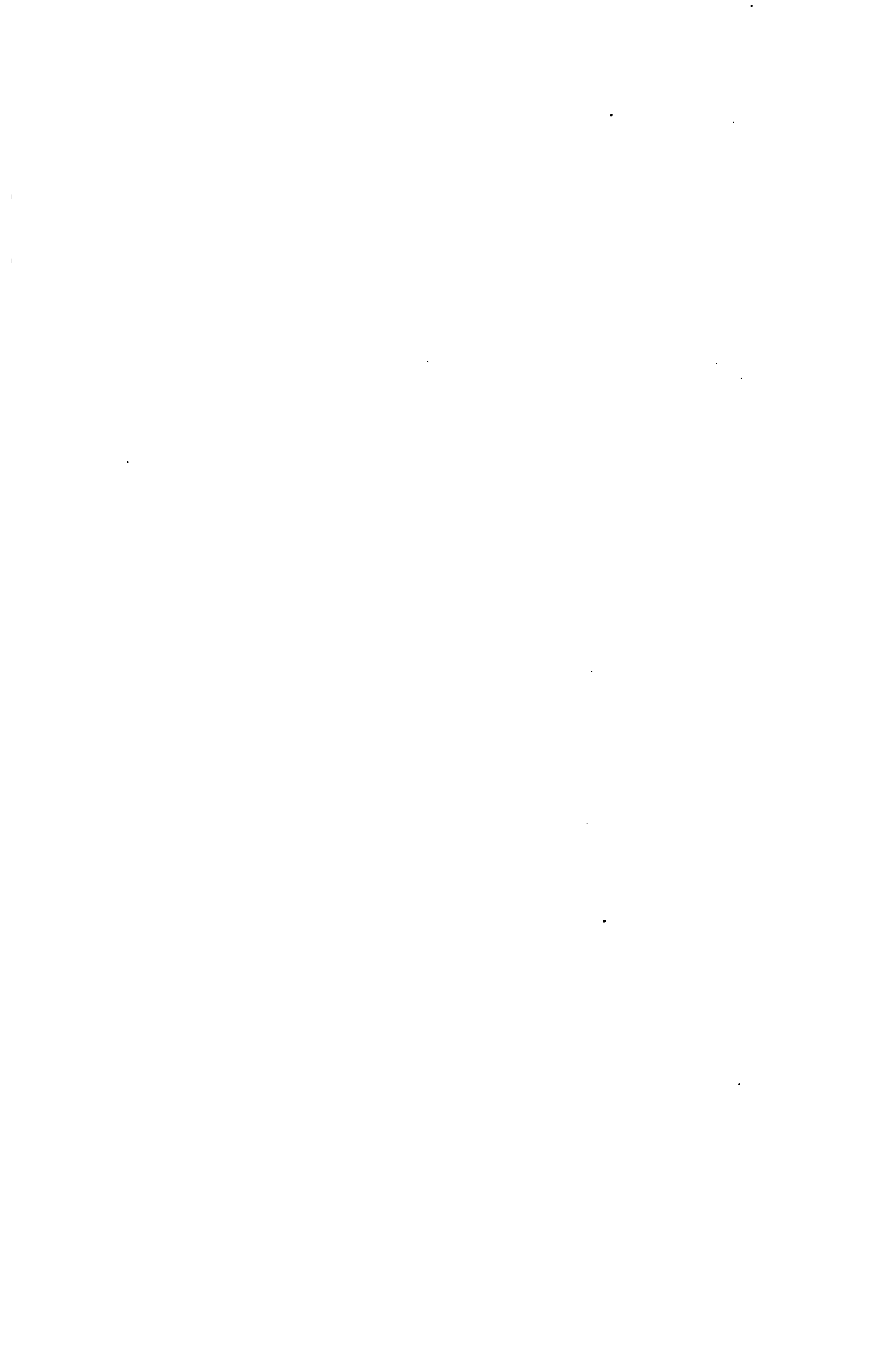
BRESLAU
VERLAG VON EDUARD TREWENDT
1899.

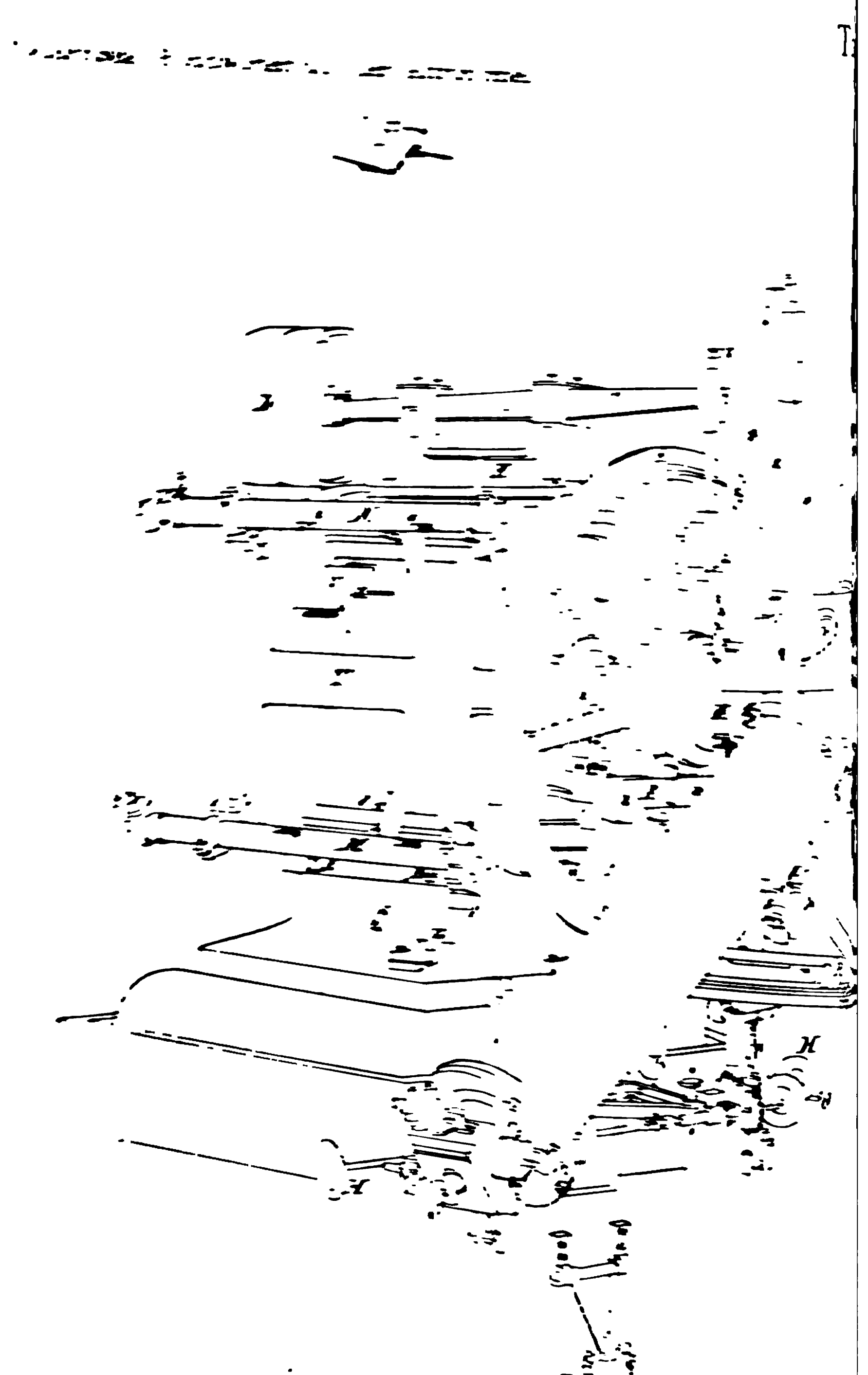
Inhaltsverzeichniss.



Meridiankreis bis Polhöhe.



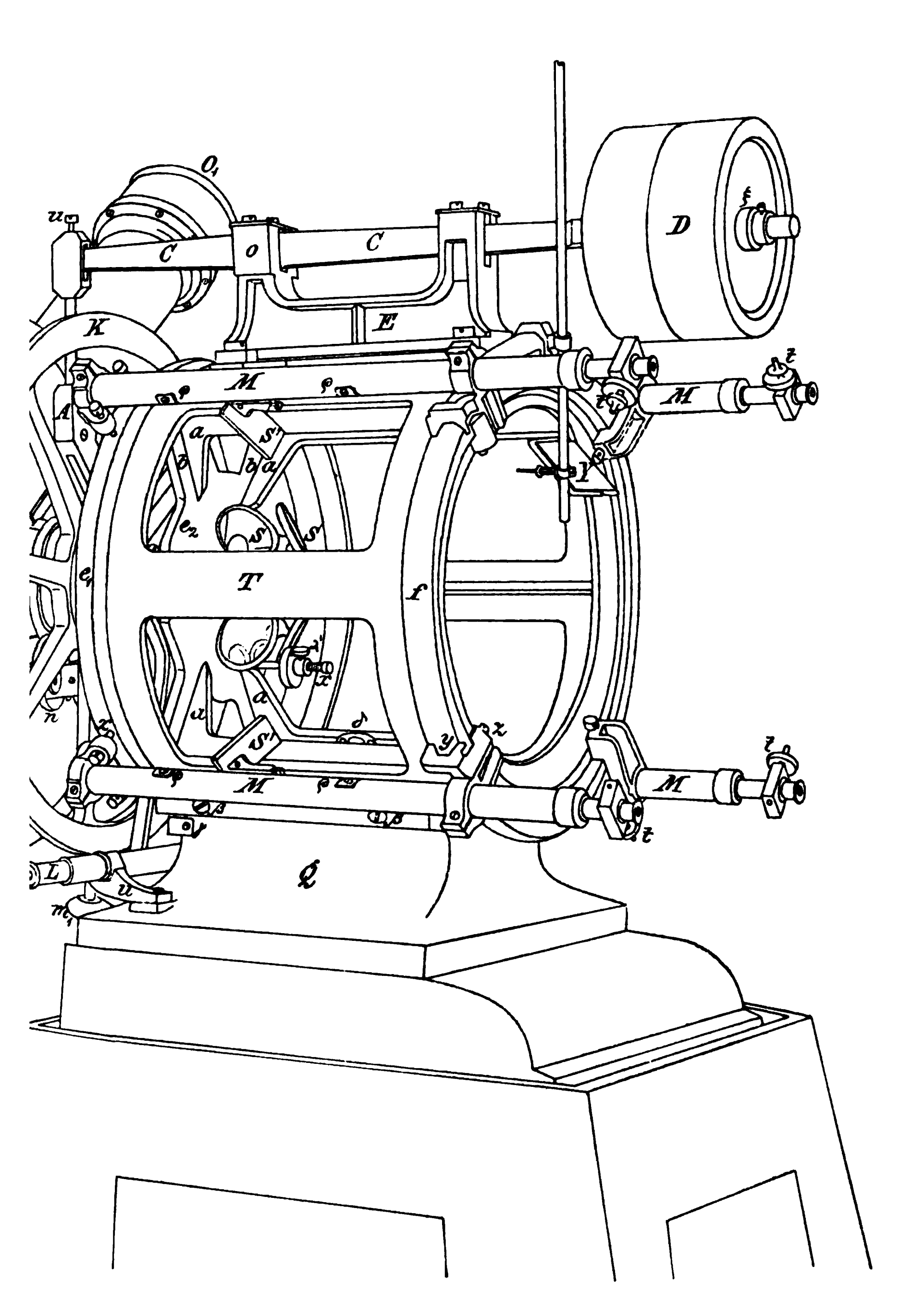




Herz del

Repsold'sche

Verlag von Er



:ridiankreis

TREWENDT.

Meridiankreis. Zur Bestimmung von Fundamentalpositionen von Gestirnen, von astronomischen Constanten aus Beobachtungen bedarf man möglichst fest aufgestellter Instrumente, während die transportabeln Universalinstrumente und Theodolite mehr zu geodätischen Zwecken Anwendung finden. Die Veränderlichkeit, welchen diese letzteren Instrumente unterworfen sind, rührt zum grossen Theile daher, dass sie, entsprechend ihrer vielseitigen Verwendung, die Möglichkeit der Drehung um zwei auf einander senkrechte Axen zulassen sollen. Andererseits setzt die Forderung der Transportabilität einer allzu weitgehenden Vergrösserung eine Grenze, während für Fundamentalbestimmungen die Erhöhung der Genauigkeit eine wesentliche Vergrösserung der Kreise, Verlängerung der Axen, Vergrösserung des Fernrohres u. s. w. und eine Reihe von Hilfsinstrumenten erfordert. So bildeten sich schon frühzeitig die grossen Mauerquadranten und Mauerkreise aus, bei denen die Beweglichkeit um eine verticale Axe wegfiel, und die horizontale Drehungsaxe des Fernrohres in einer Mauer fixirt war. Durch die später gewählte, beiderseitige Unterstützung der Axe entstand endlich der Meridiankreis. Indem dieser aber in erster Linie auch zur Bestimmung von Zenithdistanzen dienen soll, wird bei ihm ausschliesslich das nicht gebrochene Fernrohr verwendet, da bei demselben die Biegung des Oculares und Objectives sich so weit compensiren, dass die astronomische Biegung stets nur sehr klein bleibt (s. d. Artikel »Biegung«).

Für die Ablesung am Kreise hat man meist vier Mikroskope. Bei älteren Meridiankreisen waren auch wohl Nonien, oder nur zwei Mikroskope; bei den grösseren der Neuzeit findet man auch sechs Mikroskope. Die Montirung derselben war früher an vier fest mit einander verbundenen, gegen den Horizont um 45° geneigten Armen, welche von einer massiven, kreisförmigen Platte ausgingen, an welcher auch die Zapfenlager befestigt waren. Die Stellung der Mikroskope wurde durch ein Niveau, die sogen. Versicherungs- oder Alhidadenlibelle, wie sie noch jetzt bei den Universalinstrumenten in Verwendung ist, controlirt, und die Abweichungen von der Normalstellung in Rechnung gebracht (s. »Universalinstrument«). Die modernen Meridiankreise, für welche Tafel I als Muster einen REPSOLD'schen Meridiankreis darstellt, haben die Mikroskope an grossen massiven Trommeln befestigt, welche mit den Pfeilern fest verbunden sind. Diese auf den Lagern Q aufgesetzten Trommeln T sind auf der äusseren (vom Mittelpunkte abgewendeten) Seite offen; an der inneren Seite ist der Eisenkranz e_1 mit der Mittelplatte e_2 durch die mit starken Rippen a versteiften Speichen b verbunden. Zur Orientirung der Trommelaxen und des Instrumentes im Azimut

ist jede Trommel für sich mittels der vier Schrauben β in der Richtung des Meridians verschiebbar; die Neigung der Axe, bezw. der Trommeln kann in leicht ersichtlicher Weise durch die Schrauben γ corrigirt werden, von denen zwei an der inneren Seite unten, die dritte an der äusseren Seite oben angebracht sind. Nach Ausführung der sämmtlichen Correctionen werden die Trommeln mittels zweier Eisenplatten möglichst fest aufgedrückt, was durch Festschrauben des Kernes δ auf zwei in entsprechenden Höhlungen der Pfeiler eingelassene und darin mit Blei eingegossene Bolzen geschieht.

An der inneren Platte e_2 sind die v-förmigen Zapfenlager befestigt, auf welchen die Stahlzapfen der Instrumentenaxe liegen (vergl. die schematische Figur des Passageninstrumentes). Diese selbst ist durch zwei Kegelstutzen gebildet, welche an zwei gegenüberliegenden Seiten des Würfels W angeschraubt sind. An zwei anderen gegenüberliegenden Seiten des letzteren sind die Ocular- und Objectivstutzen des Fernrohres O, O_1 angeschraubt, während die beiden letzten Seiten zur freien Durchsicht behufs Collimirung des Collimators auf die Mire mit kreisförmigen Ausschnitten versehen sind, die im allgemeinen durch Kappen k geschlossen sind.

Die eine Seite der Axe (in der Figur die rechte) und der Würfel enthalten in ihren Höhlungen die Einrichtung für die Beleuchtung des Gesichtsfeldes, bezw. der Fäden des Oculars O. Durch den durchbohrten Zapfen gelangen Lichtstrahlen von einer Lampe auf zwei im Würfel seitlich gestellte Spiegel, von denen sie zu einem in der Mitte des Objectives aufgekitteten kleinen Spiegel reflectirt werden, von wo endlich der Strahlenkegel durch das Ocular ins Auge gelangt; es erscheinen somit dunkle Fäden auf hellem Grunde. Um helle Fäden auf dunklem Grunde zu erzielen werden die Spiegel im Würfel um 180° gedreht, so dass die Lichtstrahlen direkt zum Ocular und zwar zu den Seiten der Fäden geworfen werden, wo sie von zwei seitlich gestellten Spiegeln aufgefangen, und auf die Fäden reflectirt werden. Von diesen gelangt dann diffuses Licht ins Auge, während das Feld dunkel bleibt. Der Wechsel von Faden- und Feldbeleuchtung geschieht von aussen mittelst des Knopfes l[1]. Die Moderation der Beleuchtung (für sehr schwache Sterne) kann in verschiedener Weise erzielt werden, z. B. durch ein in den Strahlengang des Lampenlichtes eingeschaltetes, engmaschiges Drahtnetz, das bei normaler Stellung das Lampenlicht nur wenig dämpft; die Schwächung des Lichtes geschieht dann durch Drehung des Netzes, welche von aussen mittels des Knopfes m vorgenommen werden kann.

Das zweite Axenende enthält die zur Klemmung und Feinbewegung des Fernrohres dienende Vorrichtung. Der um die Axe geschlungene Ring $\varkappa$ setzt sich nach abwärts in den Arm λ fort, durch welchen der zur Klemmung dienende Stab λ_1 frei hindurchgeht. Zur Feinbewegung ist mit dem Arme λ der Arm μ verbunden, zwischen dessen unteren Enden der Kern ν mittels Schraube und Feder ν' hin und her bewegt werden kann. Wird der Kern ν mittels der Klemmschraube ι an die durch die Verbindungsstücke I_1 mit den Lagern Q fest verbundene Platte I festgeschraubt, so ist auch der Kern ν gegen die Lager Q fest; eine Drehung der auf kleine Messingträger θ aufgelegten Handhaben H wird demnach den Arm μ, also auch das durch λ_1 geklemmte Fernrohr sammt Kreis bewegen. Beim Umlegen des Instrumentes wird die Schraube ι herausgenommen, und der Kern ν auf das zweite, auf der anderen Seite befindliche

[1]) Die genauere Beschreibung, s. »Publicationen der v. KUFFNER'schen Sternwarte in Wien«, I. Bd., pag. 12 ff.

Verbindungsstück I angeschraubt. Um auch bei der Nadirstellung des Fernrohres (für die Beobachtungen des Quecksilberhorizontes) das Fernrohr bei geklemmter Axe vom Ocular aus fein bewegen zu können, ist an den Ring x ein Arm k' befestigt, an dessen oberem Ende sich eine mit einer Nut versehene Rolle t_1 befindet; das Messingkettchen ρ überträgt durch entsprechende Rollenführungen die Drehung der Rolle t_1 auf die Rolle t_2, welche an der zur Feinbewegung dienenden Schraubenspindel fest aufsitzt. Die zuletzt beschriebenen oberen Theile der Feinbewegungseinrichtung sind gegen den unteren, schwereren Theil durch das Gewicht G, und die rechte Seite (Beleuchtungsvorrichtung) gegen die linke (Klemme) durch zwei Gewichte G_1 balancirt. Um den Druck des Fernrohres auf die Zapfenlager aufzuheben, ruht dasselbe mittels Rollen n auf den Armen A, welche durch die Stellschrauben u auf dem kürzeren Arme der Hebel C aufliegen; diese ruhen mit Schneiden auf kleinen Auflageflächen der inneren Seiten o der Träger E, welche auf den Trommeln T aufgeschraubt sind. An den längeren Hebelarmen sind die Gewichte D durch die Zwingen ξ so festgeklemmt, dass das Instrument noch mit einem ganz geringen Druck auf den Zapfenlagern aufruht. Um bei der Umlegung des Instrumentes das Auflegen der Hebel auf die äusseren Unterlagen, wo die Trommeln nicht so stark versteift sind, wie an der inneren Seite, und andererseits die übermässige Hebung des Instrumentes, das natürlich frei über die Rollen n weggeführt werden muss, hintanzuhalten, werden die Hebel durch die Ketten Z, welche unten an der Pfeilerverschalung befestigt sind, und während des Umlegens an die Arme A angehängt werden, in ihrer gewöhnlichen Lage erhalten.

An dem für die Beleuchtung eingerichteten Axenende befindet sich ein getheilter Kreis K und auf der anderen Seite zur Aequilibrirung ein ihm ganz gleicher K', jedoch ohne Theilung[1]). Die Kreise sind von entsprechender Stärke, durch sechs T-förmig verrippte Speichen versteift, und daher gegen Deformationen genügend gesichert. Die Ablesung geschieht in jeder Kreislage durch vier Mikroskope M, welche auf den Trommeln T befestigt sind; über die Einrichtung derselben[2]) mag hier nur erwähnt werden, dass die Schräubchen ρ zur Correction der Stellung von Objectiv und Ocular gegen den Kreis dienen; die Verschiebung der Fäden wird an den Trommeln t abgelesen. Die Mikroskope werden auf den äusseren, gewölbten Kranz f der Trommeln T durch die v-förmigen Lager y aufgesetzt, und durch Schrauben s befestigt, auf dem inneren ebenen Kranz e_1 mittels dreier Schrauben x (zwei oben, eine unten), welche auch zur Correction der Stellung dienen. Zur Beleuchtung der unter den Mikroskopen befindlichen Stellen der Theilung, dient das Spiegelsystem S, S' innerhalb der Trommeln. Da sich der getheilte Kreis an der Seite des durchbohrten Zapfens befindet, so beleuchtet dieselbe Lampe sowohl das Gesichtsfeld, als auch die unter den Mikroskopen befindlichen Stellen der Theilung; dieselbe Lampe leuchtet überdies auch mittels der Spiegel Y, Y' zum Ocular des Fernrohres in der Nadirstellung des letzteren und durch ein anderes Spiegelpaar, von welchem links zwischen Kreis und Trommel ein Spiegel s sichtbar ist, auf die Stelle des Kreises, an welcher die Indexlesung mittels des Ablesefernrohres L gemacht wird, das in den auf den Platten Q befestigten Lagern u liegt.

Zu erwähnen ist noch, dass bei der jetzt im allgemeinen eingeführten elektrischen Beleuchtung jedes Mikroskop sein eigenes Glühlicht erhält.

---

[1]) Doch sind auch vielfach beide Kreise getheilt.

[2]) S. den Artikel »Nonius und Ablesemikroskop«.

Zur Erhaltung der Unveränderlichkeit des Kreises gegen die Mikroskope reicht auf jeder Seite durch kleine Durchbohrungen der Zapfenlager von unten je ein kleiner Hebel φ (links zwischen Kreis und Trommel sichtbar) bis an den Zapfen, und drückt gegen diesen mittels einer Feder χ (rechts innerhalb der Trommel sichtbar), welche durch die Schraube χ' geklemmt werden kann; an dem Kreisende wird diese Schraube angezogen, an dem anderen Axenende gelüftet, so dass nur dieses der Ausdehnung und Zusammenziehung der Axe folgen kann.

Ueber das Mikrometer (vergl. den betr. Artikel) mag nur erwähnt werden, dass die Verschiebungen der beweglichen Fäden an den beiden Trommeln τ_1 und τ_2 gelesen werden; das Ocular ist mittels der Schrauben δ_1, δ_2 über das ganze Gesichtsfeld verschiebbar; *h* sind Handhaben zum Anfassen des Oculars; zur Bewegung des Fernrohres dient der Kreis *P*.

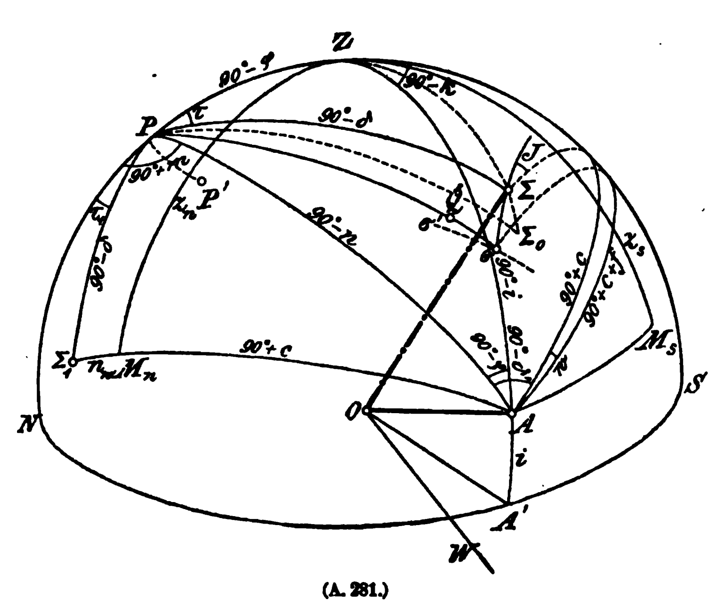
Das Niveau n_2 in der Röhre *R* befindet sich auf dem horizontalen, etwas vorwärts gerückten, ausgebogenen Arm des Gehänges m_2, um auch bei der Stellung des Fernrohres ins Nadir das Niveau lesen zu können; zum bequemen Aufsetzen und Abnehmen desselben dienen die Handhaben m_1 (rechts der obere, links der untere Theil sichtbar). Selbstverständlich ist hier auch die Libelle entlastet, worüber näheres im Artikel »Passageninstrument« nachzusehen ist.

Zur Umlegung des Instrumentes dient ein eigener Umlegebock, welcher auf Schienen unter das Instrument geführt wird. Im wesentlichen besteht derselbe aus einer sehr starken, und mit zahlreichen Windungen versehenen Schraube, welche oben zwei Arme trägt, die bei gehobener Schraube unter die Axe greifen, und das Instrument herausheben. Hebung und Senkung der Schraube erfolgt durch Drehung des mit dem Gerüste des Umlegebockes verbundenen Muttergewindes. Die Wirkung wird aus der Zeichnung des Passageninstrumentes ersichtlich, wenn man sich dort die Träger *T*, *T* durch einen horizontalen Arm verbunden, und in der Mitte auf der Schraube des Umlegebockes aufgesetzt denkt.

Die Beobachtungen mit dem Meridiankreise sind zunächst Durchgangsbeobachtungen zur Bestimmung von Rectascensionen, möge dieses eine Hauptaufgabe sein, wie Bestimmung von Fixsternpositionen, oder selbst einem andern Zwecke, z. B. der Bestimmung einer absoluten Rectascension aus den Beobachtungen der Sonne dienen. Da es sich hierbei um den Durchgang von Gestirnen durch den Meridian handelt, so ist zunächst erforderlich, dass das Instrument wirklich im Meridian aufgestellt sei, d. h. dass die Drehungsaxe desselben horizontal und von West nach Ost gerichtet ist. Diese theoretische Forderung wird nicht immer und nicht auf die Dauer zu erfüllen sein, aber eine genaue und fortwährende Berichtigung wird unnöthig, weil man die Fehler des Instrumentes bestimmen und in Rechnung ziehen kann. Da aber diese Fehler stets sehr klein erhalten werden müssen, wenn die Reduction einfach bleiben soll, so ist es nöthig, das Instrument so nahe als möglich zu berichtigen. Die nahe Horizontalstellung der Axe geschieht leicht mit dem Niveau (s. dieses). Die Einstellung des Instrumentes in den Meridian erfolgt am einfachsten so, dass man einen hellen Stern in der Nähe des Poles (am besten den zu jeder Tageszeit selbst in kleineren Instrumenten gut sichtbaren Polarstern) aufsucht, was des Nachts keine Schwierigkeiten hat, und ihn dann bis zu seiner oberen Culmination verfolgt, wenn man eine gut gehende Uhr zur Hand hat. Hat man jedoch keinen richtigen Uhrstand, was wohl nur bei ersten Aufstellungen auf grösseren Expeditionen vorkommen kann, so wird man den Polarstern im oberen und unteren Theil seines Paralleles beobachten; ist die Zeit zwischen dem

oberen und unteren Durchgange grösser (bezw. kleiner) als 12 Stunden, so weicht die Absehenlinie im Norden gegen Osten (bezw. Westen) ab, daher das westliche Axenende gegen Norden (bezw. Süden), wonach die Berichtigung vorgenommen werden kann. Man kann, wenn man dabei noch den Kreis abliest auch den Index so weit berichtigen, dass die Lesungen am Kreise zur Einstellung vollkommen ausreichen. Die noch übrigbleibenden Fehler können dann, wie später gezeigt wird, durch die Beobachtungen selbst bestimmt, und wenn dieselben noch zu gross sind, weiter berichtigt werden.

Sei nun in Fig. 281 *NWS* der Horizont, *Z* das Zenith, *P* der Nordpol des Aequators, demnach *N* der Nordpunkt, *W* der 90° davon entfernte Westpunkt, daher *OW* die theoretisch geforderte Richtung der Umdrehungsaxe des Fernrohres, und ist diese *OA*, in dem Verticalkreise *ZAA'* gelegen, so ist $WA' = k$ das **Azimuth des Instrumentes** (positiv, wenn das westliche Axenende gegen Süden abweicht) und $AA' = i$ die **Neigung der Axe** (positiv, wenn das westliche Axenende das höhere ist). Die Absehenlinie des Fernrohres, welche auf der Umdrehungsaxe senkrecht stehen soll, wird dann einen grössten Kreis beschreiben, der nicht mit dem Meridian *PZS* zusammenfällt; wenn aber die Absehenlinie $O\Sigma$ nicht senkrecht auf *OA* steht, sondern einen Winkel $90° + c$ mit der Axe einschliesst, wobei *c* der **Collimationsfehler des Instrumentes** ist (positiv, wenn der Winkel zwischen dem westlichen Axenende und der gegen das Objectiv hin gezogenen Visirlinie grösser als 90° ist), so wird der Stern Σ am Kreuzungspunkt der Fäden ausserhalb des Meridians erscheinen, und man muss zur beobachteten Zeit den Stundenwinkel τ (positiv, wenn östlich) hinzufügen, um die Durchgangszeit durch den Meridian zu erhalten.



(A. 281.)

Ist *u* die Uhrzeit der Beobachtung, *x* der Stand der Uhr gegen Sternzeit, also $u + x$ die Sternzeit der Beobachtung, so wird

$$u + x + \tau = \alpha. \qquad (1)$$

Um τ aus den Grössen *k*, *i*, *c* zu bestimmen, wird es am einfachsten, die Aequatorcoordinaten des westlichen Axenendes einzuführen. Ist $90° - m$ der westliche Stundenwinkel (also *m* positiv, wenn das Axenende gegen Süden verschoben ist), und *n* die Deklination (positiv, wenn nördlich) des westlichen Axenendes, so hat man aus dem Dreiecke *PZA* sofort:

$$\begin{aligned} \sin n &= \sin\varphi \sin i - \cos\varphi \cos i \sin k \\ \cos n \sin m &= \cos\varphi \sin i + \sin\varphi \cos i \sin k \qquad (2) \\ \cos n \cos m &= \cos i \cos k, \end{aligned}$$

wobei φ die Polhöhe des Beobachtungsortes ist. Nun folgt aus dem Dreiecke $AP\Sigma$ für einen Stern, dessen Deklination δ ist:

$$-\sin c = \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (m - \tau); \tag{3}$$

Diese Formel giebt:

$$\frac{\sin (\tau - m)}{\cos m} = \frac{\tang n \tang \delta}{\cos m} + \frac{\sin c \sec \delta}{\cos n \cos m}. \tag{4}$$

Substituirt man hier die aus (2) folgenden Werthe für $\tang m$, $\tang n \sec m$ und $\cos m \cos n$, so erhält man

$$\sin \tau - \cos \tau \frac{\sin i \cos \varphi + \cos i \sin \varphi \sin k}{\cos i \cos k} = \frac{\sin i \sin \varphi - \cos i \cos \varphi \sin k}{\cos i \cos k} \tang \delta + \frac{\sin c \sec \delta}{\cos i \cos k}.$$

Da aber für alle Winkel α bis $\alpha = 17'$: $\sec \alpha = 1$, $\tang \alpha = \sin \alpha = \alpha$ auf 5 Decimalen ist, so folgt hieraus:

$$\sin \tau - (1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\tau)(i \cos \varphi + k \sin \varphi) = (i \sin \varphi - k \cos \varphi) \tang \delta + c \sec \delta$$

$$\sin \tau + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\tau (i \cos \varphi + k \sin \varphi) = i \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta.$$

Der Werth auf der rechten Seite kann nie grösser werden, als $(i + k + c) \sec \delta$; für $i = k = \pm 30''$, $c = \pm 10''$, $\cos \delta = 0{\cdot}01$, wofür $\delta = 89° 25'{\cdot}6$ ist, wird $(i + k + c) \sec \delta$ nahe $1° 57'$, womit die Correction $2 \sin^2 \frac{1}{2}\tau (i \cos \varphi + k \sin \varphi)$ zu vernachlässigen ist, da der stets grössere Werth $2 \sin^2 \frac{1}{2}\tau (i + k)$ hierfür erst $0''{\cdot}035$ wird. Es ist daher stets hinreichend genau:

$$\frac{\sin \tau}{arc\, 1''} = i \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta. \tag{5}$$

Für polnahe Sterne kann τ wegen des Nenners $\cos \delta$ beträchtlich werden; setzt man

$$\Delta\tau = \tau - \frac{\sin \tau}{arc\, 1''} \tag{6}$$

so erhält man die MAYER'sche Formel:

$$\tau = i \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta + \Delta\tau. \tag{7}$$

Denkt man sich i, k, c in Zeitsecunden ausgedrückt, so erhält man τ sofort in Zeitsecunden; $\Delta\tau$ wird nur für Polsterne merklich und kann für diese mit dem Argumente τ (wobei in erster Näherung $\Delta\tau$ vernachlässigt wird) der folgenden Tafel entnommen werden:

τ	$\tau^s - \frac{\sin \tau}{arc\, 1^s}$	τ	$\tau^s - \frac{\sin \tau}{arc\, 1^s}$	τ	$\tau^s - \frac{\sin \tau}{arc\, 1^s}$	τ	$\tau^s - \frac{\sin \tau}{arc\, 1^s}$	τ	$\tau^s - \frac{\sin \tau}{arc\, 1^s}$
$0^h\ 0^m$	$0^s{\cdot}00$	$0^h\ 14^m$	$0^s{\cdot}52$	$0^h\ 28^m$	$4^s{\cdot}18$	$0^h\ 42^m$	$14^s{\cdot}08$	$0\ \ 56^m$	$33^s{\cdot}33$
1	0·00	15	0·64	29	4·64	43	15·11	57	35·15
2	0·00	16	0·78	30	5·14	44	16·19	58	37·03
3	0·00	17	0·93	31	5·67	45	17·32	0 59	38·97
4	0·01	18	1·11	32	6·23	46	18·49	1 0	40·98
5	0·02	19	1·30	33	6·83	47	19·72	1	43·06
6	0·04	20	1·52	34	7·47	48	21·01	2	45·21
7	0·07	21	1·76	35	8·15	49	22·35	3	47·43
8	0·10	22	2·03	36	8·87	50	23·74	4	49·71
9	0·14	23	2·32	37	9·63	51	25·19	5	52·07
10	0·19	24	2·63	38	10·43	52	26·70	6	54·51
11	0·25	25	2·97	39	11·28	53	28·27	7	57·02
12	0·33	26	3·34	40	12·17	54	29·90	8	59·60
13	0·42	27	3·75	41	13·10	55	31·58	9	62·26
14	0·52	28	4·18	42	14·08	56	33·33	10	65·00

Der Voraussetzung nach gilt Formel (7) für die obere Culmination von Gestirnen; für die untere Culmination Σ_1 folgt aus dem Dreiecke $PA\Sigma_1$:

$$-\sin c = \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (\tau_1 - m)$$

und mit Rücksicht auf (2), wenn der Index bei τ_1 weggelassen wird:

$$\tau = i \frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi+\delta)}{\sin \delta} - c \sec \delta + \Delta\tau. \qquad (7a)$$

Legt man das Instrument in den Lagern um, so wird, wenn i wieder positiv für die Erhöhung des westlichen Axenendes ist, da jetzt der Winkel der Collimationslinie mit dem westlichen Axenende $90° - c$ ist, in den bisherigen Formeln nur c mit $-c$ zu vertauschen sein; man hat daher, wenn die Formeln (7) und (7a) für den Fall K. W. gelten, also c positiv ist, wenn die Collimationslinie mit dem Kreisende den Winkel $90° + c$ bildet:

	Obere Culmination	Untere Culmination	
für K. W.:	$\alpha = u + x + iJ_o + kK_o + c_w \sec \delta$	$\alpha = u + x + iJ_u + kK_u - c_w \sec \delta$	(I)
„ K. O.:	$\alpha = u + x + iJ_o + kK_o + c_o \sec \delta$	$\alpha = u + x + iJ_u + kK_u - c_o \sec \delta,$	

wobei Kürze halber $\Delta\tau$ weggelassen wurde. Dabei ist:

für obere Culmination	untere Culmination		
$J_o = \frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos \delta}$	$J_u = \frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos \delta}$	$J_o + J_u = 2 \cos \varphi$	(Ia)
$K_o = \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos \delta}$	$K_u = \frac{\sin(\varphi+\delta)}{\cos \delta}$	$K_o + K_u = 2 \sin \varphi.$	

Nach dem obigen wäre weiter noch $c_w = +c$, $c_o = -c$. Nun ist aber für α die wahre Rectascension des Gestirnes zu verwenden; die Präcession, Nutation und jährliche Aberration werden bei den Sternephemeriden stets berücksichtigt; die tägliche Aberration ist jedoch von der Polhöhe abhängig und muss für jeden Beobachtungsort speciell berechnet werden; sie ist für Meridianbeobachtungen (vergl. den I. Bd., pag. 170) $\pm\, 0''\!\cdot\!320 \cos \varphi \sec \delta$, wo das positive Zeichen für obere, das negative für untere Culmination gilt, und man hat daher links $\alpha \pm 0''\!\cdot\!320 \cos \varphi \sec \delta$ zu setzen. Versteht man daher unter α die scheinbare, mit Präcession, Nutation und jährlicher Aberration behaftete Rectascension, und bringt die tägliche Aberration auf die rechte Seite, so vereinigt sich dieses Glied mit dem von c abhängigen und man hat

$$\begin{aligned} &\text{für Kreis West} \quad c_w = +c - 0^s\!\cdot\!021 \cos \varphi \\ &\text{für Kreis Ost} \quad c_o = -c - 0^s\!\cdot\!021 \cos \varphi, \end{aligned} \qquad (Ib)$$

wobei das Zusatzglied $0^s\!\cdot\!021 \cos \varphi$ für jede Sternwarte (gegebenes φ) constant ist.

Unter der Voraussetzung kleiner Instrumentalfehler nimmt die Formel (3) durch Vertauschung der kleinen Winkel mit den Bogen die Form an:

$$-c = n \sin \delta + (m - \tau) \cos \delta,$$

und man erhält die Bessel'sche Formel

$$\tau = m + n \tang \delta + c \sec \delta, \qquad (8)$$

folglich

	Obere Culmination	Untere Culmination	
K. W.:	$\alpha = u + x + m + n \tang \delta + c_w \sec \delta$	$\alpha = u + x + m - n \tang \delta - c_w \sec \delta$	(II)
K. O.:	$\alpha = u + x + m + n \tang \delta + c_o \sec \delta$	$\alpha = u + x + m - n \tang \delta - c_o \sec \delta.$	

In diesen Formeln tritt aber ein direkt leicht zu bestimmender Instrumentalfehler, die Neigung, nicht auf; da aber aus (2):

$$n = i \sin\varphi - k \cos\varphi$$
$$m = i \cos\varphi + k \sin\varphi \qquad (2a)$$

und hieraus

$$m = i \sec\varphi - n \tan g\varphi \qquad (9)$$

ist, so folgt durch Substitution von (9) in (8) die HANSEN'sche Formel:

$$\tau = i \sec\varphi + n(\tan g\delta - \tan g\varphi) + c \sec\delta, \qquad (10)$$

folglich

	Obere Culmination	Untere Culmination
K. W.:	$\alpha = u + x + i\sec\varphi + nN_o + c_w \sec\delta$	$\alpha = u + x + i\sec\varphi + nN_u - c_w \sec\delta$
K. O.:	$\alpha = u + x + i\sec\varphi + nN_o + c_o \sec\delta$	$\alpha = u + x + i\sec\varphi + nN_u - c_o \sec\delta.$
	$N_o = +(\tan g\delta - \tan g\varphi)$	$N_u = -(\tan g\delta + \tan g\varphi).$

(III)

Die Beobachtung der Durchgangszeit an einem einzigen Faden ist keineswegs für genaue Beobachtungen ausreichend; man zieht deshalb auf der Fadenplatte mehrere parallele Fäden, ein Fadennetz auf, und schliesst aus der bekannten Fadendistanz auf die Zeit, welche ein Stern braucht, um von einem festen Seitenfaden auf den Mittelfaden zu kommen: man reducirt die Antritte an den Seitenfäden auf den Mittelfaden. Unter der Entfernung zweier Punkte der Fadenplatte versteht man dabei den Winkel, den die von ihnen zu dem vorderen Knotenpunkte des Objectives gezogenen Geraden einschliessen, welcher gleich ist dem Winkel, den die vom hinteren Knotenpunkte zu jenen Objecten gezogenen Geraden einschliessen, deren Bilder eben an den beiden Punkten der Brennebene auftreten. Für einen Faden, der sich im Abstande f östlich vom Mittelfaden befindet, d. h. der bei der oberen Culmination eines Gestirnes vor dem Mittelfaden passirt wird[1]), ist der Winkel, welchen die Visirlinie mit der Drehungsaxe macht $90° + c + f$, woraus folgt, dass sich für diesen die Reduction auf den Meridian $\tau + t$ ergiebt, wenn man in Formel (3) $c + f$ an Stelle von c setzt. Es ist also:

$$-\sin(c + f) = \sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin(m - \tau - t). \qquad (11)$$

Subtrahirt man diese Gleichung von (3), so erhält man

$$2 \sin\tfrac{1}{2}t \cos(\tfrac{1}{2}t + \tau - m) = \sin f \sec\delta$$

und daraus

$$\begin{aligned} \sin f \sec\delta &= 2 \sin\tfrac{1}{2}t[\cos\tfrac{1}{2}t \cos(\tau - m) - \sin\tfrac{1}{2}t \sin(\tau - m)] \\ &= 2 \sin\tfrac{1}{2}t\left[\cos\tfrac{1}{2}t\{1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\tau - m)\} - 2\sin\tfrac{1}{2}t \sin\tfrac{1}{2}(\tau - m)\cos\tfrac{1}{2}(\tau - m)\right] \\ &= \sin t - 4 \sin\tfrac{1}{2}t \sin\tfrac{1}{2}(\tau - m) \sin\tfrac{1}{2}[t + (\tau - m)]. \end{aligned}$$

Für $\delta = 89°$, $f = 18'$, $\tau = 50'$, $m = \pm 30''$ wird das Correctionsglied 0·000644 bezw. 0·000632, während es mit Vernachlässigung von m 0·000638 wird; man kann daher dieses Correctionsglied einfach schreiben $4 \sin\frac{1}{2}t \sin\frac{1}{2}\tau \sin\frac{1}{2}(t+\tau)$ und da für kleine Werthe von x: $\sin(t + x) = \sin t + x \cos t$ ist, so wird

$$\sin f \sec\delta = \sin(t + x) \qquad (12)$$

$$x = -\frac{4 \sin\frac{1}{2}t \sin\frac{1}{2}\tau \sin\frac{1}{2}(t + \tau)}{\cos t \, arc\, 1''}.$$

t und τ selbst werden nur erheblich bei Sternen in der Nähe des Poles, oder wenn das Instrument nicht sehr genau im Meridian steht; für $t < 5^m$, $\tau < 20^s$ wird x noch verschwinden, und selbst für $t = 10^m$, $\tau = 40^s$ wird x noch ver-

---

[1]) Der Faden liegt dann auf der Fadenplatte eigentlich westlich, aber die Verlängerung der Visirlinie trifft die Himmelskugel in einem Punkte, der östlich von der Collimationslinie liegt.

nachlässigt werden können; es ist daher für Sterne, deren Deklination hinreichend klein ist[1])

$$\sin t = \sin f \sec \delta. \tag{13}$$

Für grössere t und τ kann man die folgende Tafel benutzen, welche x mit den Argumenten t und τ giebt:

$t \backslash \tau$	-4^m	-3^m	-2^m	-1^m	0^m	$+1^m$	$+2^m$	$+3^m$	$+4^m$
-50^m	$+6^s{\cdot}29$	$+4^s{\cdot}63$	$+3^s{\cdot}04$	$+1^s{\cdot}51$	$0^s{\cdot}00$	$-1^s{\cdot}43$	$-2^s{\cdot}82$	$-4^s{\cdot}11$	$-5^s{\cdot}36$
-40	+4·07	+2·98	+1·94	+0·95	0·00	−0·90	−1·76	−2·57	−3·33
-30	+2·35	+1·71	+1·10	+0·53	0·00	−0·50	−0·97	−1·40	−1·79
-20	+1·10	+0·79	+0·50	+0·24	0·00	−0·22	−0·41	−0·58	−0·73
-10	+0·32	+0·22	+0·14	+0·06	0·00	−0·05	−0·09	−0·12	−0·14
0	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00
$+10$	+0·14	+0·12	+0·09	+0·05	0·00	−0·06	−0·14	−0·22	−0·32
$+20$	+0·73	+0·58	+0·41	+0·22	0·00	−0·24	−0·50	−0·79	−1·10
$+30$	+1·79	+1·40	+0·97	+0·50	0·00	−0·53	−1·10	−1·71	−2·35
$+40$	+3·33	+2·57	+1·76	+0·90	0·00	−0·95	−1·94	−2·98	−4·07
$+50$	+5·36	+4·11	+2·82	+1·43	0·00	−1·51	−3·04	−4·63	−6·29

Der so erhaltene Werth von t bedarf in aller Strenge noch einer Correction wegen Refraction; der Stundenwinkel τ (Fig. 281) giebt nämlich die Zeit, welche der Stern braucht, um in den Meridian zu kommen, wenn Σ sein wahrer Ort ist; da aber der Stern in Folge der Refraction stets gehoben erscheint, so wird, wenn er den Faden passirt, sein wahrer Ort in dem Verticalkreise $Z\Sigma$ in grösserer Zenithdistanz Σ_0 sein, und der Winkel $ZP\Sigma_0 = \tau_0$ ist sein wahrer Stundenwinkel, d. h. die Zeit, welche er braucht, um vom Momente der Sichtbarkeit am Faden in den Meridian zu kommen. Nun hat man aus den sphärischen Dreiecken $ZP\Sigma$, $ZP\Sigma_0$:

$$\sin PZ\Sigma = \sin PZ\Sigma_0 = \frac{\sin \tau \cos \delta}{\sin z} = \frac{\sin \tau_0 \cos \delta_0}{\sin z_0},$$

wenn scheinbare und wahre Zenithdistanz mit z und z_0 und die wahre Deklination mit δ_0 bezeichnet werden; hieraus folgt:

$$\sin \tau_0 = \sin \tau \frac{\cos \delta}{\cos \delta_0} \frac{\sin z_0}{\sin z}.$$

Da nun, wenn man sich auf die mittlere Refraction beschränkt, was hier völlig ausreichend ist:

$$z_0 = z + k \tan z$$

ist, so wird

$$\frac{\sin z_0}{\sin z} = \frac{\sin z + k \tan z \cos z}{\sin z} = 1 + k \operatorname{arc} 1''$$

oder, da $k = 57''{\cdot}5$ ist:

$$\sin \tau_0 = \sin \tau \frac{\cos \delta}{\cos \delta_0} 1{\cdot}00028.$$

Bei der Reduction auf den Meridian kann diese Correction mit Rücksicht auf den geringen Betrag der Instrumentalfehler vernachlässigt werden; da aber dieselbe Gleichung auch für $\tau + t$ gilt, so hat man ebenso:

---

[1]) Die Fadendistanzen und damit die Reductionen auf den Mittelfaden für gegebene Deklinationen bleiben bis auf die Correction x constant, so lange die Fadenplatte nicht geändert oder verschoben ist.

$$\sin(t_0 + \tau_0) = \sin(t + \tau)\,\frac{\cos\delta}{\cos\delta_0}\cdot 1{\cdot}00028;$$

vernachlässigt man hier τ_0 und τ, so folgt mit Rücksicht auf (13):

$$\sin t_0 = \sin f \sec\delta_0 \cdot 1{\cdot}00028,$$

wofür man auch, da die Fadendistanzen f (nicht aber t) stets mässige Werthe sind:

$$\sin t_0 = \sin f_0 \sec\delta_0;\quad f_0 = 1{\cdot}00028 f, \tag{14}$$

also eine mit (13) identische Formel erhält. Die Fadendistanzen können aus Beobachtungen von Sternen selbst bestimmt werden; beobachtet man eine grössere Anzahl von Sterndurchgängen an den einzelnen Fäden, so wird jeder Stern aus dem beobachteten t einen Werth von f geben; benutzt man hierzu die Formel (13), so erhält man hieraus gemäss Formel (14) f_0, und dann $f = f_0 : 1{\cdot}00028$; um diese Werthe wieder zur Reduction auf den Mittelfaden zu verwenden, muss wieder $1{\cdot}00028 f$ gebildet werden; hieraus folgt, dass man die nach Formel (13) berechneten Fadendistanzen f unmittelbar ohne Rücksicht auf den Refractionsfaktor 1·00028 zur Reduction auf den Mittelfaden mit Benutzung der wahren Deklination des Sternes verwenden kann; nur sind die erhaltenen Fadendistanzen nicht die wahren, sondern die wegen Refraction veränderten.

Man kann aber die Fadenintervalle auch nach Gauss direkt durch ein Winkelmessinstrument bestimmen. Da nämlich die von Punkten aus der Brennebene eines Objectivs kommenden Strahlen parallel austreten, und die Richtung derselben für den von zwei verschiedenen Punkten eingeschlossenen Winkel bestimmend sind, so kann man diese Winkel mittels des auf das Fernrohr collimirten Fernrohres eines Universalinstrumentes ermitteln. Die so erhaltenen Werthe sind aber die wahren, und sollen dieselben mit den aus Fixsternbeobachtungen abgeleiten vereinigt werden, so müssen sie mit 1·00028 multiplicirt werden.

Zu erwähnen ist noch, dass in Folge der verschiedenen Ausdehnung der Fadenplatte und des Fernrohres durch Temperaturänderungen, sowie durch die veränderte Brechkraft des Objectivs die Fadenintervalle mit der Temperatur etwas veränderlich sind, und als Functionen der Temperatur in der Form $f_0 + \varphi(t - t_0)$ durch Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen bestimmt werden können.

Da man den absoluten Parallelismus der Fäden nicht verbürgen kann, und durch eine Abweichung in dieser Beziehung die Distanzen an verschiedenen Punkten verschieden werden, so ist stets noch ein die Fäden senkrecht schneidender Faden oder besser noch ein Fadenpaar gespannt, längs dessen die Sterne beobachtet werden; die Distanzen der »Verticalfäden« beziehen sich dann auf jene Punkte, welche zwischen dem horizontalen Doppelfaden liegen.

Bei der Beobachtung von Planeten und namentlich beim Monde ist es nothwendig, auf die Eigenbewegung und Parallaxe, und da man nur die Ränder beobachten kann, auf den Halbmesser des Gestirnes Rücksicht zu nehmen. Ist h' der scheinbare Halbmesser des Gestirnes, so wird, wenn der erste oder zweite (vorangehende bezw. folgende) Rand an einem östlichen Seitenfaden beobachtet wird, dessen Distanz vom Mittelfaden f ist, der Mittelpunkt des Gestirnes vom Mittelfaden $f \pm h'$ sein; die Beobachtung des Randes an diesem Seitenfaden ist daher identisch mit der Beobachtung des Mittelpunktes an einem Faden, dessen Distanz vom Mittelfaden $f \pm h'$ ist; man hat daher in Formel (11) $f \pm h'$ statt f zu setzen, wo das positive Zeichen sich auf die Beobachtung des ersten, das negative auf die Beobachtung des zweiten Randes bezieht. t, τ,

δ bedeuten aber nunmehr Stundenwinkel und Deklination vom Beobachtungsort aus gesehen, während man aus der Ephemeride die geocentrische Deklination entnimmt, und zur Reduction den geocentrischen Stundenwinkel braucht; hat das Gestirn überdiess eine Eigenbewegung entgegengesetzt der täglichen Bewegung, und ist diese λ gleich der Bewegung des Gestirnes in 1^s Sternzeit, ausgedrückt in Zeitsecunden, so ist die Zeit, welche das Gestirn braucht, um den geocentrischen Stundenwinkel s zu durchlaufen $\frac{s}{1-\lambda}$; ist $\Delta\alpha_0$ die Aenderung der Rectascension des Gestirnes in 24^h Sternzeit, so ist $\lambda = \frac{\Delta\alpha_0}{86400}$; in den Ephemeriden findet man aber die Aenderung $\Delta\alpha$ in 24 Stunden mittlerer Zeit, und da $\Delta\alpha_0 = \Delta\alpha \times 0{\cdot}9972693$ ist, so ist:

$$\lambda = \frac{0{\cdot}9972693}{86400}\,\Delta\alpha = (5{\cdot}0622988-10)\Delta\alpha.$$

Zum Uebergange von den Grössen α', δ', τ' für einen Beobachtungsort, dessen geocentrische Breite φ' und dessen Radiusvector ρ ist, auf die geocentrischen Grössen α, δ, τ hat man (s. Parallaxe):

$$\Delta' \cos\delta' \cos\alpha' = \Delta \cos\delta \cos\alpha - \rho \cos\varphi' \cos\theta$$
$$\Delta' \cos\delta' \sin\alpha' = \Delta \cos\delta \sin\alpha - \rho \cos\varphi' \sin\theta$$
$$\Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta - \rho \sin\varphi'$$

wo Δ die geocentrische Entfernung des Himmelskörpers, Δ' seine Entfernung vom Erdorte aus, und θ die Sternzeit der Beobachtung ist. Hieraus erhält man durch Multiplikation der ersten beiden mit $+\sin(\theta - x)$, $+\cos(\theta - x)$ und Addition, für einen beliebigen Winkel x:

$$\Delta' \cos\delta' \sin(\tau' - x) = \Delta \cos\delta \sin(\tau - x) + \rho \cos\varphi' \sin x.$$

Aus der Formel

$$-\sin(c + f \pm h') = \sin n \sin\delta' + \cos n \cos\delta' \sin(m - \tau' - t')$$

erhält man durch Multiplikation mit Δ' und Ersetzen der scheinbaren Grössen durch die geocentrischen:

$$\Delta' \sin(c + f \pm h') =$$
$$= -\Delta \sin n \sin\delta + \Delta \cos n \cos\delta \sin(\tau + t - m) + \rho \sin\varphi' \sin n + \rho \cos\varphi' \cos n \sin m =$$
$$= -\Delta[\sin n \sin\delta - \cos n \cos\delta \sin(\tau + t - m)] + \rho(\sin n \sin\varphi' + \cos n \cos\varphi' \sin m).$$

Da aber

$$\rho \sin\varphi' = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}; \quad \rho\cos\varphi' = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

ist, wenn φ die geographische Breite, a und ε grosse Halbaxe und Excentricität des Erdsphäroïdes bedeuten, so ist:

$$\rho(\sin n \sin\varphi' + \cos n \cos\varphi' \sin m) = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\{(1-\varepsilon^2)\sin n \sin\varphi + \cos n \sin m \cos\varphi\}.$$

Aus dem Dreiecke *ZPA* (Fig. 281) folgt aber

$$\sin i = \sin n \sin\varphi + \cos n \cos\varphi \sin m,$$

daher

$$\Delta' \sin(c + f \pm h') = \Delta[-\sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin(\tau + t - m)] + a\frac{\sin i - \varepsilon^2 \sin n \sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}.$$

Dividirt man durch Δ, beachtet dass $a:\Delta = \sin\pi$ gleich dem Sinus der Aequatoreal-Horizontalparallaxe ist, und vernachlässigt das Produkt $\varepsilon^2 \sin n \sin\pi$ und das selbst beim Monde für ein mässig gut rectificirtes Instrument unmerkliche Produkt $\sin i \sin\pi$, so folgt

$$\frac{\Delta'}{\Delta} \sin(c + f \pm h') = - \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin(\tau + t - m).$$

Identificirt man die Sinus der kleinen Winkel mit den Bögen, so wird jetzt:

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(c + f \pm h') = - n \sin \delta + (\tau + t - m) \cos \delta.$$

Die Reductionen auf den Mittelfaden t_0, bezw. auf den Meridian τ_0 sind nach dem Früheren $t:(1 - \lambda)$ und $\tau:(1 - \lambda)$, und da für $f = 0$ auch $t = 0$ wird, so ist für den Mittelfaden

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(c \pm h') = - n \sin \delta + (\tau - m) \cos \delta,$$

daher die Reductionen t_0 und τ_0, wenn man noch den geocentrischen Halbmesser h, also

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta); \qquad \frac{\Delta'}{\Delta} h' = h$$

einführt, gegeben durch:

$$t_0 = \frac{f[1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta)]}{(1 - \lambda) \cos \delta}$$
$$\tau_0 = \frac{m + n \tan g \delta + c \sec \delta}{1 - \lambda} \pm \frac{h \sec \delta}{1 - \lambda}, \tag{15}$$

wobei in der letzten Formel noch das Glied $\rho \cos(\varphi' - \delta) \cdot c \sin \pi$ weggelassen wurde. Die Logarithmen der Functionen $A = \frac{1}{1 - \rho \sin \pi \cos(\varphi' - \delta)}$ und $B = (1 - \lambda)$ können für den Mond tabulirt werden, der zweite Faktor direkt mit dem Argumente $\Delta\alpha$. Hat man nur wenige Seitenfäden auf den Mittelfaden zu reduciren, so wird man die Fadenreduction nach der Formel $t_0 = f : AB \cos \delta$ rechnen; hat man jedoch eine grössere Anzahl von Fäden, und hat man eine Tafel, welche die Fadenreductionen für die verschiedenen Deklinationen giebt, so wird man die Deklination δ_1 nach der Formel $\cos \delta_1 = AB \cos \delta$ bestimmen (was immer möglich ist, da $\log A$ zwischen 0·001 und 0·007, $\log B$ aber zwischen 9·991 und 9·978 variirt) und mit der Deklination δ_1 die Fadenreduction aus der bezüglichen Tafel entnehmen.

Die nächste Aufgabe ist nun die Bestimmung der Zeit, d. h. die Bestimmung der Uhrkorrection x[1]); diese Aufgabe, die gleichzeitig mit der Bestimmung der Instrumentalfehler i, c, k gelöst wird, kann deshalb hier betrachtet werden.

Die Neigung wird durch das Niveau bestimmt, und kann als bekannt angesehen werden. Der Collimationsfehler kann durch Beobachten eines sehr entfernten terrestrischen Objectes in beiden Kreislagen rectificirt, und mittels eines Mikrometerfadens auch bestimmt werden (s. die Formeln IV und V)[2]). Aus Sternbeobachtungen erhält man ihn durch Beobachtung desselben Sternes in beiden Kreislagen. Da nämlich $c_w - c_o = 2c$ ist, so folgt aus I:

$$0 = (u_w + x_w + i_w J + k_w K) - (u_o + x_o + i_o J + k_o K) \pm 2c \sec \delta,$$

wo die mit dem Index w bezeichneten Grössen sich auf Beobachtungen von K. W. (Kreis West), die mit dem Index o bezeichneten auf K. O. (Kreis Ost) be-

[1]) Ueber die Bedeutung der Bezeichnungen »Uhrstand« oder »Uhrcorrection« und »Uhrgang«, s. den Artikel »Zeitbestimmung«.

[2]) Man kann diesen Mikrometerfaden auch zur Bestimmung der Fadendistanzen verwenden, und auf diese Art gleichzeitig den Werth einer Schraubenrevolution der Mikrometerschraube erhalten.

ziehen, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem man einen Stern in der oberen oder unteren Culmination beobachtet hat. Aehnliche Formeln folgen aus II und III. Beim Umlegen muss auch hier die möglichste Sorgfalt verwendet werden; man kann dann dabei auf eine nahe völlige Constanz des Azimuthes rechnen, wenn auch die Neigung kleinen Schwankungen ausgesetzt sein sollte; diese letzteren kann man bestimmen, während $k_w - k_o = 0$ sein wird; aus diesem Grunde ist die MAYER'sche Formel hier vorzuziehen, da eine Aenderung der Neigung selbst bei constantem k sowohl m als n beeinflussen wird.

Für diese Beobachtungen kann man aber nur Polsterne verwenden, da die Bewegung der dem Aequator näheren Sterne viel zu rasch ist, um während ihrer Durchgänge umlegen zu können. Man beobachtet daher den Durchgang eines Polsternes (z. B. α Ursae minoris zu irgend einer Tageszeit) an einer Reihe von Fäden, erhält dann durch Reduction auf den Mittelfaden die Uhrzeit u_w ebenso nach dem Umlegen (wobei aber zu beachten ist, dass der Stern jetzt dieselben Fäden wie früher, nur in umgekehrter Ordnung passirt, weil die früher östlichen Fäden nach dem Umlegen westlich vom Mittelfaden liegen) die Zeit u_o; wird diese wenn nöthig wegen des Uhrganges in der Zwischenzeit, welcher immer genähert bekannt ist, corrigirt, so wird auch $x_w = x_o$ anzunehmen sein, und dann ist

$$c = \mp \tfrac{1}{2} [(u_w + i_w J) - (u_o + i_o J)] \cos\delta. \tag{16}$$

Azimuth und Uhrstand werden dann gleichzeitig aus zwei Sternen bestimmt, für welche die Coëfficienten K möglichst verschieden sind. Man hat für

Zwei Sterne in oberer Culmination	Ein Stern in oberer, ein Stern in unterer Culmination
$\alpha - (u + i J_o + c \sec\delta) = \beta = x + kK_o$	$\alpha - (u + iJ_o + c \sec\delta) = \beta = x + kK_o$
$\alpha' - (u' + i' J_o' + c \sec\delta') = \beta' = x + kK_o'$	$\alpha' - (u' + i' J_u' - c \sec\delta') = \beta' = x + kK_u'$, (17)

wobei c an Stelle von c_w, c_o gesetzt ist, da die Rechnung für beide Kreislagen identisch wird. Man hat hier zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, aus denen sich x und k bestimmen lassen. Beobachtet man eine grössere Zahl von Sternen, so wird man x und k nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln; erstreckt sich die Beobachtung über mehrere Stunden, so wird es wegen der im Laufe eines Tages immer stattfindenden Drehung der Pfeiler zweckmässig, $k = k_0 + \varkappa t$ zu setzen, wo k_0 das Azimuth für eine gewisse Epoche und wenn t in Stunden ausgedrückt ist, $\varkappa$ die stündliche Aenderung des Azimuthes bedeutet. Ebenso wird es gut, $x = x_0 + \xi t$ zu setzen, und ξ aus diesen Beobachtungen selbst zu bestimmen, da erfahrungsgemäss der Gang der Uhr bei Tag und Nacht etwas verschieden ist; der aus Zeitbestimmungen verschiedener Tage erhaltene Gang weicht daher in der Regel von dem hier erhaltenen etwas ab, und reicht zur Reduction angeschlossener Beobachtungen meist nicht aus.

Aus den Gleichungen (17) folgt:

$$k = \frac{\beta - \beta'}{K_o - K_o'} \quad \text{bezw.} \quad k = \frac{\beta - \beta'}{K_o - K_u'}.$$

Die Sicherheit der Azimuthbestimmung wird um so grösser, je grösser der Nenner ist; denn da k einen besimmten Werth hat, so wird dann auch der Zähler grösser, d. h. der Unterschied der Zeiten bedeutender, und der Ausdruck für k immer weiter von dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$ entfernt. Es ist aber

$$K_o - K_o' = \cos\varphi\,(\tang\delta' - \tang\delta); \quad K_o - K_u' = -\cos\varphi\,(\tang\delta' + \tang\delta);$$

hieraus folgt, dass es am sichersten ist, das Azimuth aus Beobachtungen eines Polsternes in der oberen und eines darauf folgenden (oder vorangehenden) in der unteren Culmination zu bestimmen; da aber wegen der langsamen Bewegung

der Polsterne die Uhrzeiten weniger sicher werden, so wird sich dann x nicht mit der nöthigen Schärfe ergeben, und man muss noch eine Reihe von Aequatorsternen zur Bestimmung von x hinzufügen. Einige Aequatorsterne nebst einem Polstern in oberer oder unterer Culmination giebt ebenfalls x und k mit nöthiger Schärfe.

In ganz ähnlicher Weise können die Formeln II und III combinirt werden. Formel III giebt dabei gleichzeitig x und n, wenn die Correctionen wegen i und c vorher berücksichtigt werden. Die Formeln II können nur verwendet werden, wenn man sich auf die Unveränderlichkeit des Instrumentes verlassen kann[1]); sie haben übrigens den Nachtheil, dass sie nicht x allein, sondern $x + m$ geben; will man den Uhrstand, so muss man noch durch ein Nivellement i bestimmen, dann erhält man aus i und n

$$m = i \sec \varphi - n \tang \varphi$$

und damit erst x.

Beispiel. 1890 März 23 beobachtete ich am $4\frac{1}{2}$-zölligen REPSOLD'schen Meridiankreise bei K. W. die folgenden Sterne (in der ersten Columne der Name des Sternes, in der zweiten die Zahl der Fäden, in der dritten das Mittel der auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten; in den beiden folgenden Columnen die Instrumentencorrectionen $i \sec \varphi$ und $c \sec \delta$ [$c = -0^s{\cdot}1243$; $c_w = -0^s{\cdot}1382$])

27 Monocerotis . .	13	7^h	56^m	42^s·723	− 0^s·201	− 0^s·138
Br 1147 O. C. . .	15	8	8	11·462	− 0·194	− 0·575
β Cancri	11	8	13	1·284	− 0·192	− 0·140
12 Sextantis . . .	11	9	56	29·621	− 0·179	− 0·138
π Leonis	10	9	56	42·902	− 0·179	− 0·140
υ² Hydrae . . .	21	10	2	15·104	− 0·177	− 0·141
λ Hydrae	19	10	7	42·591	− 0·177	− 0·141
ι Leonis	8	11	27	10·932	− 0·161	− 0·138
ϑ Crateris	13	11	33	35·446	− 0·161	− 0·139
Llde 22585 . . .	13	11	57	35·127	− 0·151	− 0·139
ο Virginis	12	12	2	5·691	− 0·149	− 0·139
M 499	10	12	2	51·264	− 0·149	− 0·138

Ist x_1 der Uhrstand um $10^h\,30^m$ Uhrzeit, ξ der stündliche Gang, so erhält man hieraus bei Anwendung der HANSEN'schen Formel die Gleichungen

$$x_1 - 2{\cdot}555\,\xi - 1{\cdot}177\,n = -147^s{\cdot}807 \qquad x_1 - 0{\cdot}372\,\xi - 1{\cdot}327\,n = -148^s{\cdot}025$$
$$x_1 - 2{\cdot}330\,\xi + 2{\cdot}921\,n = -146{\cdot}560 \qquad x_1 + 0{\cdot}953\,\xi - 1{\cdot}160\,n = -148{\cdot}119$$
$$x_1 - 2{\cdot}283\,\xi - 0{\cdot}951\,n = -147{\cdot}732 \qquad x_1 + 1{\cdot}060\,\xi - 1{\cdot}280\,n = -148{\cdot}182$$
$$x_1 - 0{\cdot}556\,\xi - 1{\cdot}050\,n = -147{\cdot}931 \qquad x_1 + 1{\cdot}460\,\xi - 1{\cdot}290\,n = -148{\cdot}245$$
$$x_1 - 0{\cdot}555\,\xi - 0{\cdot}967\,n = -147{\cdot}889 \qquad x_1 + 1{\cdot}535\,\xi - 0{\cdot}955\,n = -148{\cdot}137$$
$$x_1 - 0{\cdot}462\,\xi - 1{\cdot}340\,n = -148{\cdot}000 \qquad x_1 + 1{\cdot}548\,\xi - 1{\cdot}162\,n = -148{\cdot}252$$

Vereinigt man hier die Sterne zu 5 Gruppen (Normalorte, s. den Artikel »Methode der kleinsten Quadrate«) und zwar 1) den Polstern für sich, 2) die ersten beiden Zeitsterne, 3) die folgenden vier, 4) die nächsten zwei, 5) die letzten drei und setzt $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_0 = -148^s{\cdot}0$, so erhält man die Gleichungen:

---

[1]) Doch kann man Veränderungen von i und k immerhin berücksichtigen (s. hierüber Publikationen der v. KUFFNER'schen Sternwarte, I. Bd., pag. 61; ebenso über den Einfluss der Seitenbiegung und Ellipticität der Zapfen auf die Zeitbestimmung.

$$\Delta x - 2{\cdot}330\,\xi + 2{\cdot}921\,n = +\,1{\cdot}440$$
$$\Delta x - 2{\cdot}419\,\xi - 1{\cdot}064\,n = +\,0{\cdot}231$$
$$\Delta x - 0{\cdot}486\,\xi - 1{\cdot}171\,n = +\,0{\cdot}039$$
$$\Delta x + 1{\cdot}006\,\xi - 1{\cdot}220\,n = -\,0{\cdot}150$$
$$\Delta x + 1{\cdot}514\,\xi - 1{\cdot}136\,n = -\,0{\cdot}212,$$

aus welchen man nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\Delta x = +\,0^s{\cdot}314$$
$$\xi = -\,0{\cdot}104$$
$$n = +\,0{\cdot}302,$$

demnach den Uhrstand x zu der Uhrzeit t

$$x = -\,147^s{\cdot}686 - 0^s{\cdot}1040(t - 10^h{\cdot}5)$$

erhält.

Bei den Meridiankreisen hat man zur Prüfung und Berichtigung des Instrumentes eigene Meridianzeichen oder Miren; als solche kann man einen weit entfernten aber in unmittelbarster Nähe des Meridians gelegenen Kirchthurm, eine vorhandene oder speciell zu diesem Zwecke errichtete Pyramide u. s. w. verwenden. Sei M_n (Fig. 281) der Punkt, in welchem die Visur von O aus gegen eine nördlich gelegene Mire den Himmel trifft, und ist Σ_1 der in dem grössten Kreise AM_n gelegene Punkt, der am Himmel durch die Visur nach dem Mittelfaden bestimmt wird, so ist für K. W. $A\Sigma_1 = 90° + c$ und wenn die Entfernung $M_n\Sigma_1 = n_w$ gesetzt wird (wobei der Index auf die Kreislage und n auf die Nordmire hindeuten soll), so wird $AM_n = 90° + c - n_w$. Bezeichnet man das von Nord gegen West positiv gezählte Azimuth der Mire mit A_n, so ist $AZM_n = 90° + k - A_n$ und man erhält aus dem Dreiecke AZM_n, wenn z_n die Zenithdistanz der Nordmire bezeichnet:

$$\sin(n_w - c) = \cos z_n \sin i + \sin z_n \cos i \sin(A_n - k).$$

i, k, c wieder als sehr klein vorausgesetzt, wird auch A_n klein sein müssen, wenn das Bild der Mire in der Nähe des Mittelfadens sein soll, und man hat daher für die

$$\text{Nordmire, K. W.:}\qquad n_w - c = i \cos z_n + (A_n - k)\sin z_n \tag{18}$$

Für K. O. wird nur $-c$ an Stelle von c treten, und es ist, wenn jetzt n_o der Abstand des Mirenbildes vom Mittelfaden ist, und das Azimuth des Instrumentes dabei als unverändert vorausgesetzt wird:

$$\text{Nordmire, K. O.:}\qquad n_o + c = i' \cos z_n + (A_n - k)\sin z_n. \tag{18'}$$

Für eine Mire im Süden ist, wenn ihr Azimuth, ebenfalls von Süden gegen West positiv gezählt, A_s ist, für K. W.: $AM_s = 90° + c - s_w$ und der Winkel am Zenith $90° - k - A_s$, demnach, wenn z_s die Zenithdistanz der Südmire ist:

$$\text{Südmire, K. W.:}\qquad s_w - c = i_1 \cos z_s + (A_s + k)\sin z_s \tag{19}$$
$$\text{Südmire, K. O.:}\qquad s_o + c = i_1' \cos z_s + (A_s + k)\sin z_s. \tag{19'}$$

Man erhält daher durch Beobachtungen derselben Mire in beiden Lagen des Fernrohres für die:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Nordmire:} & c &= \tfrac{1}{2}[(n_w - n_o) - (i - i')\cos z_n];\\
& & A_n - k &= \tfrac{1}{2}(n_w + n_o)\operatorname{cosec} z_n - \tfrac{1}{2}(i + i')\operatorname{cotang} z_n\\
&\text{Südmire:} & c &= \tfrac{1}{2}[(s_w - s_o) - (i_1 - i_1')\cos z_s];\\
& & A_s + k &= \tfrac{1}{2}(s_w + s_o)\operatorname{cosec} z_s - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_1')\operatorname{cotang} z_n.
\end{aligned}\right\}\ \text{(IV a)}$$

Sind die Miren im Horizonte des Instrumentes, d. h. ist $z_n = z_s = 90°$, so fallen die von der Neigung der Instrumentenaxe abhängigen Glieder weg, und es wird für die

$$\begin{array}{ll}\text{Nordmire:} & c = \tfrac{1}{2}(n_w - n_o); \quad A_n - k = \tfrac{1}{2}(n_w + n_o) \\ \text{Südmire:} & c = \tfrac{1}{2}(s_w - s_o); \quad A_s + k = \tfrac{1}{2}(s_w + s_o).\end{array} \qquad \text{(IV b)}$$

Die Entfernung der Miren muss, wenn das Bild derselben in der Fadenebene erscheinen soll, ausserordentlich gross sein; die Visur nach denselben streicht dann über weite Strecken des Erdbodens, und in Folge der verschiedenen Temperaturen der darüber lagernden Luft werden die Bilder der Miren in stetem Wallen begriffen, oft ganz unsichtbar sein. Man zieht es daher vor, die Miren in geringerer Entfernung, oft nur 100 bis 200 Meter weit anzubringen, wobei aber dann eine Sammellinse, deren Brennweite gleich ihrer Entfernung von der Mire in der Nähe des Fernrohres genügend fest auf isolirten Pfeilern angebracht werden muss, um die von der Mire ausgehenden Strahlen parallel zu machen. Als Mire wird dann am besten eine Platte angebracht, in welcher sich ein kreisrundes Loch befindet; bei Tage kann dieselbe direkt oder wenn nöthig durch einen hinter dieselbe gestellten Spiegel reflektirtes Licht vom hellen Himmelshintergrunde aussenden, bei Nacht durch eine hinter dieselbe gestellte Lampe erleuchtet werden. Rückt die Mire in die unmittelbarste Nähe der Collectivlinse, so dass sie mit diesem ein Fernrohr bildet, dessen Objectiv die Collectivlinse ist, und dessen Fadenkreuz die Mire darstellt, so entsteht der Collimator.

Hat man zwei Collimatoren, die durch den Würfel des Fernrohres bei abgenommenen Kappen k (Tafel I) auf einander collimirt werden können, so dass ihre optischen Axen parallel sind, so wird $A_s = -A_n$, $z_s = 180° - z_n$; $\sin z_s = \sin z_n$, $\cos z_s = -\cos z_n$ und man kann dann Azimuth und Collimationsfehler ohne Umlegen des Instrumentes durch Beobachten der beiden Collimatoren bestimmen. Man erhält aus den Gleichungen (18) und (19) bezw. (18') und (19'):

$$\begin{array}{lrl}\text{bei K. W.:} & c = & \tfrac{1}{2}(n_w + s_w) - \tfrac{1}{2}(i - i_1)\cos z_n; \\ & A_n - k = & \tfrac{1}{2}(n_w - s_w)\operatorname{cosec} z_n - \tfrac{1}{2}(i + i_1)\operatorname{cotang} z_n \\ \text{bei K. O.:} & c = & -\tfrac{1}{2}(n_o + s_o) + \tfrac{1}{2}(i' - i_1')\cos z_n; \\ & A_n - k = & \tfrac{1}{2}(n_o - s_o)\operatorname{cosec} z_n - \tfrac{1}{2}(i' + i_1')\operatorname{cotang} z_n.\end{array} \qquad \text{(V a)}$$

Da man übrigens in diesem Ealle die optische Axe der Collimatoren horizontal stellt, also $z_n = z_s = 90°$ macht, so erhält man die einfachen Formeln:

$$\begin{array}{ll}\text{bei K. W.:} & c = \tfrac{1}{2}(n_w + s_w); \quad A_n - k = \tfrac{1}{2}(n_w - s_w) \\ \text{bei K. O.:} & c = -\tfrac{1}{2}(n_o + s_o); \quad A_n - k = \tfrac{1}{2}(n_o - s_o).\end{array} \qquad \text{(V b)}$$

Die Azimuthe A_s, A_n der beiden Miren können, wenn k durch Beobachtungen von Polsternen ermittelt wurde, aus diesen Formeln bestimmt werden[1]), und dann kann k ohne Beobachtungen von Polsternen aus Beobachtungen einer der beiden Miren gefunden werden.

Nothwendig sind noch einige Bemerkungen über das Zeichen der Abstände n_w, n_o, s_w, s_o; dieselben sind nach der Annahme positiv, wenn die durch die Richtungen nach der Mire am Himmel bestimmten Punkte dem westlichen Axenende näher liegen, als die durch den Mittelfaden bestimmte Collimationslinie. Hieraus erhält man für positive Werthe von n, s: im geraden Fernrohr erscheint bei K. W. der Faden, bei K. O. das Bild der Mire auf der Seite des Kreisendes; im gebrochenen Fernrohr (für das Passageninstrument), wenn das Ocular am Kreisende der Axe angebracht ist, bei K. W. das Bild der Mire, bei K. O. der Faden auf der Seite des Objectivstutzens. Man hat nun zu unterscheiden, ob die Lesungen an der Trommel zu- oder abnehmen, wenn der beweg-

---

[1]) Das Zeichen von A_n, A_s bestimmt dann die Lage; für westlich vom Meridian gelegene Miren ergeben sich die Zeichen positiv.

liche Faden sich vom Kreisende wegbewegt, bezw. in der Richtung vom Objectiv gegen den Würfel zu bewegt. Sind die Lesungen auf den Mittelfaden F, auf die beiden Miren bei den verschiedenen Lagen des Instrumentes M_n^w, M_n^o, M_s^w, M_s^o, und R der Werth einer Schraubenrevolution, so findet man ohne Schwierigkeit:

I. Für das gerade Fernrohr:	1) die Lesungen wachsen	2) die Lesungen nehmen ab	
	bei der Bewegung des Mikrometerfadens, vom Kreisende weg		
a) K. W. Nordmire:	$n_w = R(M_n^w - F)$ (+)	$n_w = R(F - M_n^w)$ (—)	
b) K. W. Südmire:	$s_w = R(M_s^w - F)$ (—)	$s_w = R(F - M_s^w)$ (+)	(20)
c) K. O. Nordmire:	$n_o = R(F - M_n^o)$ (—)	$n_o = R(M_n^o - F)$ (+)	
d) K. O. Südmire:	$s_o = R(F - M_s^o)$ (+)	$s_o = R(M_s^o - F)$ (—)	
II. Für d. gebroch. Fernrohr:	1) die Lesungen nehmen ab	2) die Lesungen wachsen	
	bei d. Bewegung d. Mikrometerfadens vom Objectiv gegen d. Würfel		

(+) die Lesungen wachsen } bei der Bewegung des Fadens von links
(—) die Lesungen nehmen ab } nach rechts.

Die Formeln, welche zur Bestimmung des Uhrstandes abgeleitet wurden, können sofort auch verwendet werden, um, wenn dieser bekannt ist, die Rectascensionen von beobachteten Gestirnen zu bestimmen. Man kann daher, indem die Durchgänge einer grossen Zahl von Sternen beobachtet werden, eine Reihe derselben, die Fundamental- oder Anhaltsterne zur Bestimmung des Uhrstandes und der Instrumentencorrectionen verwenden, und mit diesen dann die Rectascensionen der übrigen Sterne ermitteln. In dieser Form sind die Beobachtungen strenge genommen relative Bestimmungen oder Differentialbeobachtungen durch Anschluss an ein festes System, wofür gegenwärtig das fast aus der ganzen Menge des vorhandenen Materiales abgeleitete »mittlere System« von AUWERS als Grundlage angesehen werden kann.

Um aber auch eine absolute Rectascension zu bestimmen, müssen Sonnenbeobachtungen gemacht werden, wovon später gesprochen wird, und nebst den Durchgangszeiten der Sonne die Durchgangszeiten von einer Reihe von sogen. Fundamentalsternen. Die Zahl der Sternwarten, die sich mit derartigen Beobachtungen beschäftigt, ist nicht gar gross: Nebst den besprochenen, leicht in Rechnung zu ziehenden Instrumentalfehlern treten nämlich vorhandene, bisher uncontrollirbare Instrumentalfehler auf, die sich bis jetzt nur in systematischen Abweichungen der Resultate der Beobachtungen verschiedener Sternwarten (der Sternkataloge; dasselbe gilt natürlich für die Deklinationen) zeigen. Daraus folgt die Nothwendigkeit der Vervielfältigung dieser Beobachtungen; da sie aber an die Combination von Beobachtungen der Sonne und einer Reihe von Fixsternen gebunden sind, so sind die Bedingungen für die Anstellung derselben ausserordentliche Stabilität des Instrumentes, welche nur bei möglichster Entfernung der Sternwarte vom städtischen Verkehre zu erreichen ist, und hinreichende Lichtstärke des Fernrohres, damit die zu bestimmenden Fixsterne möglichst durch das ganze Jahr, auch in der Nähe der Sonne beobachtet werden können.

Die Aufgaben, welche mit dem Kreise zu lösen sind, sind wieder zweierlei: 1) absolute, und 2) relative Bestimmungen. Zu den ersteren gehören: die Bestimmung der Polhöhe, der absoluten Deklinationen von Fundamentalsternen und der Sonne (und mit Hilfe derselben der Lage des Frühlingspunktes und der Schiefe der Ekliptik); relative Bestimmungen sind die Bestimmungen der

Deklinationen von Fixsternen durch Anschluss an das gegebene Fundamentalsystem.

Auch hier kann man die Reductionsmethoden aus wenigen Fundamentalformeln ableiten.

Setzt man voraus, dass die Lesungen am Kreise von 0° bis 360° wachsen, so wird dieses in der einen Kreislage (K. I.), für welche die Lesungen mit dem Index 1 versehen werden sollen, vom Zenith gegen den Süden zu, in der anderen Kreislage (K. II, d. i. K. O., bezw. K. W., wenn die Kreislage I K. W., bezw. K. O. bedeutet), für welche der Index 2 verwendet werden soll, vom Zenith gegen Norden stattfinden. Für die Bestimmung der Zenithdistanz aus der Lesung L bedarf man aber noch der Kenntniss des Zenithpunktes Z und dann ist:

$$\begin{array}{lll} \text{für K. I;} & {}^{*}\text{Süd: } z = L_1{}^s - Z_1; & {}^{*}\text{Nord: } z = Z_1 - L_1{}^n \\ \text{für K. II;} & {}^{*}\text{Süd: } z = Z_2 - L_2{}^s; & {}^{*}\text{Nord: } z = L_2{}^n - Z_2. \end{array} \qquad (21)$$

Ist die Lesung für das Zenith nahe 0, so werden die Lesungen $L_1{}^s$, $L_2{}^n$ zwischen 0 und 90° (± geringen, von der Abweichung des Zenithpunktes herrührenden Beträgen) sein, und die Lesungen $L_1{}^n$, $L_2{}^s$ zwischen 270° und 360°. Die Lesungen müssen selbstverständlich wegen Run (s. den Artikel »Nonius und Ablesemikroskop«) und wegen Excentricitäts- und Theilungsfehler (s. diese) corrigirt sein, während allerdings die Excentricitäts- und die periodischen Theilungsfehler, sofern die zufälligen Theilungsfehler nicht ermittelt sind, sich aus dem Mittel von zwei, bezw. vier Mikroskopen, wenigstens in den Hauptgliedern wegheben.

Mit diesen Zenithdistanzen (welche daher bereits eine, wenigstens genäherte Berücksichtigung des Zenithpunktes erfordern), berechnet man die Refraction und Biegung; sind diese r, bezw. $f(z)$, so ist die corrigirte Zenithdistanz

$$z_0 = z + r + f(z). \qquad (22)$$

Ist δ die Deklination des beobachteten Objectes, φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, so hat man für

$$\begin{array}{lll} \text{Obere Culmination:} & {}^{*}\text{Süd: } \varphi = z_0 + \delta; & {}^{*}\text{Nord: } \varphi = \delta - z_0. \\ \text{Untere Culmination:} & \varphi = 180° - (\delta + z_0). & \end{array} \qquad (23)$$

Hierzu treten nun noch Reflexionsbeobachtungen. Man bestimmt selbstverständlich nicht den Zenithpunkt, sondern den Nadirpunkt, indem man das Fernrohr auf eine vertical unter den Würfel gestellte, horizontale Fläche richtet. Hierzu wird am besten eine Quecksilberoberfläche verwendet. Um dieselbe möglichst ruhig zu erhalten, verwendet man den sogen. angequickten Horizont. Eine flache Kupferschale wird mit einigen Tropfen Salpetersäure befeuchtet, und mit Baumwolle gut abgerieben, und dann Quecksilber aufgegossen, welches eine ruhige, horizontale, spiegelnde Oberfläche bildet. Selbstverständlich muss die Schale auf den isolirten Pfeilern, nicht aber auf dem Fussboden angebracht werden, wozu der Fussboden zwischen den beiden Pfeilern eine hinreichend grosse, durch einen Deckel verschliessbare Oeffnung erhält. Besser bewährt sich noch die Schale auf ein Brett zu setzen, welches auf Bolzen, die in die Pfeiler des Meridiankreises eingegypst sind, unmittelbar unter das nach unten gerichtete Objectiv gelegt wird. Man wird nun leicht über dem Fussboden, am besten durch Schienen zwischen den beiden isolirten Pfeilern, welche die Collimatoren tragen, eine vom Fussboden isolirte Bahn schaffen können, auf welcher ein Quecksilberhorizont in der Richtung von Nord nach Süd geführt werden kann. Wenn dieser dann in der Entfernung $h\ tang\ z$ (wo h der verticale Abstand der spiegelnden Fläche unter dem Würfel ist) vom

Instrumentenmittelpunkte aufgestellt ist, und das Fernrohr auf denselben nach abwärts gerichtet wird, so wird das von dem Horizonte gespiegelte Bild eines Sternes der Zenithdistanz z im Fernrohr erscheinen[1]. Für das reflectirte Bild aber tritt an Stelle des Zenithpunktes der Nadirpunkt und man hat dann, wenn man die Lesungen mit Λ bezeichnet, die also jetzt zwischen 90° und 270° (± geringen Abweichungen) gelegen sind:

$$\begin{array}{llll} \text{für K. I:} & {}^*\text{Süd: } z = N_1 - \Lambda_1^s; & {}^*\text{Nord: } z = \Lambda_1^n - N_1; & N_1 = 180° + Z_1 \\ \text{für K. II:} & {}^*\text{Süd: } z = \Lambda_2^s - N_2; & {}^*\text{Nord: } z = N_2 - \Lambda_2^n; & N_2 = 180° + Z_2. \end{array} \quad (21\text{a})$$

Die Refraction bleibt für das Gestirn natürlich dieselbe, während das von der Biegung abhängige Glied in $f(180° - z)$ übergeht. Führt man die Formeln (23) in (21) und (21a) ein, und zieht die Refraction und Biegung mit der Lesung zusammen, so dass also

$$\begin{array}{ll} L_1^s + r + f(z) = l_1^s & \Lambda_1^s - r - f(180° - z) = \lambda_1^s \\ L_1^n - r - f(z) = l_1^n & \Lambda_1^n + r + f(180° - z) = \lambda_1^n \\ L_2^s - r - f(z) = l_2^s & \Lambda_2^s + r + f(180° - z) = \lambda_2^s \\ L_2^n + r + f(z) = l_2^n & \Lambda_2^n - r - f(180° - z) = \lambda_2^n, \end{array} \quad (24)$$

so folgt:

$$\begin{array}{llll} & & \text{direktes Bild:} & \text{reflectirtes Bild:} \\ \text{K. I:} & {}^*\text{Süd:} & \varphi = l_1^s - Z_1 + \delta & \varphi = 180° + Z_1 - \lambda_1^s + \delta \\ & {}^*\text{Nord O. C.:} & \varphi = l_1^n - Z_1 + \delta & \varphi = 180° + Z_1 - \lambda_1^n + \delta \\ & {}^*\text{Nord U. C.:} & \varphi = 180° + l_1^n - Z_1 - \delta & \varphi = Z_1 - \lambda_1^n - \delta \\ \text{K. II:} & {}^*\text{Süd:} & \varphi = Z_2 - l_2^s + \delta & \varphi = 180° + \lambda_2^s - Z_2 + \delta \\ & {}^*\text{Nord O. C.:} & \varphi = Z_2 - l_2^n + \delta & \varphi = 180° + \lambda_2^n - Z_2 + \delta \\ & {}^*\text{Nord U. C.:} & \varphi = 180° + Z_2 - l_2^n - \delta & \varphi = \lambda_2^n - Z_2 - \delta. \end{array} \quad (25)$$

Der Einfluss der Biegung wird hier nicht weiter berücksichtigt: er ist ausführlich in dem Artikel »Biegung« (s. I. Bd., pag. 576) behandelt; es wurde daher auch auf die Vertauschung von Ocular und Objectiv, nicht weiter Rücksicht genommen. Die Refraction kann direkt berechnet, und mit der Lesung vereinigt werden; hierzu bedarf man nicht einmal der Formeln (24); man sieht, dass die Refractionen zu den Lesungen im ersten und dritten Quadranten zu addiren, von den Lesungen im zweiten und vierten Quadranten zu subtrahiren sind, womit man sofort auf die Grundgleichungen (25) kommt.

Für absolute Bestimmungen ist nun das Folgende zu erwähnen: Jede einzelne Beobachtung giebt, wenn der Zenithpunkt bekannt ist, eine der beiden Grössen φ oder δ, wenn die andere bekannt ist. Die Combination zweier Gleichungen, für welche δ in den entsprechenden Gleichungen das entgegengesetzte Zeichen hat, gestattet die Bestimmung von φ und δ. Man kann hierzu die Beobachtungen von Circumpolarsternen in der oberen und unteren Culmination, am bequemsten in derselben Kreislage, heranziehen. Verwendet man Beobachtungen von direkten und reflectirten Bildern, so fällt dabei das Zenith heraus. Man erhält z. B. für unmittelbar aufeinander folgende Beobachtungen im direkten und reflectirten Bilde eines nicht allzu weit vom Pole entfernten Sternes, z. B. in Kreislage I (wobei der Index n als selbstverständlich weggelassen ist):

---

[1]) Für verschiedene Zenithdistanzen kann man hiernach leicht den Ort des Horizontes auf der Schienenbahn anzeigen.

$$\text{für O. C.:} \quad \varphi = \tfrac{1}{2}(l_1 - \lambda_1) + \delta - 90^\circ$$
$$\text{für U. C.:} \quad \varphi = \tfrac{1}{2}(l_1' - \lambda_1') - \delta + 90^\circ$$

und daraus:

$$\varphi = \tfrac{1}{4}[(l_1 - \lambda_1) + (l_1' - \lambda_1')]$$
$$\delta = 90^\circ - \tfrac{1}{4}[(l_1 - \lambda_1) - (l_1' - \lambda_1')].$$

Kennt man die Polhöhe, so giebt jede beobachtete Zenithdistanz im Verein mit dem Zenithpunkt die Deklination; für Sterne, die südlich vom Zenith culminiren, hat man, wenn man direkt und reflectirt beobachtet:

$$\begin{aligned} \text{K. I:} \quad & \varphi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - l_1) + \delta \\ \text{K. II:} \quad & \varphi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(l_2 - \lambda_2) + \delta. \end{aligned} \tag{26}$$

Diese Beobachtungen werden besonders wichtig für Deklinationsbestimmungen der Sonne, aus welchen man absolute Rectascensionen, sowie auch die Schiefe der Ekliptik erhalten kann. Ist nämlich A die Rectascension, D die Deklination der Sonne, ε die Schiefe der Ekliptik, so ist:

$$\sin A \operatorname{tang} \varepsilon = \operatorname{tang} D.$$

In der Nähe der Solstitien, wo A nahe 90° und D nahe seinem Maximum ist, werden sich sowohl $\sin A$, als auch $\operatorname{tang} D$ nur wenig ändern; es wird daher A nicht aus D bestimmt werden können, wohl aber $\operatorname{tang} \varepsilon$. In der Nähe der Aequinoctien hingegen ändern sich A und D ziemlich rasch, und man wird daher aus der Beobachtung der Deklination der Sonne ihre Rectascensionen erhalten, wenn ε bekannt ist, und durch Anschluss von Fundamentalsternen deren Rectascensionen. Man erhält übrigens aus genäherten Werthen von ε, A und D, wenn man

$$A = A_0 + \Delta A, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon, \quad D = D_0 + \Delta D$$

setzt, wobei die Correction ΔA ebenso wie $\Delta\varepsilon$ als constant angesehen werden kann, da sie die constante Correction des Frühlingsäquinoctiums darstellt, und die Incremente als genügend klein vorausgesetzt werden können, um die Aenderungen als differentiell anzusehen:

$$\cos A \operatorname{tang} \varepsilon \Delta A + \sin A \sec^2 \varepsilon \Delta\varepsilon - \sec^2 D \Delta D = \operatorname{tang} D_0 - \sin A_0 \operatorname{tang} \varepsilon_0. \tag{27}$$

Der Coëfficient von ΔA wird am grössten für $A = 0$, und verschwindet für $A = 90^\circ$, woraus wieder folgt, dass die Rectascensionen sich aus Beobachtungen von Sonnendeklinationen in den Solstitien nicht bestimmen lassen; ebenso folgt, dass für $A = 0$, also in den Aequinoctien sich $\Delta\varepsilon$ nicht bestimmen lässt. Beobachtungen in der Nähe der Solstitien geben Gleichungen von der Form

$$(a_1)\Delta A + b_1 \Delta\varepsilon + c_1 \Delta D = m_1; \tag{28a}$$

Beobachtungen in der Nähe der Aequinoctien Gleichungen der Form:

$$a_2 \Delta A + (b_2)\Delta\varepsilon + c_2 \Delta D = m_2, \tag{28b}$$

wobei die Coëfficienten (a_1), (b_2) sehr nahe Null sind. Gerade zu den Zeiten aber, in denen die Bestimmung der Unbekannten am sichersten ist, wird natürlich auch ein Fehler ΔD den grössten Einfluss üben. Man muss daher auf eine möglichst sorgfältige Bestimmung der Zenithdistanzen sehen. Zufällige Fehler in den Lesungen (jede Beobachtung setzt sich aus zwei Lesungen zusammen, entweder direkte Beobachtung und Nadirbestimmung oder direkte und reflectirte Beobachtung) können durch Vermehrung der Beobachtungen möglichst unschädlich gemacht werden. Ein stets constant bleibender Fehler aber entsteht, wenn die Polhöhe nicht genügend genau bekannt ist. Nach Gleichung (26) ist nämlich

$$\Delta D = \Delta\varphi,$$

und da die Coëfficienten c_1 und c_2 gleich $sec^2 D$ sind, so wird dieser Fehler der Polhöhe stets etwas vergrössert auftreten. Diese Coëfficienten variiren im Laufe eines Jahres zwischen 1·000 und 1·188, sind also nur geringen Veränderungen unterworfen; aus Beobachtungen in der unmittelbarsten Nähe der Solstitien zur Bestimmung von $\Delta\varepsilon$ und ebenso aus Beobachtungen in der unmittelbarsten Nähe der Aequinoctien zur Bestimmung von ΔA lässt sich daher $\Delta\varphi$ nicht bestimmen, wohl aber fällt dieser constante Fehler weg, wenn man die Beobachtungen auf beide Aequinoctien, bezw. Solstitien vertheilt; denn man hat·

für das Sommersolstitium: $\eta\Delta A + (1 - \eta') sec^2 \varepsilon\Delta\varepsilon - (1 + \eta'')\Delta\varphi = m_1$
für das Wintersolstitium: $\eta_1 \Delta A - (1 - \eta_1') sec^2 \varepsilon\Delta\varepsilon - (1 + \eta_1'')\Delta\varphi = m_1'$
für das Frühlingsäquinoctium: $(1 - \psi)\, tang\, \varepsilon\Delta A + \psi'\Delta\varepsilon - (1 + \psi'')\Delta\varphi = n_1$
für das Herbstäquinoctium: $-(1 - \psi_1)\, tang\, \varepsilon\Delta A + \psi_1'\Delta\varepsilon - (1 + \psi_1'')\Delta\varphi = n_1'$,

wobei die η, η' . . . ψ, ψ' kleine, für die Epochen selbst verschwindende Grössen sind. Will man $\Delta\varphi$ nicht bestimmen, so genügt es, die Beobachtungen symmetrisch zu beiden Seiten anzuordnen, also z. B. ebenso lange vor dem Frühlingsäquinoctium, wie nach dem Herbstäquinoctium u. s. w. zu beobachten, weil dann die Coëfficienten b_1, bezw. a_2 für A_2 nahe $= 180° - A_1$ wenigstens sehr nahe gleiche, aber entgegengesetzte Werthe erhalten. Aus Beobachtungen, die sich über einen langen Zeitraum gleichmässig vertheilen, kann man aber sowohl ΔA und $\Delta\varepsilon$, als auch $\Delta\varphi$ bestimmen, wobei aber zu bemerken ist, dass man die Secularänderung der Schiefe ebenso wie die Präcession und Nutation[1]) bei der Berechnung der rechten Seiten sofort berücksichtigen muss, wenn die drei zu bestimmenden Correctionen während des ganzen Zeitraumes der Beobachtungen als constant angesehen werden sollen.

Für relative Bestimmungen kürzt man die Rechnung etwas ab, wenn man die constante Lesung für das Zenith mit der Polhöhe verbindet, und so eine wegen Zenithpunkt corrigirte Polhöhe, den sogen. Polpunkt oder Aequatorpunkt ableitet. Schreibt man nämlich die Formeln für Beobachtungen im direkten Bilde (relative Deklinationsbestimmungen wird man wohl nie im reflectirten Bilde vornehmen):

$$\text{K. I:} \quad {*}\,\text{Süd:} \quad \delta = l_1^s - (\varphi + Z_1) = l_1^s - \varphi_0$$

u. s. w., so sieht man, dass man die Deklination erhalten kann, wenn man zu den Lesungen die wegen Zenithpunkt corrigirte Polhöhe φ_0 verwendet. Diese selbst leitet sich aber aus dem System der Fundamentalsterne mittels der ganz gleichen Formeln

$$\varphi + Z_1 = \varphi_0 = l_1^s - \delta$$

u. s. w. ab.

Die Gleichungen (25) gelten für die wahren Zenithdistanzen und die wahren Deklinationen oder aber für die abgelesenen Zenithdistanzen, und die daraus folgenden Deklinationen. Wird aber das Gestirn nicht am Mittelfaden eingestellt, so kann die abgelesene Zenithdistanz fehlerhaft sein, und zwar sowohl aus dem Grunde, weil der Horizontalfaden einen grössten Kreis am Himmel darstellt, während die Gestirne kleine Kreise (Parallelkreise) beschreiben, die den Horizontalfaden im Meridian berühren; ferner aber auch, weil der Horizontalfaden mit dem Meridian einen von 90° verschiedenen Winkel einschliessen kann. Sei in Fig. 281 $\sigma\sigma'$ ein Seitenfaden im östlichen Abstande f; am Horizontal-

---

[1]) Ueber die Bestimmung der Constanten der Präcession und Nutation s. die betr. Artikel.

faden $\Sigma\sigma$, der mit dem Deklinationskreise ΣP den Winkel $90° + J$ einschliesst, wird ein Stern σ beobachtet. Fällt der durch Σ und A gelegte grösste Kreis mit AP zusammen, so wird am Kreuzungspunkte Σ des Mittelfadens und Horizontalfadens ein Punkt P' erscheinen, für welchen $AP' = 90° + c$, demnach $PP' = c + n$ ist. Am Kreise macht man die dem Pole P entsprechende Lesung, und der Einstellung auf den Stern Σ entspricht eine Drehung von AP um den Winkel $PA\Sigma = 90° - \delta'$, wobei δ' die durch die Lesung am Kreise erhaltene Deklination des Sternes ist; die wahre Deklination δ folgt aus $P\Sigma = 90° - \delta$. Nun hat man aus dem Dreiecke PZA mit den aus der Figur folgenden Bezeichnungen

$$\sin\varphi = \sin n \sin i + \cos n \cos i \sin\varphi'$$

und daraus

$$\varphi' - \varphi = 2 \operatorname{tang}\varphi\,(\sin^2 \tfrac{1}{2} n + \sin^2 \tfrac{1}{2} i) - 4 \sec\varphi \sin \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2} n.$$

Dieser Unterschied wird demnach, da die Instrumentalcorrectionen sehr klein sind, und von den Faktoren keiner besonders gross werden kann, gleich Null, und da $ZA\sigma$ gleich der abgelesenen Zenithdistanz z ist, so wird in der Gleichung $\varphi' - \delta' = z$ oder wegen $\varphi = \varphi'$ auch in der Gleichung

$$\varphi - \delta' = z$$

δ' die aus z, d. i. aus Z_1, Z_2 und L_1, L_2 abgeleitete Deklination sein, und man hat aus δ' den Werth von δ zu bestimmen. Setzt man $\Sigma\sigma = y$, $\sigma A\Sigma = w$, so wird:

$$-\sin(c + f) = -\sin c \cos y - \cos c \sin y \cos J \qquad (29)$$
$$\sin w = \sin y \frac{\sin J}{\cos(c + f)}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\sin(c + f) = \sin(c + y) - 2 \cos c \sin y \sin^2 \tfrac{1}{2} J,$$

daher

$$\sin \tfrac{1}{2}(y - f) = -\operatorname{tang} f \sin^2 \tfrac{1}{2} J.$$

Es ist daher y sehr nahe gleich f, und man kann in der Gleichung für $\sin(c + f)$ rechts $\cos y$ durch $\cos f$ ersetzen; dann wird, wenn links $\sin(c + f)$ aufgelöst wird:

$$\sin f = \sin y \cos J,$$

folglich, wenn in der zweiten Gleichung $\cos(c + f)$ durch $\cos f$ ersetzt wird,

$$\sin w = \operatorname{tang} f \operatorname{tang} J \text{ oder } w = f \operatorname{tang} J. \qquad (30)$$

Aus dem Dreiecke $AP\sigma$ folgt

$$\sin\delta = -\sin n \sin(c + f) + \cos n \cos(c + f) \sin(\delta' - w)$$
$$\cos\delta \sin(\tau + t - m) = +\cos n \sin(c + f) + \sin n \cos(c + f) \sin(\delta' - w)$$
$$\cos\delta \cos(\tau + t - m) = \cos(c + f) \cos(\delta' - w)$$

oder, wenn $\sin n = 0$, $\cos n = 1$ gesetzt wird:

$$\sin\delta = \cos(c + f) \sin(\delta' - w)$$
$$\cos\delta \cos(\tau + t - m) = \cos(c + f) \cos(\delta' - w),$$

demnach, wenn die erste Gleichung mit $-\cos(\delta' - w)$, die zweite mit $+\sin(\delta' - w)$ multiplicirt und die Produkte addirt werden:

$$\sin(\delta' - w - \delta) = \sin(\delta' - w) \cos(\delta' - w) \cos(c + f) \sec(t + \tau - m)[1 - \cos(t + \tau - m)]$$
$$= \sin 2(\delta' - w) \cos(c + f) \sec(t + \tau - m) \sin^2 \tfrac{1}{2}(t + \tau - m)$$

oder da $\cos(c + f) = 1$ gesetzt werden kann, und rechts w gegenüber δ' vernachlässigt, links der Winkel mit dem Bogen vertauscht werden darf:

$$\delta = \delta' - \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}(t + \tau - m)}{\operatorname{arc} 1''} \sec(t + \tau - m) \cdot \tfrac{1}{2} \sin 2\delta' - f \operatorname{tang} J. \qquad (31)$$

Für Sterne mit Deklinationen unter etwa 75°, wird man hierfür

$$\delta = \delta' - \frac{\frac{1}{4}\sin(t+\tau-m)^2}{arc\,1''}\sin 2\delta' - f\,tang\,J = \delta' - \frac{\frac{1}{2}\sin^2(c+f)}{arc\,1''}\,tang\,\delta' - f\,tang\,J \quad (31\,a)$$

setzen können, wobei c gegenüber f auch noch vernachlässigt werden darf.

Diese Gleichung gilt für Beobachtungen bei K. W., O. C. Legt man das Fernrohr um, und schlägt es wieder auf die Südseite, so wird der Horizontalfaden wieder die Richtung $\Sigma\sigma$ haben; die Ordnung der Fäden hat sich aber umgekehrt, und in die Reduction τ tritt nun $-c$ an Stelle von $+c$; nimmt man aber t und τ positiv, wenn die Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden und von diesem auf den Meridian positiv sind, so bleibt die Correction wieder dieselbe und Formel (31) auch für K. O. giltig. Man sieht aber sofort, dass diese auch für untere Culminationen gilt, wenn nur τ, t und f in demselben Sinne positiv gezählt werden.

Um die Deklinationen bezw. den Aequatorpunkt direkt aus den Lesungen zu erhalten, kann $\delta' = \delta + C$, wo, wenn f in Zeitsecunden ausgedrückt wird

$$\begin{aligned} C &= + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}(t+\tau-m)}{arc\,1''}\,\tfrac{1}{2}\sin 2\delta' + f\,tang\,J \\ &= + \tfrac{225}{2}\,arc\,1''\cdot f^2\,tang\,\delta' + f\,tang\,J; \qquad \log \tfrac{225}{2}\,arc\,1'' = 6{\cdot}7367-10. \end{aligned} \quad (32)$$

in die Gleichungen (25) substituirt werden; dann sieht man, dass an Stelle von l_1, l_2, λ_1, λ_2 die wegen Einstellung am Seitenfaden corrigirten Lesungen treten:

		im direkten Bilde	im reflectirten Bilde	
bei K. I:	O. C.	$l_1 + C$	$\lambda_1 - C$	(33)
	U. C.	$l_1 - C$	$\lambda_1 + C$	
bei K. II:	O. C.	$l_2 - C$	$\lambda_2 + C$	
	U. C.	$l_2 + C$	$\lambda_2 - C.$	

Da in den Gleichungen (25) für zwei unmittelbar aufeinander folgende Einstellungen desselben Sternes an verschiedenen Stellen des Horizontalfadens Z_1, Z_2, δ, r und die Biegung dieselben Werthe haben, so wird $l \pm C$, wenn l wegen Run corrigirt ist, constant sein müssen; bringt man auch die Correction $\frac{225}{2}\,arc\,1''\,f^2\,tang\,\delta'$ direkt an die Lesung an, so hat man für jede Einstellung eine Gleichung:

$$l + f\,tang\,J = a.$$

und für eine Reihe von weiteren Einstellungen an anderen Punkten des Horizontalfadens

$$\begin{aligned} l_1 + f_1\,tang\,J &= a \\ l_2 + f_2\,tang\,J &= a \end{aligned}$$

aus denen man die Werthe von $tang\,J$ bestimmen kann. Am besten eignen sich hierzu wegen ihres langsamen Ganges Polsterne, weil man an denselben eine Reihe von Einstellungen machen kann.

Befindet sich nebst dem festen Fadennetz auch noch ein beweglicher Horizontalfaden in dem Fernrohre, und wird der Stern an diesem eingestellt, so bedarf die am Kreise gemachte Lesung noch einer Correction. Sei die Lesung an der Schraube für die Coincidenz des festen und beweglichen Horizontalfadens F_0, und die Bezifferung der Schraube so, dass wachsende Lesungen an der Schraube auch wachsenden Lesungen am Kreise entsprechen, d. h. dass die Einstellungen eines Punktes am Himmel auf den beweglichen Faden eine kleinere Lesung am Kreise ergeben würden, wenn die Lesung F an der Schraube

grösser ist als F_0, so ist in allen Fällen (K. I und II, Stern Nord und Süd) zur Kreislesung die Correction

$$\left.\begin{array}{ll}\text{im direkten Bilde:} & +(F-F_0)R \\ \text{im reflectirten Bilde:} & -(F-F_0)R\end{array}\right\} \text{zu addiren.} \qquad (34\,\text{a})$$

Entspricht hingegen der Einstellung eines Punktes am Himmel auf den beweglichen Faden eine grössere Lesung am Kreise, wenn F grösser als F_0 ist so sind die Correctionen

$$\left.\begin{array}{ll}\text{im direkten Bilde:} & -(F-F_0)R \\ \text{im reflectirten Bilde:} & +(F-F_0)R\end{array}\right\} \text{zu addiren.} \qquad (34\,\text{b})$$

Durch eine einmalige Einstellung des festen und beweglichen Fadens auf einen Horizontalfaden des Collimators kann man übrigens den Sinn der Correction ein- für allemal feststellen.

Den Werth der Schraubenrevolution R kann man auf einfache Art erhalten. Sind mehrere feste oder mehrere bewegliche Fäden vorhanden, so kann man das Intervall derselben durch Einstellung eines jeden auf einen festen Punkt, z. B. auf einen Collimatorfaden und Ablesen des Kreises, und auch mittels der Schraube messen; ebenso können Distanzen von Fäden im Collimator, sowie auch die Deklinationsdifferenz von Sternen am Kreise und mit der Schraube bestimmt, zur Bestimmung der Schraubenrevolution dienen.

Man kann die Collimatoren auch dazu verwenden, den Nullpunkt des Kreises zu bestimmen; d. h. man ermittelt statt des Nadirpunktes die Lesung im Horizonte und verwendet diese zur Reduction (vergl. auch den Artikel »Biegung«). Da jedoch hierzu die Collimatoren genau horizontal stehen müssen, bezw. die Abweichung durch eine Libelle bestimmt werden muss, während die Horizontalstellung des Quecksilberhorizontes sich von selbst regulirt, so ist wohl die Nadirpunktsbestimmung vorzuziehen.

Hierzu wird das Fernrohr vertical, mit dem Objectiv nach unten gestellt, so dass man von dem Quecksilberhorizont ein Spiegelbild der Fäden erhält; zu diesem Zwecke aber muss Licht vom Ocular aus auf den Horizont geworfen werden; dazu setzt man auf das Ocular ein gegen den Horizont um nahe 45° geneigtes[1]) Glasplättchen, durch welches hindurch man ungehindert ins Ocular sehen kann, welches aber auch Licht von einer seitlich gehaltenen Lampe (bezw. durch die Spiegel y, y', Tafel I) parallel zur Fernrohraxe nach abwärts wirft. Die Fäden erscheinen dabei stets dunkel auf hellem Grunde, weil das gespiegelte Bild dadurch entsteht, dass sich die aufgezogenen Fäden hindernd in das, durch die Fernrohraxe geworfene Strahlenbündel einschieben.

Selbstverständlich erscheinen in diesem Falle auch die Spiegelbilder der Verticalfäden, und man kann diese zur Bestimmung des Collimationsfehlers benutzen. Zur Ableitung der Formeln kann man die Vertikale als eine entfernte Mire in der Zenithdistanz $z_n = z_s = 180°$ betrachten, wofür die Formeln (18) und (19) für Nord- und Südmire (wegen des Wegfallens von k) identisch werden. Ist dann die Entfernung des Mittelfadens von der Verticalen $\frac{1}{2}l_w$ bei K. W. und $\frac{1}{2}l_o$ bei K. O., so erhält man aus diesen Formeln sofort

$$c - i = \tfrac{1}{2}l_w; \quad c + i' = -\tfrac{1}{2}l_o, \qquad (35)$$

von denen jede einzelne für sich den Werth von c giebt, wenn mit dem Niveau die wahren, wegen Zapfenungleichheit corrigirten Neigungen i, i' bestimmt sind.

---

[1]) Dasselbe wird so gedreht, dass man die möglichst günstige Beleuchtung erhält.

Man kann aber hierbei nicht die Verticallinie selbst beobachten, sondern das reflectirte Bild der Fäden, welches indessen, da es auf derselben Seite des Mittelfadens liegt, wie der Punkt, in welchem die Verticale die Fadenebene schneidet, das Zeichen von l_w, l_o nicht ändert. Nur erhält man durch Messung der Distanz des Mittelfadens (Lesung F) von seinem Bilde (Lesung F_w, bezw. F_o) nicht $\frac{1}{2}l_w$, $\frac{1}{2}l_o$, sondern sofort das doppelte dieser Distanzen l_w, l_o. Man hat daher, wenn man das Schema (20) für das gerade Fernrohr hierher überträgt, wenn die Lesungen an der Schraube bei der Bewegung des Mikrometerfadens vom Kreisende weg

	1) wachsen	2) abnehmen	
bei K. W.:	$l_w = (F_w - F)R$	$l_w = (F - F_w)R$	(36)
bei K. O.:	$l_o = (F - F_o)R$	$l_o = (F_o - F)R.$	

Die Messung geschieht dabei so, dass man den beweglichen Faden erst auf eine Seite, dann auf die andere Seite des Mittelfadens (und ebenso für das Bild desselben) bringt, so dass nur eine feine Lichtlinie zwischen beiden bleibt; oder wenn man den beweglichen Doppelfaden ganz, oder nur einen Faden desselben zur einen und dann zur anderen Seite des Mittelfadens bringt, so dass man vier in gleichen Entfernungen befindliche Linien sieht; das Mittel aus den Lesungen bei symmetrischen Stellungen des beweglichen Fadens, welche sich bei Doppelfäden sehr scharf schätzen lassen, giebt die Lesung F, bezw. F_o, F_w. Da bei allen solchen Einstellungen oft starke persönliche Fehler auftreten, so empfiehlt es sich, die Messungen nach Aufsetzung eines Prismas auf das Ocular zu wiederholen, indem hierdurch die gleich zu schätzenden Zwischenräume rechts und links, bezw. oben und unten vertauscht werden.

Hat das Gestirn eine Scheibe, so wird man unter Benutzung des horizontalen Doppelfadens die Einstellung so machen, dass das Gestirn zwischen beiden Fäden hinläuft, wobei oben und unten gleiche Zwischenräume zwischen Faden und Rand bleiben, oder wobei über und unter dem oberen und unteren Faden gleiche Segmente der Scheibe erscheinen. Ist die Scheibe zu gross, so dass eine solche Einstellungsart nicht möglich ist, so muss man den Faden tangential an den Rand der Scheibe einstellen. Da die als Scheiben gesehenen Gestirne aber in einer messbaren Entfernung sind, so muss auch ihre Parallaxe berücksichtigt werden. Ist σ der Berührungspunkt des Randes mit dem Horizontalfaden, eingestellt in der Entfernung f vom Mittelfaden, und Q der Mittelpunkt des Gestirnes, so ist $PQ = 90° - \delta$ und $P\sigma = 90° - \delta \mp h'$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem man den oberen oder unteren Rand beobachtet hat. Dann erhält man aus dem Dreiecke $A\sigma P$ die Gleichungen:

$$\cos(c+f)\cos(\delta'-w) = \cos(\delta \pm h')\cos(t+\tau-m)$$
$$\cos(c+f)\sin(\delta'-w) = \sin(\delta \pm h')\cos n + \cos(\delta \pm h')\sin n \sin(t+\tau-m).$$

Um von der scheinbaren Deklination δ auf die geocentrische δ_0 überzugehen, hat man wieder

$$\Delta'\sin(\delta \pm h') = \Delta\sin(\delta_0 \pm h') - \rho\sin(\varphi' \pm h')$$
$$\Delta'\cos(\delta \pm h') = \Delta\cos(\delta_0 \pm h') - \rho\cos(\varphi' \pm h')$$

und damit

$$\tang(\delta'-w)\cos(t+\tau-m) = \tang(\delta \pm h')\cos n + \sin n \sin(t+\tau-m)$$
$$= \frac{\sin(\delta_0 \pm h') - \rho\sin\pi\sin(\varphi' \pm h')}{\cos(\delta_0 \pm h') - \rho\sin\pi\cos(\varphi' \pm h')}\cos n + \sin n \sin(t+\tau-m).$$

Setzt man hier $\cos n = 1$, $\sin n = n$, $t + \tau - m = x$, so wird

$$\sin(\delta_0 \pm h') - \rho \sin\pi \sin(\varphi' \pm h') =$$
$$= [\cos(\delta_0 \pm h') - \rho \sin\pi \cos(\varphi' \pm h')] [\tang(\delta' - w)\cos x - n \sin x]$$
$$\sin(\delta_0 \pm h') - \cos(\delta_0 \pm h')\tang(\delta' - w) = \rho \sin\pi \sin(\varphi' \pm h') -$$
$$- \rho \sin\pi \cos(\varphi' \pm h')\tang(\delta' - w) -$$
$$-2\tang(\delta' - w)\sin^2\tfrac{1}{2}x[\cos(\delta_0 + h') - \rho\sin\pi\cos(\varphi' \pm h')] - n\sin x\cos(\delta_0 \pm h')$$

und wenn die Produkte $\sin\pi \sin^2\frac{1}{2}x$ und $n \sin x$ vernachlässigt werden:

$$\sin(\delta_0 \pm h' - \delta' + w) = \rho \sin\pi \sin(\varphi' \pm h' - \delta' + w) - 2\sin(\delta' - w)\cos(\delta_0 \pm h')\sin^2\tfrac{1}{2}x$$

oder mit Vernachlässigungen derselben Ordnung

$$\sin(\delta_0 \pm h' - \delta' + w) = \rho \sin\pi \sin(\varphi' \pm h' - \delta) - \sin 2\delta \sin^2\tfrac{1}{2}x.$$

Setzt man

$$\sin p = \rho \sin\pi \sin(\varphi' \pm h' - \delta), \tag{37}$$

so wird

$$\sin(\delta_0 \pm h' - \delta' + w) - \sin p = 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta_0 \pm h' - \delta' + w - p)\cos\tfrac{1}{2}(\delta_0 \pm h' - \delta' + w + p) =$$
$$= -\sin 2\delta \sin^2\tfrac{1}{2}x$$

oder, da wie aus dieser Gleichung folgt, die Differenz von $\delta_0 \pm h' - \delta' + w$ und p von der Ordnung x^2 ist:

$$\delta_0 \pm h' - \delta' + w - p = -\frac{\sin 2\delta'}{\cos p}\sin^2\tfrac{1}{2}x,$$

daher

$$\delta_0 = \delta' - \frac{\sin 2\delta'}{\cos p}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{arc\,1''} - f\tang J \mp h' + p. \tag{38}$$

Die ersten drei Glieder zusammen sind aber nichts anderes, als die wegen Abweichung des Parallels vom grössten Kreise und Neigung des Fadens corrigirte Lesung δ'; nennt man diese, wie früher δ, so wird

$$\delta_0 = \delta \pm h' + p, \tag{38a}$$

wo p durch (37) bestimmt ist; p ist, wie man sieht, die Höhenparallaxe des Mittelpunktes, $\delta \pm h'$ die scheinbare Deklination desselben.

Die Deklination δ_0 gilt für die Zeit der Einstellung; um Rectascension und Deklination für dieselbe Epoche zu erhalten, reducirt man die letztere mit der aus den Ephemeriden zu entnehmenden Bewegung in Deklination auf die Zeit des Meridiandurchganges; ist $\Delta\delta$ der Zuwachs der Deklination in einer Stunde mittlerer Zeit, so ist der Zuwachs in einer Secunde Sternzeit.

$$\frac{\Delta\delta}{60 \times 60 \times 1{\cdot}00273791} = \frac{\Delta\delta}{3609{\cdot}85648} = (6{\cdot}442510 - 10)\Delta\delta,$$

daher die Reduction auf die Zeit des Meridiandurchganges

$$(6{\cdot}442510 - 10)\Delta\delta(t_0 + \tau_0),$$

wobei t_0 und τ_0 die auf pag. 12 angeführte Bedeutung haben. N. Herz.

Methode der kleinsten Quadrate. **1.** Die Theorie der Instrumente hat im wesentlichen den Zweck, den Einfluss zu ermitteln, welchen Abweichungen der Instrumente von allen jenen theoretisch geforderten Bedingungen, die selbst durch die feinsten mechanischen Hilfsmittel unmöglich zu erfüllen sind, in den Resultaten herbeiführen. Die Nichtberücksichtigung dieser Abweichungen bringt in den Resultaten systematische Fehler hervor, welche je nach der Gattung der Fehlerquellen ein bestimmtes Gesetz befolgen (allmählich anwachsen, dann wieder fallen, oder einen gesetzmässigen Gang zeigen) oder auch constant sind. So oft sich in den Resultaten systematische Fehler

zeigen, wird man stets auf eine gesetzmässig wirkende Ursache schliessen, und sein Augenmerk auf die Eruirung derselben zu wenden haben, so lange aber eine solche nicht gefunden ist, das Gesetz der Abweichungen empirisch bestimmen (durch Reihen, oder als analytische Function, oder durch empirisch ausgeglichene Curven) und bei der Vergleichung verschiedener concurrirender Resultate hierauf entsprechend Rücksicht zu nehmen haben.

Wesentlich von dieser Art der Abweichungen verschieden sind gewisse, vollständig unregelmässig und gesetzlos vertheilte Abweichungen verschiedener Beobachtungen untereinander, die bald positiv, bald negativ, bald grösser, bald kleiner sind, und die einerseits der Unvollkommenheit unserer Sinne und andererseits gewissen vollkommen unregelmässig wechselnden äusseren Zuständen (der Luft, des Erdbodens u. s. w.) entspringen. Unter allen den erhaltenen Resultaten muss und wird nicht gerade eines das richtige sein, und es ist uns schlechterdings unmöglich, aus dem blossen Anblick der verschiedenen Resultate zu schliessen, ob eines derselben und welches das richtige, wahre ist. Im Gegentheile muss man annehmen, dass alle erhaltenen Resultate gleiches Recht auf Berücksichtigung haben, und dass möglicherweise alle mit jenen unregelmässigen Abweichungen behaftet sind, welche man als zufällige Beobachtungsfehler oder Beobachtungsfehler schlechtweg bezeichnet. Als wesentlicher Charakter derselben gilt also die vollständige Gesetzlosigkeit in der Vertheilung derselben, sowohl dem Zeichen als der Grösse nach.

Kann man hiernach überhaupt nicht den wahren Werth des gesuchten Resultates finden, so handelt es sich darum, den wahrscheinlichsten Werth zu ermitteln. Dieses kann natürlich nicht in dem Sinne verstanden werden, dass man durch Versuche oder durch gute Uebereinstimmung einzelner Resultate diese für sicherer hält, oder dass man durch scheinbar logische, manchmal aber selbst sophistische Schlüsse zu dem wahrscheinlichsten Werthe zu gelangen sucht, sondern dass man nach den Gesetzen der mathematischen Wahrscheinlichkeit aus allen Beobachtungen dasjenige Resultat sucht, welches man als dem wahren am nächsten kommend anzusehen berechtigt und bemüssigt ist[1]).

---

[1]) Die im Folgenden verwendeten Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mögen kurz zusammengestellt werden.

1. Die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines von mehreren Ereignissen ist gegeben durch das Verhältniss der diesem günstigen Fälle g zu allen möglichen Fällen m, also $W = \frac{g}{m}$. Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in welcher sich w weisse, s schwarze, r rothe, b blaue Kugeln befinden, eine weisse Kugel zu ziehen, W_1, bezw. die für das Ziehen einer schwarzen Kugel W_2 sind:

$$W_1 = \frac{w}{w+s+r+b}; \qquad W_2 = \frac{s}{w+s+r+b}$$

$W = 1$ bedeutet daher die mathematische Gewissheit.

Ist die Wahrscheinlichkeit W bekannt, so wird man erwarten können, dass unter n Fällen das Ereigniss Wn mal eintrifft; die in der Wirklichkeit eintretenden Zahlen werden sich diesen theoretisch bestimmten um so mehr nähern, je grösser n ist (Gesetz der grossen Zahlen).

2. Umgekehrt lässt sich daher aus den Erfahrungen selbst ein Schluss auf die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ziehen. Ist dasselbe unter n Fällen m mal eingetroffen, so ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $W = \frac{m}{n}$ und man kann daraus hypothetisch schliessen, dass dem Ereignisse m Fälle unter n möglichen Fällen günstig sind. Sind z. B. in einer Urne

Handelt es sich um eine grosse Zahl direkt aus Beobachtungen ermittelter Resultate, so wird seit den ältesten Zeiten als der wahrscheinlichste Werth das arithmetische Mittel aller Beobachtungen angesehen. So einfach, natürlich und scheinbar einleuchtend dieses ist, so liegen hier schon zwei der Erfahrung entnommene Elemente, die zunächst einer Erörterung bedürfen, zu Grunde.

Was sind direkt der Beobachtung entnommene Resultate? Wird eine gemessene Zenithdistanz zur Ableitung von astronomischen Constanten verwendet, so erscheint die Zenithdistanz als ein direkt der Beobachtung entnommenes Resultat; ebenso ein gemessener Winkel, welcher als Theilbestandtheil einer Triangulation gilt, u. s. w. Sieht man aber näher zu, so ist die Sache nicht so einfach. Die gemessene Zenithdistanz, der gemessene Winkel sind das Resultat zweier Einstellungen auf zwei verschiedene Objecte, im ersten Falle Stern und Nadir, im zweiten Falle zwei irdische Gegenstände; jede Einstellung selbst setzt sich zusammen aus der Einstellung des Objectes zwischen den Fäden und der Ablesung am Kreise. Eine Bahnbestimmung gründet sich auf gemessene Rectascensionen und Deklinationen eines Gestirnes; diese sind hierfür die unmittelbar der Beobachtung entnommenen Daten; sie sind aber selbst Resultate von Vergleichungen mit Sternen: die Fehler der Beobachtungen sind zusammengesetzt aus den Fehlern in den Positionen der Vergleichsterne und den Fehlern der mikrometrischen Messung. Hieraus folgt: Als der Beobachtung unmittelbar entnommene Daten sind je nach dem Zwecke und der Ausdehnung der Untersuchung (Untersuchungen über die Grösse der Messungsfehler einzelner Zenithdistanzen oder Winkel an einem gegebenen Instrumente oder Untersuchungen über die Einstellungsfehler am Fernrohre und der Theilstriche am Kreise; Untersuchungen über die Fehler, welche eine ermittelte Bahn in den beobachteten Positionen eines Planeten oder Kometen übrig lässt oder aber über die Fehler einer mikrometrischen Messung, eines Fadenantritts) die durch eine gewisse Operation oder eine gewisse Gruppe von gleichartig sich bei jeder

---

weisse, schwarze, rothe, blaue Kugeln, so haben vorerst die beiden Hypothesen, dass man in einem Zuge eine weisse Kugel zieht oder dass man eine schwarze zieht, ganz gleiche Wahrscheinlichkeit für sich. Hat man aber unter n_1 Zügen w weisse, unter n_2 Zügen s schwarze Kugeln gezogen, ohne dass man dabei auf die Farbe der übrigen Kugeln Rücksicht genommen hat, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten $W_1 = \frac{w}{n_1}$ für das Ziehen einer weissen und $W_2 = \frac{s}{n_2}$ für das Ziehen einer schwarzen Kugel; nach diesen Versuchen haben die beiden angeführten Hypothesen nicht mehr die gleiche Wahrscheinlichkeit; es verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten derselben wie $W_1 : W_2$; die Wahrscheinlichkeit zweier einander ausschliessenden Hypothesen ist proportional der empirisch erhaltenen Wahrscheinlichkeit der denselben entsprechenden Ereignisse.

3. Sind W_1, W_2, W_3 . . . die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der Ereignisse A, B, C . . . , so ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder A oder B oder C eintrifft $W = W_1 + W_2 + W_3$. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen oder einer schwarzen Kugel $W = W_1 + W_2 = \frac{w + s}{w + s + b + r}$, indem $w + s$ die Zahl der beiden Ereignissen günstigen Fälle ist.

4. Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen der Ereignisse A, B ist $W = W_1 W_2$; ist nämlich $W_1 = \frac{g_1}{m_1}$; $W_2 = \frac{g_2}{m_2}$, so werden alle möglichen Combinationen für das Eintreffen von Ereignissen der ersten und zweiten Art m_1 m_2 sein; hingegen sind die dem Zusammentreffen günstigen Fälle g_1 g_2 an Zahl.

Messung wiederholenden Operationen erhaltenen Resultate anzusehen. Jede solche aus einer abgeschlossenen Gruppe bestehende Messung, welche als Fundament für irgend eine Untersuchung dient, und deren Beobachtungsfehler demnach als Element der Ausgleichung angesehen wird, soll eine »einfache Beobachtung« genannt werden. Für diese Auffassung spricht auch der Umstand, dass der Fehler einer jeden Beobachtung eine wenn auch nicht direct bestimmbare, so doch jedenfalls unzweideutig bestimmte Grösse ist, und man daher den Fehler einer gewissen Beobachtung A wenigstens innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Methode identisch finden muss, gleichgiltig ob man ihn durch Vergleichung vieler gleichartiger Beobachtungen derselben Art A allein (diese als einfache Beobachtungen aufgefasst) oder aus der Berücksichtigung der Elementaroperationen, aus denen A sich aufbaut, ableitet.

Die zweite Erörterung betrifft die Frage nach dem arithmetischen Mittel. Als die einfachste Combination aller einfachen Beobachtungen erfreut es sich eines hohen Alters. GAUSS führt dasselbe als Begründung der Methode der kleinsten Quadrate mit den Worten ein: »pro cujus valore correcto itaque assumere conveniet medium arithmeticum inter illas determinationes, quatenus quidem nulla adest ratio, cur unam alteramve praeferamus«[1]). Seither wurde dieser Satz von Vielen[2]) der Theorie der Fehlerausgleichungen als Axiom zu Grunde gelegt. Und in der That ist dieses die einzige Form, in welcher sich die Methode der kleinsten Quadrate begründen lässt, denn der Satz ist nicht nur nicht beweisbar, sondern es lassen sich auch ganz andere, fast ebenso einfache und ebenso natürliche Formen für den wahrscheinlichsten Werth einer direkt aus einfachen Beobachtungen abgeleiteten Grösse geben, welche aber auf ganz andere Darstellungen führen, beispielsweise das geometrische Mittel.

Seien die Einzelresultate einer aus direkten Messungen erhaltenen Grösse $a_1, a_2, \ldots a_n$, so kann man als den wahrscheinlichsten Werth

$$x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \tag{1}$$

oder

$$x = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \tag{1a}$$

ansehen; man nennt dann die Unterschiede

$$x - a_1 = v_1; \quad x - a_2 = v_2; \ldots x - a_n = v_n \tag{2}$$

die übrigbleibenden Fehler, und man hat im ersten Falle, wie man leicht findet

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0. \tag{3}$$

Die Gleichung (1a) giebt, wenn man die Abweichungen von der Einheit

$$\frac{x}{a_1} - 1 = v_1'; \quad \frac{x}{a_2} - 1 = v_2' \ldots \frac{x}{a_n} - 1 = v_n' \tag{1b}$$

nennt:

$$(1 + v_1')(1 + v_2') \ldots (1 + v_n') = 1, \tag{3a}$$

oder mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen der v' wieder die Gleichung (3). Sieht man aber zur theoretischen Ableitung des Fehlergesetzes alle Fehler als möglich, wenn auch nicht gleich wahrscheinlich an, so müssen auch Fehler als zulässig erklärt werden, für welche im zweiten Falle die

---

[1]) »Theoria motus corporum coelestium«, Werke, Bd. VII, pag. 226.

[2]) Vergl. z. B. v. OPPOLZER, »Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen«, II. Bd., pag. 276; HERR, »Lehrbuch der sphärischen Astronomie«, pag. 7; BRÜNNOW, »Lehrbuch der sphärischen Astronomie«, pag. 44, u. a.

Gleichung (3) nicht mehr gilt. Es folgt aber hieraus, dass das Fehlergesetz, auf welches man unter der Annahme des Axioms (3) geführt wird, nur für jene Fälle als beiden Hypothesen genügend angesehen werden kann (ob auch anderen ist hiermit noch keineswegs entschieden), wenn die Fehler v_1', v_2'. . . v_n' hinreichend klein sind, jedenfalls viel kleiner als die Einheit, also die Fehler v_1, v_2 . . . v_n viel kleiner als die aus der Beobachtung erhaltenen Werthe a_1, a_2, . . . a_n; mit anderen Worten: wenn der wahrscheinliche Fehler des Resultates wesentlich kleiner ist als dieses selbst. In allen Fällen, wo dieses nicht der Fall ist, bleibt das Resultat ein auf Grundlage der angenommenen Theorie erhaltenes, welches sich von der Wahrheit und selbst der Wahrscheinlichkeit noch sehr beträchtlich entfernen kann.

Es treten daher auch wiederholt Versuche auf, die Theorie in anderer Weise zu begründen, unter denen insbesondere die Methode von LAPLACE und von HAGEN zu erwähnen sind; doch kann an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen werden[1]).

2. Aus den Begriffen des zufälligen Fehlers ergiebt sich unmittelbar, dass unter einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungsfehlern gleich viel positive und negative auftreten werden, da im entgegengesetzten Falle schon auf eine constante Fehlerquelle geschlossen werden müsste. Dem Begriffe des »Fehlers« zufolge als einer durch die Unvollkommenheit der Sinne und der äusseren Umstände erzeugten Abweichung, müssen die Fehler stets mässig bleiben, und kleinere Abweichungen wahrscheinlicher sein, als grössere, und man muss annehmen, dass die Fehler stets unter einer gewissen, allerdings nicht strenge angebbaren Grenze bleiben müssen. Jede abnorm grosse Abweichung unter einer sehr grossen Zahl kleinerer wird stets auf eine Abnormität in den begleitenden Umständen schliessen lassen, und wenn auch theoretisch ein solcher Fehler gerade nicht auszuschliessen ist, so wird er praktisch als eine das wirkliche Resultat durchaus nicht darstellende Beobachtung angesehen werden dürfen. Jedenfalls wird die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers Δ eine Function dieses Fehlers $\varphi(\Delta)$ sein, und wenn man in dieser analytischen Form eine continuirliche Function erhält, so wird dieselbe nicht ausserhalb der praktisch zulässigen Fehlergrenzen die Wahrscheinlichkeit Null geben können. Im Gegentheil wird es die Continuität der Function mit sich bringen[2]), dass jeder noch so grosse Fehler mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit behaftet ist; doch wird man die Function $\varphi(\Delta)$ als die Wahrscheinlichkeit des Fehlers immerhin betrachten können, wenn nur für grosse Δ der Werth derselben äusserst klein und praktisch verschwindend wird.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen zwei Grenzen liegt, ist um so grösser, je weiter diese Grenzen auseinander liegen; innerhalb des unendlich kleinen Intervalles $d\Delta$ aber kann man die Wahrscheinlichkeit für das

[1]) Man vergl. A. MEYER, »Vorlesungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung«, deutsch von E. CZUBER, pag. 245 und pag. 441.

[2]) Die Einführung von discontinuirlichen Functionen, z. B. des DIRICHLET'schen Discontinuitätsfaktors $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda \cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda$ hätte vielleicht manches für sich, doch sind ausgedehnte Untersuchungen in dieser Richtung bisher noch nicht durchgeführt. Ueber den Einfluss von systematische Fehler erzeugenden Ursachen vergl. BESSEL: »Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler«, Astron. Nachr. Bd. 15, pag. 369 oder Werke, II. Bd., pag. 372.

Eintreffen jedes Fehlers von der Grösse Δ bis $\Delta + d\Delta$ constant gleich $\varphi(\Delta)$ setzen; daher wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$ ist, gleich $\varphi(\Delta)d\Delta$ und die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen den Grenzen Δ' und Δ'' liegt

$$\int_{\Delta'}^{\Delta''} \varphi(\Delta)\, d\Delta.$$

Nun werden alle Fehler zwischen zwei Grenzen $\pm c$ liegen, und es müsste daher die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler innerhalb dieser Grenzen bleibt, gleich der Gewissheit, also gleich 1 sein; allein der Werth von c ist wohl a priori nicht angebbar; jedenfalls aber liegt der Fehler zwischen $\pm \infty$, welche Voraussetzung auch die frühere, der vom theoretischen Standpunkte aus zulässigen beliebig grosser Fehler in sich schliesst. Man hat daher

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1. \tag{1}$$

Sind bei einer Reihe von Beobachtungen die Resultate $a_1, a_2 \ldots a_n$ erhalten worden, und nimmt man einen willkürlichen Werth x als den wahren an, so bleibt ein Fehlersystem

$$\Delta_1 = x - a_1; \quad \Delta_2 = x - a_2 \ldots\ldots \Delta_n = x - a_n;$$

jeder dieser Fehler hat eine durch $\varphi(\Delta_1)$, $\varphi(\Delta_2) \ldots \varphi(\Delta_n)$ bestimmte Wahrscheinlichkeit, und die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen gerade dieser Fehler ist

$$W = \varphi(\Delta_1)\cdot\varphi(\Delta_2)\cdot\varphi(\Delta_3) \ldots\ldots \varphi(\Delta_n).$$

Für jeden, beliebig angenommenen Werth x wird W einen anderen Werth erhalten, und unter allen Annahmen über x ist diejenige die wahrscheinlichste, für welche W ein Maximum wird; hierfür muss der Differentialquotient von W nach x verschwinden. Beachtet man, dass

$$\frac{d\varphi(\Delta_i)}{dx} = \frac{d\varphi(\Delta_i)}{d\Delta_i}\frac{d\Delta_i}{dx} = \frac{d\varphi(\Delta_i)}{d\Delta_i}$$

ist, so erhält man durch logarithmische Differentiation:

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dx} = \frac{1}{\varphi(\Delta_1)}\frac{d\varphi(\Delta_1)}{d\Delta_1} + \frac{1}{\varphi(\Delta_2)}\frac{d\varphi(\Delta_2)}{d\Delta_2} + \ldots + \frac{1}{\varphi(\Delta_n)}\frac{d\varphi(\Delta_n)}{d\Delta_n} = 0. \tag{2}$$

Setzt man nun für den Augenblick

$$\frac{1}{\varphi(\Delta)}\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} = f(\Delta),$$

so wird diese Gleichung

$$f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + f(\Delta_3) + \ldots\ldots + f(\Delta_n) = 0. \tag{2a}$$

Diese Gleichung gestattet eine Bestimmung der Function φ, wenn man für einen gegebenen Fall den wahrscheinlichsten Werth anzugeben in der Lage ist, z. B. unter Zugrundelegung des Axioms vom arithmetischen Mittel. Zieht man die für diesen Fall bestehende Gleichung 1 (3) in Betracht, setzt den aus dieser Gleichung folgenden Werth von Δ_n in (2a) ein, und differenzirt nach Δ_i, so folgt wegen $\frac{\partial \Delta_n}{\partial \Delta_i} = -1$:

$$\frac{df(\Delta_i)}{d\Delta_i} + \frac{df(\Delta_n)}{d\Delta_n}\frac{d\Delta_n}{d\Delta_i} = \frac{df(\Delta_i)}{d\Delta_i} - \frac{df(\Delta_n)}{d\Delta_n} = 0$$

und da $i = 1, 2, 3 \ldots n-1$ sein kann:

$$\frac{df(\Delta_1)}{d\Delta_1} = \frac{df(\Delta_2)}{d\Delta_2} = \frac{df(\Delta_3)}{d\Delta_3} = \ldots\ldots = \frac{df(\Delta_n)}{d\Delta_n}.$$

Da hier jedes Glied eine blosse Function des einen Fehlers Δ ist, dieser aber beliebig sein kann, so ist dieses Gleichungssystem nur erfüllbar, wenn

$$\frac{d f(\Delta)}{d\Delta} = k; \qquad f(\Delta) = \frac{1}{\varphi(\Delta)} \frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} = k\Delta + c$$

ist. Substituirt man diesen Werth in (2a), so resultirt die Gleichung 1 (2) mit dem Zusatz nc, woraus folgt, dass $c = 0$ ist; dann wird:

$$\frac{1}{\varphi(\Delta)} \frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} = k\Delta; \qquad log_n \varphi(\Delta) = \tfrac{1}{2} k\Delta^2 + log_n \varkappa$$

$$\varphi(\Delta) = \varkappa\, e^{\frac{1}{2}k\Delta^2}$$

als Fehlergesetz. $\varphi(\Delta)$ wird für positive k mit Δ immer grösser und für unendlich grosse Δ selbst unendlich, hingegen für negative k mit wachsenden Δ sehr rasch kleiner, und für $\Delta = \infty$ verschwinden; es muss daher k negativ sein; setzt man $\frac{1}{2} k = -h^2$, so folgt

$$\varphi(\Delta) = \varkappa\, e^{-h^2\Delta^2}. \tag{3}$$

Vergleichsweise soll hier noch der Fall erörtert werden, dass man das geometrische Mittel als den wahrscheinlichsten Werth direkter, gleich guter Beobachtungen ansehen würde. Dann folgt aus der Gleichung 1 (3a):

$$\frac{d\Delta_n}{d\Delta_i} = -\frac{1 + \Delta_n}{1 + \Delta_i}$$

und damit aus der Gleichung (2a)

$$\frac{df(\Delta_i)}{d\Delta_i} - \frac{1 + \Delta_n}{1 + \Delta_i} \frac{df(\Delta_n)}{d\Delta_n} = 0$$

$$(1 + \Delta) \frac{df(\Delta)}{d\Delta} = k; \qquad f(\Delta) = k\, log_n (1 + \Delta) + c$$

und indem sich wie vorher $c = 0$ findet:

$$\begin{aligned} log_n \varphi(\Delta) &= k \int log_n (1 + \Delta)\, d\Delta + log_n \varkappa \\ &= k(1 + \Delta)\,[log_n (1 + \Delta) - 1] + log_n \varkappa \end{aligned}$$

$$\varphi(\Delta) = \varkappa\, e^{k(1+\Delta)[log_n(1+\Delta)-1]}. \tag{3a}$$

Entwickelt man hier den Exponenten unter der Voraussetzung kleiner Δ in eine Reihe, und setzt $\varkappa$ für den constanten Faktor $\varkappa\, e^{-k}$, so erhält man mit $\frac{1}{2} k = -h^2$

$$\varphi(\Delta) = \varkappa\, e^{-h^2\Delta^2 + \frac{2}{2\cdot 3} h^2\Delta^3 - \frac{2}{3\cdot 4} h^2\Delta^4 + \cdots} \tag{3b}$$

Dieses Gesetz unterscheidet sich von dem Gesetze (3) in einem Punkte wesentlich: in diesem ist die Wahrscheinlichkeit für gleich grosse positive und negative Fehler dieselbe; nach (3b) jedoch ist die Wahrscheinlichkeit für negative Fehler etwas kleiner als für positive. Genau dasselbe Resultat aber hätte man erhalten, wenn man $\frac{x}{a_1} - 1 = -\Delta_1$ u. s. w. gesetzt hätte; da aber unter diesen beiden Annahmen die Fehler entgegengesetzt bezeichnet sind, so folgt, dass das geometrische Mittel im Sinne der mathematischen Wahrscheinlichkeit nicht als das wahrscheinlichste Resultat betrachtet werden kann. Hingegen würde ein Fehlergesetz von der Form

$$\varphi(\Delta) = \varkappa\, e^{-h^2\Delta^2 \pm h'^2\Delta^4 \pm h''^2\Delta^6}$$

unter Umständen als zulässig angesehen werden können, worauf jedoch hier nicht weiter eingegangen werden kann[1]).

---

[1]) Ueber die Heranziehung der n Potenzen der Fehler zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthe vergl. z. B. ENCKE im »Berliner Astronomischen Jahrbuch« für 1834, pag. 289. Ueber andere Fehlergesetze vergl. BESSEL in den »Astron. Nachrichten«, Bd. 15, No. 358, 359 und 375, und BRUNS in den »Astron. Nachrichten«, Bd. 143, pag. 329.

Der Werth von x in Gleichung (3) lässt sich mit Hilfe von (1) bestimmen. Da nämlich[1])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

ist, so wird durch die Substitution $h\Delta = t$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1 = \frac{x}{h}\sqrt{\pi}; \qquad x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

folglich

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}. \tag{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das ein Fehler zwischen den Grenzen $-\gamma$ und $+\gamma$ liegt, d. h. dass sein absoluter Werth kleiner als γ ist, ist hiernach:

$$W_\gamma = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \varphi(\Delta)\, d\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta;$$

substituirt man hier $h\Delta = t$, so wird

$$W_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\gamma} e^{-t^2}\, dt.$$

Für ein anderes Fehlersystem, für welches die Constante h' ist, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers δ ebenso:

$$W_\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h'\delta} e^{-t^2}\, dt.$$

Soll nun in dem ersten Fehlersystem ein Fehler γ ebenso wahrscheinlich sein, wie in dem zweiten Fehlersystem ein Fehler δ, so muss, da das bestimmte Integral nur von der oberen Grenze abhängt:

$$h\gamma = h'\delta; \quad h : h' = \delta : \gamma$$

sein; die Constanten h, h' für verschiedene Fehlersysteme verhalten sich also umgekehrt wie Fehler gleicher Wahrscheinlichkeit. Ist aber z. B. $\gamma > \delta$, d. h. in dem ersten Fehlersystem ein grösserer Fehler ebenso wahrscheinlich wie in dem zweiten ein kleinerer, so besagt dies offenbar, dass die erste Beobachtungsreihe weniger genau ist; es hängt daher die Genauigkeit der Beobachtungen mit dem Werthe der Constante h zusammen, und zwar wird für $\gamma > \delta : h < h'$, dem Fehlersystem mit grösseren Fehlern, also geringerer Genauigkeit, entspricht ein kleineres h; h wurde daher von Gauss das Maass der Präcision genannt.

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $\Delta = 0$ ist nach (4): $\varphi(0) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$; somit

$$\varphi(\Delta) : \varphi(0) = e^{-h^2\Delta^2};$$

Hieraus folgt, dass, wenn man für gewisse Beobachtungen gefunden hat, dass sich die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ zur Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null verhält wie $e^{-q\Delta^2} : 1$ man daraus für das Maass der Präcision $h = \sqrt{q}$ anzunehmen hat.

---

[1]) Vergl. hierüber die Handbücher der Mathematik.

Hat man eine Tafel des Integrales

$$J(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

so wird man die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers aus einem Fehlersystem, d. h. aus einer Beobachtungsreihe, für welche das Maass der Präcision h ist, durch den Ausdruck

$$W(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} J(h\gamma)$$

finden; h ist aber zunächst nicht bekannt, sondern nur eine Verhältnisszahl für gleich wahrscheinliche Fehler. Will man daher ihren numerischen Werth haben, so ist es nöthig, für verschiedene Beobachtungsreihen gleich wahrscheinliche Fehler zu suchen, wobei es gleichgültig ist, welche Fehler man zu Grunde legt, wenn sie nur die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Als solche wählt man zweckmässig diejenigen Fehler r, für welche $W(r) = \frac{1}{2}$ ist. Dabei ist also die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen 0 und r liegt, gleich $\frac{1}{2}$, daher auch die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen r und ∞ liegt, gleich $\frac{1}{2}$, demnach werden aus der ganzen Reihe der Fehler ebenso viele über als unter r liegen; man nennt diesen nach GAUSS den wahrscheinlichen Fehler, er ist definirt durch die Gleichung:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} J(hr) = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5; \quad J(hr) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} = 0{\cdot}4431134627.$$

Hat man eine Tafel des Integrales $J(x)$[1]) oder eine Tafel der Function $\frac{2}{\sqrt{\pi}} J(x)$[2]), so kann man das Argument $\rho = hr$ finden, für welches diese Gleichung erfüllt ist; aus der v. OPPOLZER'schen Tafel folgt:

$$\rho = hr = 0{\cdot}4769362761 \tag{5}$$

und dann ist

$$r = \frac{\rho}{h}; \qquad h = \frac{\rho}{r} \tag{5a}$$

Hat man daher den wahrscheinlichen Fehler, so erhält man daraus das Maass der Präcision und umgekehrt.

Unmittelbar ist hieraus ersichtlich, dass man Beobachtungen mit einander vergleichen kann, deren wahrscheinliche Fehler in derselben Einheit ausgedrückt sind (z. B. alle in Winkelmaass oder alle in Längenmaass). Ist aber z. B. r im Winkelmaass, r' im Längenmaass ausgedrückt, so sind dieselben nicht vergleichbar. Man kann ebenso wenig davon sprechen, dass ein Winkel genauer oder weniger genau gemessen ist, als eine Strecke, wie man davon sprechen kann, dass der Winkel selbst grösser oder kleiner ist, als die Strecke. Auch die Angabe des Fehlers in Bruchtheilen des gemessenen Objektes ist nicht maassgebend, denn der Fehler eines Winkels von 20° und 70° ist, *caeteris paribus* derselbe. Will man demnach derartige heterogene Messungen auf ihre Genauigkeit vergleichen, so muss man auf die Elementaroperationen (Einstellung zwischen Fäden, Ablesung auf Theilungen) zurückgehen. Hat man z. B. zur Winkel-

---

[1]) Eine solche findet sich auf zehn Decimalen in v. OPPOLZER »Lehrbuch zur Bahnbestimmung«, II. Bd., pag. 587.

[2]) Eine solche giebt ENCKE im »Berliner Astronomischen Jahrbuch« für 1834 auf fünf Decimalen und MEYER, l. c., pag. 545 auf 7 Decimalen.

messung ein Universalinstrument, mit einem Kreise von 15 *cm* Halbmesser, bei welchen die Theilung von 5 zu 5 Minuten geht, so dass die Entfernung zweier Theilstriche 0·2185 *mm* ist, und geschieht die Ablesung mittels Mikroskopen deren Schraube das Intervall in 5 Theile theilt, und ist die Trommel in 60 Theile getheilt, so dass man Secunden ablesen kann, so werden diese mit derselben Schärfe abgelesen, wie man bei der Messung mittels Messstangen und Comparator die Länge von 0·001 *mm* erhält, wenn 1 *mm* auf der Messstange in 5 Theile getheilt ist, die Mikroskopschrauben des Comparators das Intervall in 4 Theile theilen würden, und der Kopf der Schraube in 50 Theile getheilt wäre[1]). Dadurch erhält man aber nur eine einfache Winkelmessung, bezw. eine Strecke von der Länge der Messstange, und zur Vergleichung der Genauigkeit der Resultate von Triangulationen durch Winkel- bezw. Längenmessungen muss noch auf die Zahl der dazu nöthigen Operationen und auf den Einfluss der directen Messungen auf die gesuchten Grössen Rücksicht genommen werden.

Ist r der wahrscheinliche Fehler einer einfachen Beobachtung und drückt man den Fehler γ in Theilen derselben aus, so dass

$$\gamma = nr$$

ist, so wird

$$W(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} J(h\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} J(hnr) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} J(n\rho).$$

Da ρ eine Constante ist, so kann man das Integral J als Function von n darstellen, und erhält dann für jeden Fehler γ die Wahrscheinlichkeit, sobald derselbe in Theilen des wahrscheinlichen Fehlers ausgedrückt ist. Eine solche Tafel auf 4 Decimalen findet sich in Herr, »Lehrbuch dei sphärischen Astronomie«, pag. 15, welche ich verkürzt hier anführe:

Tafel der $J(n\rho) = J(0{\cdot}47694n)$

$n =$	·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9	·0
0.	0·000	0·054	0·107	0·160	0·213	0·264	0·311	0·363	0·410	0·456	0·500
1.	0·500	0·542	0·582	0·619	0·655	0·688	0·719	0·748	0·775	0·800	0·823
2.	0·823	0·843	0·862	0·879	0·894	0·908	0·920	0·931	0·941	0·950	0·957
3·	0·957	0·963	0·969	0·974	0·978	0·982	0·985	0·987	0·990	0·992	0·993.

Für $n = 1$, d. h. $\gamma = r$ ist, wie selbstverständlich, $W(\gamma) = 0{\cdot}5$. Man entnimmt dieser Tafel leicht, dass unter 1000 einfachen Beobachtungen der Fehler 54 Mal zwischen $0{\cdot}0r$ und $0{\cdot}1r$, 53 Mal zwischen $0{\cdot}1r$ und $0{\cdot}2r$ . . . z. B. 25 Mal zwischen $1{\cdot}8r$ und $1{\cdot}9r$ u. s. w. liegt.

Das arithmetische Mittel aller Fehler wird, da positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, um so näher der Null sein, je grösser die Zahl der betrachteten einfachen Beobachtungen ist. Nimmt man aber alle Fehler ihrem absoluten Betrage nach, also positiv, so erhält man in dem Mittel aller Werthe einen Maassstab für die durchschnittliche Grösse des Fehlers, und nennt auch das arithmetische Mittel aller mit dem absoluten Betrage genommenen Fehler den durchschnittlichen Fehler; er ist, wenn man den absoluten Betrag einer Grösse durch Einschliessen in Klammern bezeichnet:

$$\eta = \frac{1}{n}\,[(\Delta_1) + (\Delta_2) + (\Delta_3) + \ldots + (\Delta_n)]. \tag{6a}$$

[1]) Ohne Rücksicht auf die Brauchbarkeit dieses Theilungsmodus für die Praxis.

Man kann sich hierbei auch auf die positiven Fehler beschränken, und die negativen ganz weglassen, da die Summe der negativen Fehler wenigstens äusserst nahe derjenigen der positiven sein muss.

Der Einfluss des Zeichens verschwindet, wenn man die Fehler quadrirt. Das arithmetische Mittel aus den Quadraten aller Beobachtungsfehler giebt das Quadrat des sogen. mittleren Fehlers; dieser ist also definirt durch

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{n}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots . \Delta_n^2). \tag{6b}$$

Da die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen v und $v + dv$ gleich $\varphi(v)dv$ ist, so sind unter n Fehlern $n\varphi(v)dv$ Fehler von der Grösse v; um nun, n sehr gross vorausgesetzt, so dass die äusserste Fehlergrenze γ theoretisch gleich unendlich gesetzt werden kann, das Mittel aus allen positiven Fehlern, bezw. das Mittel aus allen Fehlerquadraten zu bilden, hat man jeden Fehler oder sein Quadrat so oft zu setzen, als er vorkommt, die Summe aus allen zu bilden, und durch die Gesammtzahl n zu dividiren. Es ist daher

$$\eta = \frac{1}{n}\int_0^\gamma \Delta n\,\varphi(\Delta)\,d\Delta = \int_0^\infty \Delta\varphi(\Delta)\,d\Delta; \qquad \varepsilon^2 = \int_0^\infty \Delta^2\varphi(\Delta)\,d\Delta.$$

Setzt man hier für $\varphi(\Delta)$ ein, setzt wieder $h\Delta = t$, so folgt

$$\eta = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{r}{\rho\sqrt{\pi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^2 e^{-t^2}dt = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\left\{\left(-te^{-t^2}\right)_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t^2}dt\right\} = \frac{1}{2h^2} = \frac{r^2}{2\rho^2} \tag{7a}$$

$$\varepsilon = \frac{r}{\rho\sqrt{2}}; \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\eta$$

folglich mit den numerischen Werthen von ρ und π

$$\begin{aligned} \eta &= 1{\cdot}1829\,r; & r &= 0{\cdot}84535\,\eta & \log 0{\cdot}84535 &= 9{\cdot}92703 \\ \varepsilon &= 1{\cdot}4826\,r; & r &= 0{\cdot}67449\,\varepsilon & \log 0{\cdot}67449 &= 9{\cdot}82898. \end{aligned} \tag{7}$$

Seien nun $a_1, a_2 \ldots a_n$ einfache Beobachtungen; der wahrscheinlichste Werth x, der unbekannte wahre Werth x_0, so wird man, nachdem der wahrscheinlichste Werth berechnet ist, die übrigbleibenden Fehler

$$x - a_1 = v_1; \quad x - a_2 = v_2; \quad x - a_n = v_n$$

erhalten, während die unbekannten wahren Fehler

$$x_0 - a_1 = \Delta_1; \quad x_0 - a_2 = \Delta_2; \quad \ldots . \quad x_0 - a_n = \Delta_n$$

sind. Nimmt man an, dass die verschiedenen Beobachtungen nicht dieselbe Genauigkeit haben, sondern dass im allgemeinsten Falle jeder einfachen Beobachtung ein anderes Maass der Präcision $h_1, h_2, \ldots h_n$ zukommt, so erhält man als Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler $v_1, v_2, \ldots v_n$ den Ausdruck

$$W = \varphi(v_1)\,\varphi(v_2)\ldots\varphi(v_n) = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\,e^{-(h_1^2v_1^2 + h_2^2v_2^2 + \ldots + h_n^2v_n^2)}. \tag{8}$$

Der wahrscheinlichste Werth von x ist derjenige, welcher die Wahrscheinlichkeit W zu einem Maximum macht, wozu die nothwendige und hinreichende Bedingung ist, dass der Exponent, also die Summe

$$S = h_1^2v_1^2 + h_2^2v_2^2 + \ldots . . + h_n^2v_n^2 \tag{8a}$$

ein Minimum werde. Dieser Bedingung entspringt der Name »Methode der kleinsten Quadrate«. In der Praxis wird es bequemer, an Stelle der Quadrate der h andere Zahlen einzuführen, welche diesen Quadraten proportional sind. Setzt man

$$h_1^2 = h^2 p_1; \quad h_2^2 = h^2 p_2 \; . \; . \; . \quad h_n^2 = h^2 p_n,$$

wo man die den Quadraten der Präcisionsmaasse proportionalen p die Gewichte der Beobachtungen nennt, so geht die Summe (8a) über in die Summe

$$\Sigma = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \; . \; . \; . \; . + p_n v_n^2, \tag{8b}$$

welche sich von S nur um den constanten Faktor h^2 unterscheidet. h ist nichts weiter als das Maass der Präcision einer (unter den einfachen Beobachtungen vorhandenen oder auch nicht vorhandenen) Beobachtung von dem Gewichte 1. Die Summe Σ wird ein Minimum für jenen Werth von x, für welchen $\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = 0$ wird, und da $\frac{\partial v_i}{\partial x} = 1$ ist, so wird die Bedingung für das Minimum

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \; . \; . \; . \; . + p_n v_n = [pv] = 0, \tag{9}$$

woraus

$$x = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \; . \; . \; . \; p_n a_n}{p_1 + p_2 + \; . \; . \; . + p_n} = \frac{[pa]}{[p]} \tag{9a}$$

folgt, wobei das Symbol $[A]$ die Summe aus allen gleichartig gebildeten Grössen A_1, A_2 . . . bedeutet. Haben alle Beobachtungen dasselbe Maass der Präcision, also auch das gleiche Gewicht, so wird $p_1 = p_2 = \; . \; . \; . \; . = p_n$ und es folgt, wie natürlich, das Gesetz vom einfachen arithmetischen Mittel.

Ersetzt man in (5) h durch p, so folgt

$$r = \frac{\rho}{\sqrt{p}}$$

und für Beobachtungen verschiedener Genauigkeit:

$$r : r' = \frac{1}{\sqrt{p}} : \frac{1}{\sqrt{p'}} \cdot; \qquad p : p' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2} \cdot \tag{10}$$

Die wahrscheinlichen Fehler und wegen der linearen Beziehungen (7) auch die durchschnittlichen und mittleren Fehler verhalten sich daher umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Gewichten, die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate der wahrscheinlichen oder mittleren Fehler.

Der wahre Werth x_0 kann von x verschieden sein; ist

$$x_0 = x + \xi,$$

so wird

$$\Delta_1 = v_1 + \xi; \quad \Delta_2 = v_2 + \xi; \quad . \; . \; . \; .$$

demnach da $[pv]$ gemäss (9) Null ist:

$$[p\Delta^2] = [pv^2] + [p]\xi^2. \tag{11}$$

Hieraus folgt für die Wahrscheinlichkeit des Werthes x_0:

$$W' = \frac{h^n \sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2[p\Delta^2]} = \frac{h^n \sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2[pv^2]-h^2[p]\xi^2}$$

demnach

$$W' : W = e^{-h^2[p]\xi^2}.$$

Da dieses für den Werth x das Verhältniss eines Fehlers ξ zum Fehler 0 ist, so folgt nach dem Satze pag. 33, dass das Maass der Präcision H und

darnach das Gewicht P des abgeleiteten wahrscheinlichsten Werthes x bestimmt ist durch:

$$H = h\sqrt{[p]}; \qquad P = [p]. \tag{12}$$

Hieraus folgt eine einfache Deutung für die Gewichtszahlen. Hat man n einfache Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, so kann man, da die Gewichte nur Relativzahlen sind, deren Gewicht gleich 1 setzen; das Gewicht des arithmetischen Mittels ist dann gleich n; die Gewichte repräsentiren daher die Anzahl einfacher Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, welche man zu einem Mittel vereinigt denken kann, um die gegebene Beobachtung zu ersetzen.

Nennt man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots\ldots; \eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots\ldots; r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots$ die mittleren, bezw. durchschnittlichen und wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Beobachtungen, ε, η, r dieselben für die Gewichtseinheit, und E, H, R für den wahrscheinlichsten Werth, so hat man gemäss (10):

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_i}}; \qquad \eta_i = \frac{\eta}{\sqrt{p_i}}; \qquad r_i = \frac{r}{\sqrt{p_i}}$$

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}}; \qquad H = \frac{\eta}{\sqrt{[p]}}; \qquad R = \frac{r}{\sqrt{[p]}}. \tag{13}$$

In Gleichung (8) ist die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Werthes x abhängig von der Grösse der unter dieser Annahme übrigbleibenden Fehler v, überdiess aber auch von dem Werthe h; schreibt man die Gleichung aber für die wirklich stattfindenden Fehler Δ, so wird die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlersystems

$$W = \frac{h^n\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2(p_1\Delta_1^2 + p_2\Delta_2^2 + \ldots p_n\Delta_n^2)}$$

und dieser Werth hängt, da Δ wirklich gemachte Beobachtungsfehler sind, nur mehr von der Genauigkeit der Beobachtungen, also von h ab, und man kann aus der Grösse der wirklich gemachten Beobachtungsfehler auf den wahrscheinlichsten Werth von h schliessen; es wird wieder jener der wahrscheinlichste sein, welcher W zu einem Maximum macht, d. h. für welchen $\frac{\partial W}{\partial h} = 0$ ist; es ist aber, wenn man logarithmisch differenzirt:

$$\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial h} = \frac{n}{h} - 2h[p\Delta^2]; \qquad h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{[p\Delta^2]}}$$

daher gemäss (7a):

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}; \qquad r = \pm\,\rho\sqrt{2}\sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}. \tag{14}$$

Hiermit wäre der mittlere und wahrscheinliche Fehler der Gewichtseinheit, und nach (13) der einzelnen Beobachtungen und des Mittels bekannt, wenn die Δ bekannt wären. Dieses sind aber die wahren Beobachtungsfehler, und da der wahre Werth x_0 nicht bekannt ist, so bleiben auch die Δ stets unbekannt; bekannt sind nur die übrigbleibenden Fehler v gegen den wahrscheinlichsten Werth x; man könnte aber $[p\Delta^2]$ aus Gleichung (11) bestimmen, wenn ξ bekannt wäre; da aber $x = x_0 + \xi$ ist, so ist ξ der Fehler des wahrscheinlichsten Werthes x; setzt man dafür den mittleren Fehler E, so wird die Gleichung (11):

$$[p\Delta^2] = [pv^2] + [p]\,E^2 = [pv^2] + \varepsilon^2$$

und hieraus, wenn für $[p\Delta^2]$ aus (14) substituirt wird[1]):

$$n\,\varepsilon^2 = [pv^2] + \varepsilon^2$$

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}}. \tag{15}$$

Eine Schwierigkeit liegt stets, namentlich für den Anfänger, in der Bestimmung der Gewichte; sind die mittleren oder wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen bekannt (beispielsweise bei Winkelmessungen in Bogensecunden), so wird man zunächst für einen gewissen wirklich vorhandenen oder auch unter den Beobachtungen nicht vertretenen (z. B. für den Fehler gleich 1") das Gewicht gleich 1 setzen, und erhält dann die Gewichte der übrigen umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren oder wahrscheinlichen Fehler; sind diese z. B. $\frac{1}{4}''$, $\frac{1}{3}''$, $\frac{1}{2}''$, so werden die Gewichte, wenn die Gewichtseinheit dem Fehler 1" entspricht: 16, 9, 4. Sind die mittleren Fehler aber nicht bekannt, so wird man sich solche vorerst wenigstens genähert zu verschaffen suchen, sei es, dass man Beobachtungen derselben Art von demselben Beobachter bei anderen Gelegenheiten zu Rathe zieht (Schlüsse aus der Vertrauenswürdigkeit der Beobachtungen), oder dass man die zu vereinigenden Beobachtungen bei

---

[1]) Die obige, allgemein übliche Ableitung (vergl. BRÜNNOW, Astronomie, pag. 52, FISCHER höhere Geodäsie I, pag. 60; HERR, Astronomie, pag. 30, unter der Voraussetzung von Beobachtungen gleicher Genauigkeit; ferner MEYER-CZUBER, l. c., pag. 270 und v. OPPOLZER, l. c. pag. 307) ist durchaus nicht strenge: man könnte, und vielleicht mit mehr Recht, für ξ den wahrscheinlichen Fehler R setzen. Man gelangt aber zu demselben Resultate auch auf folgendem Wege: durch Addition der mit den Gewichten multiplicirten Gleichungen $\Delta_\iota = v_\iota + \xi$ folgt mit Rücksicht auf (9): $[p\Delta] = [p]\xi$; quadrirt man diese Gleichung und berücksichtigt, dass wegen der gleichen Vertheilung der Fehler $[p_\varkappa p_\iota \Delta_\varkappa \Delta_\iota] = 0$ ist, so folgt $\xi^2 = \frac{[p^2\Delta^2]}{[p]^2}$; nun sind im Allgemeinen $[p\Delta^2]$ und $[p^2\Delta^2]$ von einander verschieden, aber bei einer gewissen unten näher zu erörternden Wahl der p werden dieselben als gleich angenommen werden können; setzt man dies zunächst voraus, so wird aus (11):

$$[p\Delta^2] = \frac{[p]}{[p]-1}[pv^2]; \qquad \varepsilon^2 = \frac{[pv^2]}{[p]-1}\frac{[p]}{n} \tag{15a}$$

$\frac{[p]}{n}$ ist das mittlere Gewicht aller einfachen Beobachtungen; da die Gewichte nur Relativzahlen sind, so kann man sie so vertheilen, dass $\frac{[p]}{n} = p_0 = 1$ ist; dann geht (15a) in (15) über; dies setzt aber voraus, dass man für die Gewichte der einfachen Beobachtungen Zahlen wählt, die theils grösser, theils kleiner als 1 sind, so aber, dass $[p] = n$ ist. Hat man z. B. als Gewicht von drei Beobachtungen die Zahlen 16, 9, 4, so werden dieselben aut 1·655, 0·931, 0·414 zu reduciren sein, was im allgemeinen Fall durch Division durch p_0 geschieht. In diesem Falle wird auch die Voraussetzung $[p\Delta^2] = [p^2\Delta^2]$ als zutreffend angesehen werden können, und Gleichung (15a) giebt den Fehler der Gewichtseinheit. Allein, da die Gewichte nur Relativzahlen sind, so kann man an Stelle der p andere Gewichte p' einführen, die durch $p' = \varkappa p$ definirt sein mögen. Multiplicirt man aber in (15a) Zähler und Nenner mit $\varkappa$, so wird

$$\varepsilon^2 = \frac{[\varkappa p v^2]}{[\varkappa p] - \varkappa}\frac{[p]}{n} = \frac{[p'v^2]}{\varkappa(n-1)}.$$

ε ist aber der Fehler für $p = 1$, also für $p' = \varkappa$; der Fehler für $p' = 1$ ist bestimmt durch $\varepsilon' = \varepsilon\sqrt{\varkappa}$; es wird demnach

$$\varepsilon'^2 = \frac{[p'v^2]}{n-1}.$$

Gleichung (15) bestimmt daher wieder den Fehler der Gewichtseinheit für die getroffene Wahl der Gewichtszahlen.

der ersten provisorischen Ausgleichung mit gleichen Gewichten annimmt; nach der provisorischen Ausgleichung ergeben sich aus den Abweichungen der Einzelserien vom Resultate genaue Gewichte, mit denen die Rechnung wiederholt werden kann. Im allgemeinen ist dieser letztere Weg vorzuziehen, da hierbei der Willkür weniger Raum gegeben ist.

Diese allgemeinen Vorschriften werden von Fall zu Fall, je nach den besonderen Umständen ergänzt werden müssen. Am besten wird dieses an einem Beispiele klar. Ich entnehme dasselbe meiner Bahnbestimmung des grossen Kometen von 1811 (Publikationen der v. KUFFNER'schen Sternwarte, II. Bd., pag. 49). Es lagen in der Zeit von 1811 März 31 bis 1812 August 17 für 188 Beobachtungstage 986 Beobachtungen vor, die sich auf 28 verschiedene Serien (Beobachtungen an verschiedenen Orten und nach verschiedenen Methoden: Meridiankreis, Universalinstrument, Fadenmikrometer, Ringmikrometer, BRADLEY'sches Netz, Aequatorealsektor, Sextant und Heliometer) vertheilten. Die Vergleichung der Beobachtungen mit der aus den Ausgangselementen erhaltenen Ephemeride gab die »Fehler der Ephemeride«, nach welchen die Elemente verbessert werden sollten. Diese mussten selbstverständlich einen Gang nach den Daten zeigen, welcher von den nicht ganz richtigen Elementen herrührte. Die Abweichungen waren aber für dasselbe Datum verschieden für jede einzelne Beobachtung. Es wurden also zunächst Tagesmittel gebildet (l. c., pag. 217); die Reihe derselben wurde graphisch ausgeglichen; es ergab sich z. B.

	$(\Delta\alpha \cos\delta)_0$				$(\Delta\delta)_0$			
für 1811	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1	+ 4″	− 29″	− 10″	+ 9″	+ 5″	− 2″	− 2″	− 13″
10	− 6	− 29	− 1	+ 8	− 1	+ 5	− 12	− 19
20	− 20	− 24	+ 5	+ 8	− 8	+ 5	− 18	− 31

Hebt man nunmehr aus allen Beobachtungen eine einzelne Serie: diejenige eines einzelnen Beobachters an einem und demselben Instrumente heraus, so werden sich zwischen den einzelnen Ephemeridencorrectionen $\Delta\alpha \cos\delta$, $\Delta\delta$ und den obigen ausgeglichenen gewisse Unterschiede

$$v = \Delta\alpha \cos\delta - (\Delta\alpha \cos\delta)_0; \quad v' = \Delta\delta - (\Delta\delta)_0$$

ergeben. Man kann annehmen, dass bei den obigen ausgeglichenen Werthen die Fehler der einzelnen Beobachtungen möglichst beseitigt sind, und dann rühren die Unterschiede v, v' von den Fehlern der einzelnen Beobachtungen her, und können daher dazu verwendet werden, den mittleren Fehler einer Beobachtung der betrachteten Serie zu ermitteln[1]).

8. Bisher war nur von dem einfachsten Fall die Rede, dass eine Grösse aus einfachen Beobachtungen bestimmt wird. Ist aber eine Grösse aus mehreren Beobachtungsdaten zusammengesetzt, welche selbst gewissen Fehlern unterworfen sind, so werden diese natürlich auch das Resultat beeinflussen. Ist

$$X = x \pm y$$

und sind a, b die beobachteten, oder aus Beobachtungen abgeleiteten wahrscheinlichsten Werthe von x, y, so wird der hieraus folgende wahrscheinlichste Werth von x:

$$A = a \pm b$$

mit einem gewissen Fehler behaftet sein; sind Δ_1', Δ_1'', Δ_1''' . . . . $\Delta_1^{(m)}$ die Fehler der Beobachtungen, aus denen sich x ableitet, Δ_2', Δ_2'' . . . $\Delta_2^{(n)}$ die

[1]) Näheres s. l. c., pag. 223.

Fehler der Beobachtungen des Werthes y, so werden die aus den einzelnen Beobachtungen abgeleiteten Werthe von x um die Beträge

$$\Delta_1' \pm \Delta_2'; \quad \Delta_1' \pm \Delta_2''; \quad \Delta_1' \pm \Delta_2''' \ldots . \quad \Delta_1'' \pm \Delta_2'; \quad \Delta_1'' \pm \Delta_2'' \ldots .$$

fehlerhaft sein, wobei man jeden einzelnen Werth von x mit jedem einzelnen Werth von y combiniren kann. Liegen m Beobachtungen von x, n Beobachtungen von y vor, so erhält man mn Werthe für X und der mittlere Fehler E wird gegeben durch

$$E^2 = \frac{[(\Delta_1^{(\iota)} \pm \Delta_2^{(\varkappa)})^2]}{mn};$$

Da aber jedes $\Delta_1^{(\iota)}$ mit n verschiedenen $\Delta_2^{(\varkappa)}$ verbunden ist, also n mal auftritt, ebenso jedes $\Delta_2^{(\varkappa)}$ m mal, so wird

$$E^2 = \frac{[(\Delta_1^{(\iota)})^2]}{m} + \frac{[(\Delta_2^{(\varkappa)})^2]}{n} \pm 2\,\frac{[\Delta_1^{(\iota)}\Delta_2^{(\varkappa)}]}{mn}.$$

Das letzte Glied verschwindet, da Δ_1 und Δ_2 als zufällige Fehler in gleicher Grösse positiv und negativ vorkommen, demnach ist:

$$E^2 = \frac{[(\Delta_1^{(\iota)})^2]}{m} + \frac{[(\Delta_2^{(\varkappa)})^2]}{n}; \quad E^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \tag{1}$$

wenn ε_x, ε_y die mittleren Fehler der Grössen x, y sind. Ebenso folgt für

$$X = x \pm y \pm z \pm \ldots .$$

der mittlere Fehler

$$E^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \ldots . \tag{1a}$$

Ist $X = mx$, so erzeugt jeder Fehler Δ von x einen Fehler $m\Delta$ in X, folglich wird der mittlere Fehler E für[1])

$$X = mx; \quad E = m\varepsilon. \tag{2}$$

Durch Verbindung von (1) und (2) folgt für die Function:

$$X = ax + by + cz + \ldots \tag{3}$$

der wahrscheinliche Fehler

$$r_X^2 = (ar_x)^2 + (br_y)^2 + (cr_z)^2 + \ldots \tag{3a}$$

Ist

$$X = f(x, y, z, \ldots .) \tag{4}$$

und sind die wahrscheinlichsten Werthe $x = a$, $y = b$, $z = c$, mit den wahrscheinlichen Fehlern r_x, r_y, r_z . . . auf irgend einem Wege gefunden worden, während die wahren Werthe $x_0 = a + \xi$, $y_0 = b + \eta$, $z_0 = c + \zeta$ . . . . sind, so wird:

$$\begin{aligned} X &= f(a + \xi, b + \eta, c + \zeta \ldots\ldots) \\ &= f(a, b, c \ldots) + \frac{\partial f(a, b, c \ldots)}{\partial a}\xi + \frac{\partial f(a, b, c \ldots)}{\partial b}\eta + \frac{\partial f(a, b, c \ldots)}{\partial c}\zeta + \ldots \end{aligned}$$

Da die ξ, η, ζ sehr kleine Incremente sind, deren zweite und höhere Potenzen man vernachlässigen kann, so erhält man X in Form einer linearen Function der ξ, η, ζ, deren wahrscheinlichster Werth 0, mit den wahrscheinlichen Fehlern r_x, r_y, r_z . . . sind; es wird daher nach (3a) der wahrscheinliche Fehler von X gegeben durch

$$r_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 r_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 r_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 r_z^2 + \ldots \tag{4a}$$

---

[1]) Die beiden Resultate stehen scheinbar im Widerspruch; denn setzt man im ersten Falle $x = y = z$, so würde man aus (1): $E = \sqrt{m}\cdot\varepsilon$ folgern; der Widerspruch hebt sich, wenn man bedenkt, dass sich im zweiten Falle das Resultat durch Vervielfachung der einfachen Messung ergiebt, im ersten Falle aber die Messung m Mal vorgenommen wurde.

4. Die bei weitem wichtigste und am häufigsten vorkommende Aufgabe ist aber, gewisse Unbekannte zu bestimmen, wenn die Beobachtungen nicht diese selbst, sondern Functionen derselben geben. Die hierher gehörigen Probleme lassen sich in zwei Gruppen trennen: die eine Gruppe umfasst jene, bei denen die Unbekannten von einander völlig unabhängig sind (z. B. die sechs Bahnelemente eines Himmelskörpers, oder eine absolute Rectascension nebst der Schiefe der Ekliptik und der Polhöhe aus Sonnenbeobachtungen u. s. w.), und eine zweite Gruppe, wo zwischen den zu suchenden Unbekannten Beziehungen bestehen, die sich in der Form von Bedingungsgleichungen ausdrücken lassen (z. B. bei einer Triangulation die Winkel eines Dreieckes, eines Vieleckes u. s. w.).

Zunächst soll die erste Gruppe von Beobachtungen betrachtet werden. Sei

$$V = f(X, Y, Z \ldots . a, b, c \ldots) \tag{1}$$

eine Function der Unbekannten $X, Y, Z \ldots$ und diese wären aus einer Reihe von Functionalwerthen V, welche durch die Beobachtung für verschiedene Werthe der Coëfficienten $a, b, c \ldots$ bestimmt sind, zu ermitteln. Beispielsweise sei V eine Rectascension oder Deklination als Function der sechs Bahnelemente $x, y, z \ldots$; a, b, c sind die Coëfficienten, welche Functionen der Zeit sind, und für verschiedene Zeitmomente verschiedene Werthe erhalten; in Folge dessen wird für verschiedene Zeitmomente V verschiedene Werthe erhalten, und aus einer Reihe von beobachteten V lassen sich die Unbekannten bestimmen.

Sind genau so viel Werthe von V beobachtet, als Unbekannte zu bestimmen sind, so wird eine direkte Auflösung möglich sein, wenn dieselbe auch mitunter mancherlei analytische Schwierigkeiten bietet (Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen, d. i. aus drei Rectascensionen und drei Deklinationen). Sind aber mehr beobachtete Werthe gegeben, so werden sich aus denselben nur dann die genauen, alle Gleichungen befriedigenden Werthe für $x, y, z, \ldots$ finden lassen, wenn die beobachteten V fehlerfrei wären; dieses ist aber nicht der Fall, und man hat wieder die Aufgabe, aus den sämmtlichen beobachteten Werthen die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten zu ermitteln.

Die allgemeinste Form der Gleichungen (1) ist für die Auflösung nicht geeignet; will man die bisher verwendeten Prinzipien auch hier anwenden, so ist das erste Erforderniss, dass die zu behandelnden Gleichungen linear sind. Diese Bedingung kann man stets erfüllen, wenn man genäherte Werthe der Unbekannten hat (genäherte Schiefe der Ekliptik, genäherte Polhöhe); sollte dieses nicht der Fall sein, so wird man sich zunächst genäherte Werthe durch eine vorläufige Auflösung einzelner der Gleichungen verschaffen (erste Bahnbestimmung). Sind dieselben $x_0, y_0, z_0, \ldots$ und sind die wahren Werthe $X = x_0 + x$, $Y = y_0 + y$, $Z = z_0 + z \ldots$ so erhält man durch Entwickelung der Gleichung (1) nach der TAYLOR'schen Reihe:

$$V = f(x_0, y_0, z_0 \ldots) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z + \ldots \tag{2}$$

und die zu bestimmenden Unbekannten sind nunmehr $x, y, z \ldots$. Damit man aber stets, wie gefordert, lineare Beziehungen hat, ist es nöthig, dass die angenommenen Werthe $x_0, y_0, z_0 \ldots$ bereits sehr nahe richtig sind, so dass man die zweiten und höheren Potenzen der Correctionen $x, y, z \ldots$ vernachlässigen kann; ergeben sich dieselben schliesslich zu gross, so wird eine zweite Bestimmung erforderlich, wobei man nunmehr die besseren Werthe $x_0 + x$, $y_0 + y \ldots$ als Näherungen zu Grunde legt, und nun diesmal viel kleinere Correctionen $x', y', z' \ldots$ sucht.

Im folgenden soll nun angenommen werden, dass die zu bestimmenden Correctionen hinreichend klein sind, damit die Beziehungen (2) als linear angenommen werden können. Die Werthe $f(x_0, y_0, z_0 \ldots)$ und deren Differentialquotienten hängen von Coëfficienten ab, die für jede Beobachtung andere Werthe annehmen; sind daher $V_1, V_2, V_3 \ldots$ beobachtete Werthe von V und nennt man für den ersten Werth

$$f(x_0, y_0, z_0 \ldots) = m_1; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = a_1; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = b_1 \ldots$$

und ebenso für die folgenden Beobachtungen $m_2, m_3 \ldots a_2, a_3 \ldots b_2, b_3 \ldots$ und setzt die ebenfalls bekannten Grössen

$$V_1 - m_1 = n_1; \quad V_2 - m_2 = n_2; \quad V_3 - m_3 = n_3, \tag{3}$$

so erhält man aus der ganzen Reihe der Beobachtungen die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} n_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \\ n_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \\ n_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen werden aber, wenn ihre Zahl grösser ist, als die Zahl der Unbekannten und die Beobachtungen mit gewissen Fehlern behaftet sind, nicht strenge erfüllbar sein, und es werden gewisse Fehler v übrig bleiben:

$$v_\iota = a_\iota x + b_\iota y + c_\iota z + \ldots - n_\iota. \tag{4a}$$

Die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten werden nach 2 (8) und 8 b) diejenigen sein, für welche

$$\Sigma = [pv^2]$$

ein Minimum wird. Hierfür ist erforderlich, dass

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = \frac{\partial \Sigma}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\Sigma}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial z} = 0 \ldots$$

ist, oder da

$$\frac{\partial v_\iota}{\partial x} = a_\iota; \quad \frac{\partial v_\iota}{\partial y} = b_\iota; \quad \frac{\partial v_\iota}{\partial z} = c_\iota \ldots$$

ist:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial x} &= p_1 a_1 v_1 + p_2 a_2 v_2 + p_3 a_3 v_3 + \ldots = [pav] = 0 \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial y} &= p_1 b_1 v_1 + p_2 b_2 v_2 + p_3 b_3 v_3 + \ldots = [pbv] = 0 \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Sigma}{\partial z} &= p_1 c_1 v_1 + p_2 c_2 v_2 + p_3 c_3 v_3 + \ldots = [pcv] = 0. \\ &\ldots \\ &\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Die weitere Behandlung der Gleichungen wird wesentlich vereinfacht, wenn man die Gleichungen (4) sofort mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten multiplicirt. Sind dann

$$\sqrt{p_\iota}\, n_\iota = N_\iota; \quad \sqrt{p_\iota}\, a_\iota = A_\iota; \quad \sqrt{p_\iota}\, b_\iota = B_\iota \ldots,$$

so werden die Gleichungen

$$\begin{aligned} N_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + \ldots \\ N_2 &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4b}$$

und man sieht sofort, dass sich die Gleichungen (5) in die Form schreiben

$$[Aw] = 0, \quad [Bw] = 0, \quad [Cw] = 0, \tag{5a}$$

wo die w die übrigbleibenden Fehler der Gleichungen (3b) sind. Man kann demnach die Gleichungen (4) dadurch, dass man sie mit den Quadrat-

wurzeln aus den Gewichten der n, d. i. der beobachteten V multiplicirt auf die Gewichtseinheit reduciren, und dann der weiteren Rechnung zu Grunde legen. Setzt man dies voraus, und betrachtet die Gleichungen (4) als bereits mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten multiplicirt, so wird in (5) überall $p = 1$ zu setzen sein, und es wird

$$[av] = 0, \quad [bv] = 0, \quad [cv] = 0 \ldots . \tag{5b}$$

Setzt man hier für v die Werthe aus (4a) ein, so folgt

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots . &= [an] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \ldots . &= [bn] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \ldots . &= [cn] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Man bezeichnet die Gleichungen (4) als die Bedingungsgleichungen, die Gleichungen (6) als die Normalgleichungen, und zwar diejenige mit dem quadratischen Coëfficienten $[aa]$ bei x als Normalgleichung für x, diejenige mit dem quadratischen Coëfficienten $[bb]$ bei y, als die Normalgleichung für y u. s. w. Die Zahl der letzteren ist, da jede aus dem Differentialquotienten von Σ nach einer der Unbekannten entsteht, genau gleich der Zahl der Unbekannten, und diese können daher auf gewöhnlichem Wege ermittelt werden.

Für die praktische Durchführung sind noch einige Bemerkungen nöthig. Die Coëfficienten können ausserordentlich verschieden sein; es werden z. B. die Coëfficienten der einen Unbekannten sehr gross, diejenigen einer anderen sehr klein; für die Auflösung würde sich hieraus ein Uebelstand ergeben, indem in den Summen $[ab]$, $[ac]$ . . . der Einfluss der kleinen Coëfficienten verschwindend klein wird; es empfiehlt sich daher, die Gleichungen homogen, d. h. alle Coëfficienten von derselben Ordnung zu machen. Fasst man die grössten Coëfficienten a_ι, $b_\varkappa$, c_λ . . . . n_μ heraus, und setzt

$$\frac{a_\iota x}{n_\mu} = (x), \qquad \frac{b_\varkappa y}{n_\mu} = (y), \qquad \frac{c_\lambda z}{n_\mu} = (z) \ldots ,$$

so werden die Bedingungsgleichungen (4):

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_\mu} &= \frac{a_1}{a_\iota}(x) + \frac{b_1}{b_\varkappa}(y) + \frac{c_1}{c_\lambda}(z) + \ldots \\ \frac{n_2}{n_\mu} &= \frac{a_2}{a_\iota}(x) + \frac{b_2}{b_\varkappa}(y) + \frac{c_2}{c_\lambda}(z) + \ldots \\ &\ldots . \end{aligned}$$

und wie man sieht werden hier alle Coëfficienten, einschliesslich der n kleiner als 1, aber jeder mindestens einmal den Werth 1 erhalten, sie sind also numerisch allerdings von verschiedener Grösse (was in der Natur der Sache liegt), aber alle von derselben Ordnung.

Der Gang der Rechnung ist daher der folgende: die linearen Bedingungsgleichungen werden mit den Quadratwurzeln der den bezüglichen Beobachtungen entsprechenden Gewichte multiplicirt, sodann durch entsprechende Substitutionen homogen gemacht, wodurch sie immer die Form (4) behalten, und aus den letzten werden die Normalgleichungen abgeleitet.

Wichtig ist dabei eine Controlle für die Sicherheit der Coëfficienten der Normalgleichungen; eine solche erhält man auf einfache Weise, indem man zunächst die Summen sämmtlicher Coëfficienten (ohne Rücksicht auf ihre verschiedene Bedeutung):

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + n_1 = s_1$$
$$a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + n_2 = s_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bildet, und auf diese ebenfalls dieselben Operationen: $[as]$, $[bs]$ ... anwendet; wie man leicht findet, muss nun

$$\begin{array}{l}[aa] + [ab] + [ac] + \ldots + [an] = [as] \\ [ab] + [bb] + [bc] + \ldots + [bn] = [bs] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array} \tag{7}$$

sein. Die Produkte ab, ac ... können, wenn man Produktentafeln hat (z. B. die CRELLE'schen Multiplicationstafeln) direkt aus diesen entnommen werden. Hat man keine Multiplicationstafeln und keine Rechenmaschine, so wird die Ausführung etwas zeitraubend, und leichter Fehlern unterworfen, weshalb die Probegleichungen der s besonders wichtig werden. Einfacher wird die Bestimmung mittels Quadrattafeln. Da nämlich

$$ab = \tfrac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]$$

ist, so wird auch

$$[ab] = \tfrac{1}{2}\{[(a+b)^2] - [a^2] - [b^2]\}. \tag{8}$$

Man schreibt hierfür die Werthe

$$a^2,\ b^2,\ c^2, \ldots n^2,\ s^2,\ (a+b)^2,\ (a+c)^2, \ldots (a+n)^2,\ (a+s)^2,\ (b+c)^2, \ldots$$
$$(b+n)^2,\ (b+s)^2,\ (c+d)^2, \ldots$$

für jede Bedingungsgleichung in eine Zeile und zwar alle zusammengehörigen der verschiedenen Bedingungsgleichungen untereinander, bildet dann die Summen

$$[a^2],\ [b^2],\ [c^2] \ldots [n^2],\ [s^2],\ [(a+b)^2],\ [(a+c)^2], \ldots$$

und dann erhält man aus diesen Summen (ohne die Vermittelung der einzelnen Produkte ab, ac ...) die Summen $[ab]$ ... nach (8).

Die Auflösung der Normalgleichungen wird sehr einfach mittels Determinanten[1]). Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} [aa][ab][ac] \ldots [ai] \ldots \\ [ab][bb][bc] \ldots [bi] \ldots \\ [ac][bc][cc] \ldots [ci] \ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{vmatrix} = D \tag{9}$$

und die Unterdeterminante D_{ik} der einzelnen Elemente mit

$$\begin{array}{l} D_{11} D_{12} D_{13} \ldots D_{1i} \\ D_{21} D_{22} D_{23} \ldots D_{2i} \\ D_{31} D_{32} D_{33} \ldots D_{3i} \end{array} \tag{9a}$$

wobei die Indices 1, 2, 3 ... i den Buchstaben $a, b, c, \ldots i$ in den Coëfficienten der Normalgleichungen entsprechen; ferner

$$\frac{D_{ik}}{D} = \nabla_{ik}, \tag{9b}$$

so erhält man

$$\begin{array}{l} x = \nabla_{11}[an] + \nabla_{12}[bn] + \nabla_{13}[cn] + \ldots \\ y = \nabla_{21}[an] + \nabla_{22}[bn] + \nabla_{23}[cn] + \ldots \\ z = \nabla_{31}[an] + \nabla_{32}[bn] + \nabla_{33}[cn] + \ldots \\ \ldots\ldots \end{array} \tag{10}$$

---

[1]) Der erste Versuch hierfür (bei drei Unbekannten) rührt von JACOBI her.

Da die Determinante D symmetrisch ist, so sind bei n Unbekannnten nur $\frac{1}{2}n(n+1)$ Minoren zu rechnen; die Determinante D bestimmt sich aus diesen durch

$$\begin{aligned} D &= D_{11}[aa] + D_{12}[ab] + D_{13}[ac] + \ldots . \\ &= D_{21}[ab] + D_{22}[bb] + D_{23}[bc] + \ldots . \\ &= D_{i1}[ai] + D_{i2}[bi] + D_{i3}[ci] + \ldots ., \end{aligned} \tag{11}$$

während man als Probegleichungen auch einzelne der folgenden benützen kann, in denen i, k irgend welche zwei Indices bedeuten, die von einander verschieden sind:

$$D_{i1}[ak] + D_{i2}[bk] + D_{i3}[ck] + \ldots . = 0. \tag{11a}$$

1) Hat man drei Unbekannte, so sind nur sechs zweigliedrige Determinanten

$$D_{ik} = \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

zu berechnen.

2) Bei vier Unbekannten sind zehn Unterdeterminanten dritter Ordnung zu berechnen; dies geschieht am einfachsten in folgender Weise: Man wiederhole die Elemente der ersten und zweiten Zeile nach links, bezw. nach rechts, und verschiebe jede Zeile um ein Element nach links bezw. rechts nach dem folgenden Schema:

$$D_{ik} = \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix}; \qquad \begin{matrix} b_{12} b_{13} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{23} b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} b_{12} b_{13} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} b_{23} b_{21} \\ b_{31} b_{32} b_{33}. \end{matrix}$$

Dann giebt das Produkt von je drei übereinanderstehenden Gliedern (Summe der Logarithmen) der ersten Anordnung (Verschiebung nach links) ein positives Glied, und das Produkt von je drei übereinanderstehenden Gliedern der zweiten Anordnung (Verschiebung nach rechts) ein negatives Glied der Determinante; also[1]):

$$\Delta = b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} + b_{11}b_{22}b_{33} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}.$$

Aus einer viergliedrigen Determinante kann man bei einiger Uebung dadurch, dass man jede Horizontalzeile auf einen Zettel schreibt, und diese passend übereinander schiebt, die Unterdeterminanten direkt erhalten.

3) Sind mehr als 4 Unbekannte, so wird man auf Unterdeterminanten höherer Ordnung geführt, für welche sich aber kein einfacher Algorithmus angeben lässt. Man kann aber alle Determinanten auf Determinanten dritter Ordnung zurückführen, indem man von dem Satze Gebrauch macht, dass eine Determinante ungeändert bleibt, wenn man alle Elemente einer beliebigen Zeile (oder Columne) mit einer beliebigen Zahl multiplicirt, und zu einer anderen Zeile (oder Columne) addirt. Multiplicirt man in D die erste Zeile mit $\mu_{12} = \frac{[ab]}{[aa]}$ und subtrahirt von der zweiten; dann mit $\mu_{13} = \frac{[ac]}{[aa]}$ und subtrahirt von der dritten u. s. w. und setzt:

$$\begin{aligned} &[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb1]; \quad [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc1]; \ \ldots \\ &[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc1]; \quad [cd] - \frac{[ac]}{[aa]}[ad] = [cd1]; \ \ldots \\ &[dd] - \frac{[ad]}{[aa]}[ad] = [dd1]; \quad [de] - \frac{[ad]}{[aa]}[ae] = [de1]; \ \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

[1]) Bezüglich der Begründung dieses Algorithmus s. die Handbücher der Mathematik, z. B. GORDAN's Vorlesungen über die Invariantentheorie, I. Bd., pag. 16 und pag. 59.

$$\text{allgemein:}\quad [kl] - \frac{[ak]}{[aa]}[al] = [kl1],$$

so erhält man:

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & \dots \\ 0 & [bb1] & [bc1] & [bd1] & \dots \\ 0 & [bc1] & [cc1] & [cd1] & \dots \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \end{vmatrix} \tag{9a}$$

Multiplicirt man hier die zweite Zeile mit $\mu_{23} = \frac{[bc1]}{[bb1]}$ und substrahirt von der dritten, dann mit $\mu_{24} = \frac{[bd1]}{[bb1]}$ und substrahirt von der vierten, und setzt:

$$\begin{aligned} &[cc1] - \frac{[bc1]}{[bb1]}[bc1] = [cc2]; \quad [cd1] - \frac{[bc1]}{[bb1]}[bd1] = [cd2] \\ &[dd1] - \frac{[bd1]}{[bb1]}[bd1] = [dd2]; \quad [de1] - \frac{[bd1]}{[bb1]}[be1] = [de2] \\ &\qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned} \tag{12a}$$

$$\text{allgemein:}\quad [kl1] - \frac{[bk1]}{[bb1]}[bl1] = [kl2],$$

so erhält man weiter:

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & \dots \\ 0 & [bb1] & [bc1] & [bd1] & \dots \\ 0 & 0 & [cc2] & [cd2] & \dots \\ 0 & 0 & [cd2] & [dd2] & \dots \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \end{vmatrix} \tag{9b}$$

Indem man so weiter verfährt, erhält man, wenn die Zahl der Unbekannten r ist und die Coëfficienten der fünf letzten Unbekannten mit i, j, k, l, m bezeichnet werden:

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & \dots & [ai] & [aj] & [ak] & [al] & [am] \\ 0 & [bb1] & [bc1] & [bd1] & \dots & [bi1] & [bj1] & [bk1] & [bl1] & [bm1] \\ 0 & 0 & [cc2] & [cd2] & \dots & [ci2] & [cj2] & [ck2] & [cl2] & [cm2] \\ & & & & \cdot\ \vdots\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & [ii\overline{r-5}] & [ij\overline{r-5}] & [ik\overline{r-5}] & [il\overline{r-5}] & [im\overline{r-5}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & [jj\overline{r-4}] & [jk\overline{r-4}] & [jl\overline{r-4}] & [jm\overline{r-4}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & [jk\overline{r-4}] & [kk\overline{r-4}] & [kl\overline{r-4}] & [km\overline{r-4}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & [jl\overline{r-4}] & [kl\overline{r-4}] & [ll\overline{r-4}] & [lm\overline{r-4}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & [jm\overline{r-4}] & [km\overline{r-4}] & [lm\overline{r-4}] & [mm\overline{r-4}] \end{vmatrix} \tag{9c}$$

Entwickelt man diese Determinante nach der ersten Columne, so bleibt nur $[aa]$, multiplicirt mit der zugehörigen Unterdeterminante; diese selbst ist gleich $[bb1]$ multiplicirt mit der zugehörigen Unterdeterminante u. s. w., so dass

$$D = [aa]\,[bb1]\,[cc2]\dots[ii\overline{r-5}] \begin{vmatrix} [jj\overline{r-4}] & [jk\overline{r-4}] & [jl\overline{r-4}] & [jm\overline{r-4}] \\ [jk\overline{r-4}] & [kk\overline{r-4}] & [kl\overline{r-4}] & [km\overline{r-4}] \\ [jl\overline{r-4}] & [kl\overline{r-4}] & [ll\overline{r-4}] & [lm\overline{r-4}] \\ [jm\overline{r-4}] & [km\overline{r-4}] & [lm\overline{r-4}] & [mm\overline{r-4}] \end{vmatrix} \tag{9d}$$

bleibt. Die Unterdeterminante irgend eines Elementes $[ii']$ wird aber erhalten, indem man die zu diesem Elemente gehörige $i$te Zeile und i'te Columne weglässt, und mit $(-1)^{i+i'}$ multiplicirt; man erhält daher für die Unterdeterminanten der 16 Elemente der rechten unteren Ecke genau dieselbe Form, in

welcher nur eine Zeile und Columne in (9 d) fehlt; es wird beispielsweise die Unterdeterminante des Elementes $[km]$

$$D_{km} = [aa]\,[bb1]\,[cc2]\ldots[\overline{iir-5}]\begin{vmatrix}[\overline{jjr-4}] & [\overline{jlr-4}] & [\overline{jmr-4}]\\ [\overline{jkr-4}] & [\overline{klr-4}] & [\overline{kmr-4}]\\ [\overline{jlr-4}] & [\overline{llr-4}] & [\overline{lmr-4}]\end{vmatrix}$$

Das Rechnungsschema wird sich demnach am zweckmässigsten folgendermaassen schreiben lassen:

	$[aa]$ $log[aa]$	$[ab]$ $log[ab]$	$[ac]$ $log[ac]$	$[ad]$ $log[ad]$	$[ae]$ $log[ae]$	...	$[an]$ $log[an]$	$[as]$ $log[as]$
$log\frac{[ab]}{[aa]} = log\,\mu_{12}$		$[bb]$ $\mu_{12}[ab]$	$[bc]$ $\mu_{12}[ac]$	$[bd]$ $\mu_{12}[ad]$	$[be]$ $\mu_{12}[ae]$	...	$[bn]$ $\mu_{12}[an]$	$[bs]$ $\mu_{12}[as]$
$log\frac{[ac]}{[aa]} = log\,\mu_{13}$			$[cc]$ $\mu_{13}[ac]$	$[cd]$ $\mu_{13}[ad]$	$[ce]$ $\mu_{13}[ae]$	...	$[cn]$ $\mu_{13}[an]$	$[cs]$ $\mu_{13}[as]$
...				..	..	...	..	..
		$[bb1]$ $log[bb1]$	$[bc1]$ $log[bc1]$	$[bd1]$ $log[bd1]$	$[be1]$ $log[be1]$	...	$[bn1]$ $log[bn1]$	$[bs1]$ $log[bs1]$
$log\frac{[bc1]}{[bb1]} = log\,\mu_{23}$			$[cc1]$ $\mu_{23}[bc1]$	$[cd1]$ $\mu_{23}[bd1]$	$[ce1]$ $\mu_{23}[be1]$	...	$[cn1]$ $\mu_{23}[bn1]$	$[cs1]$ $\mu_{23}[bs1]$
$log\frac{[bd1]}{[bb1]} = log\,\mu_{24}$				$[dd1]$ $\mu_{24}[bd1]$	$[de1]$ $\mu_{24}[be1]$	...	$[dn1]$ $\mu_{24}[bn1]$	$[ds1]$ $\mu_{24}[bs1]$
...				..	..	...	..	..
			$[cc2]$ $log[cc2]$	$[cd2]$ $log[cd2]$	$[ce2]$ $log[ce2]$	...	$[cn2]$ $log[cn2]$	$[cs2]$ $log[cs2]$
$log\frac{[cd2]}{[cc2]} = log\,\mu_{34}$				$[dd2]$ $\mu_{34}[cd2]$	$[de2]$ $\mu_{34}[ce2]$	...	$[dn2]$ $\mu_{34}[cn2]$	$[ds2]$ $\mu_{34}[cs2]$
...				. .	. ..	... ...	..	..

Hat man sechs Unbekannte, so wird eine zweimalige Anwendung dieses Verfahrens bis zur Form (9 d) führen; man erhält aber nur die Unterdeterminanten der rechten unteren Ecke. Eine Determinante bleibt aber dem Werthe nach ungeändert, und erhält nur den Faktor $\pm$ 1, wenn man Zeilen und Columnen vertauscht. Es ist für eine Determinante mit r^2 Gliedern:

$$D = (-1)^r \begin{vmatrix}[am] & [bm] & \ldots & [mm]\\ [al] & [bl] & \ldots & [lm]\\ & \ldots & & \\ & \ldots & & \\ [aa] & [ab] & \ldots & [am]\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}[mm] & [lm] & \ldots & [am]\\ [lm] & [ll] & \ldots & [al]\\ & \ldots & & \\ & \ldots & & \\ [am] & [al] & \ldots & [aa]\end{vmatrix}$$

wodurch man weitere 32 Unterdeterminanten auf dieselbe Weise erhält[1]). Sind

[1]) Bei nicht symmetrischen Determinanten kann man auf dieselbe Weise sämmtliche 64 Unterdeterminanten der vier Ecken erhalten; bei mehr als 8 Unbekannten werden auch Zeilen und Columnen aus der Mitte an den Anfang zu setzen sein, wobei man auf das Zeichen je nach der Zahl der Vertauschungen zu achten hat (vergl. meine »Bahnbestimmung des Kometen von 1811«, l. c., pag. 235).

daher nicht mehr als acht Unbekannte, so erhält man auf diese Weise sämmtliche Unterdeterminanten, und wenn weniger als acht Unbekannte sind, einzelne doppelt, was zur Controlle dienen kann.

In dem obigen Schema sind noch zwei Columnen zum Schlusse angefügt, welche bei der Berechnung der Determinanten wegbleiben, jedoch bei der folgenden Methode in Verwendung kommen, die sich für denjenigen, welcher mit der Rechnung mit Determinanten nicht genügend vertraut ist, als praktischer erweist.

Wendet man auf die Gleichungen (6) die durch (12) angezeigten Operationen an, indem man die mit μ_{12} multiplicirte erste Gleichung von der zweiten abzieht, die mit μ_{13} multiplicirte erste Gleichung von der dritten u. s. w. und setzt noch

$$[bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an] = [bn1]; \quad [cn] - \frac{[ac]}{[aa]}[an] = [cn1] \ldots, \tag{13a}$$

so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} [bb1]y + [bc1]z + \ldots &= [bn1] \\ [bc1]y + [cc1]z + \ldots &= [cn1]. \\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

Wendet man auf diese Gleichungen wieder die durch (12a) angezeigten Operationen an, und setzt:

$$[cn1] - \frac{[bc1]}{[bb1]} = [cn2]; \quad [dn1] - \frac{[bd1]}{[bb1]} = [dn2], \tag{13b}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} [cc2]z + [cd2]u + \ldots &= [cn2] \\ [cd2]z + [dd2]u + \ldots &= [dn2]. \\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

Schreibt man von diesen Gleichungen je die erste an, so erhält man das System

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]u + \ldots\ldots &= [an] \\ [bb1]y + [bc1]z + [bd1]u + \ldots\ldots &= [bn1] \\ [cc2]z + [cd2]u + \ldots\ldots &= [cn2] \\ [dd3]u + \ldots\ldots &= [dn3] \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{aligned} \tag{14}$$

von denen jede folgende um eine Unbekannte weniger enthält wie die vorhergehende, weshalb man sie Eliminationsgleichungen nennt. Die letzte enthält daher nur eine Unbekannte, die daraus bestimmt werden kann. Substituirt man ihren Werth in die Vorhergehende, so erhält man eine zweite Unbekannte; durch Substitution der beiden erhaltenen in die nächst früheren wieder eine Unbekannte u. s. w.; schliesslich aus der vierten angeschriebenen u, dann aus der dritten z, aus der zweiten y, endlich aus der ersten x.

Dieser von GAUSS eingeschlagene Vorgang ist demnach dem Wesen nach identisch mit dem früheren, bricht aber nicht dort ab, wo man die Determinanten vierter Ordnung erhält, sondern führt die Elimination noch weiter. Bei mehr als acht Unbekannten wird daher diese Elimination bis zum Schlusse nicht viel mehr Mühe machen, als die Bestimmung von etwa 32 Unterdeterminanten (von zwei Ecken); die Berechnung der Gleichungen (13a), (13b) wird dabei gleichzeitig mit den Gleichungen (12), (12a) vorgenommen, und zwar in den im Schema den Summen $[an]$, $[bn]$ ... $[bn1]$ ... vorbehaltenen Columnen; über dies ist noch eine letzte Columne für die gleichen Operationen mit den $[as]$

$[bs] \ldots [bs1]$ reservirt, welche zur Prüfung dienen. Bestimmt man nämlich die Grössen:

$$[bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] = [bs1]; \qquad [cs] - \frac{[ac]}{[aa]}[as] = [cs1] \ldots$$
$$[cs1] - \frac{[bc1]}{[bb1]}[bs1] = [cs2] \ldots\ldots,$$

so hat man, wie man leicht findet, die Probegleichungen:

$$\begin{aligned} [bs1] &= [bb1] + [bc1] + \ldots\ldots \\ [cs1] &= [bc1] + [cc1] + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ [cs2] &= [cc2] + [cd2] + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{15}$$

Das Schema der Berechnung der $[an1]$, $[as1]$ unterscheidet sich demnach nicht von demjenigen für die Berechnung der übrigen Coëfficienten, und die Operationen können auf die beiden letzten Columnen für sich allein auch nach unten weiter fortgesetzt werden, wobei man schliesslich bei r Unbekannten nach r-maliger Anwendung der Operationen

$$[nnr] = [nsr]$$

erhalten muss.

Diese Methode hat aber den Nachtheil, dass sie die Unbekannten nicht independent giebt; die independente Darstellung ist aber insbesondere von Werth, wenn es sich um die Bestimmung der Gewichte und wahrscheinlichen Fehler der Unbekannten handelt.

Die in den Unbekannten $x, y, z \ldots$ resultirenden Fehler rühren von den Beobachtungsfehlern her, welche den V anhaften, welche aber voll und unverändert in die n übergehen; da die Gleichungen (4) mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten multiplicirt gedacht sind, so werden in den so transformirten Gleichungen die absoluten Beträge n auf die Gewichtseinheit reducirt, daher mit demselben wahrscheinlichen oder mittleren Fehler behaftet sein. Ist ε der mittlere Fehler jedes n[1]), so können daraus die mittleren Fehler der Unbekannten nach 8 (3a) abgeleitet werden, wenn diese als lineare Functionen der n ausgedrückt sind. Sei also

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}n_2 + \alpha_{13}n_3 + \ldots. \\ y &= \alpha_{21}n_1 + \alpha_{22}n_2 + \alpha_{23}n_3 + \ldots. \\ z &= \alpha_{31}n_1 + \alpha_{32}n_2 + \alpha_{33}n_3 + \ldots. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{16}$$

so werden sich die mittleren Fehler

$$\varepsilon_x^2 = (\alpha_{11}\varepsilon)^2 + (\alpha_{12}\varepsilon)^2 + (\alpha_{13}\varepsilon)^2 + \ldots$$

und ebenso für $\varepsilon_y, \varepsilon_z \ldots$ ergeben, daher

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 &= (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \ldots)\,\varepsilon^2 \\ \varepsilon_y^2 &= (\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 + \ldots)\,\varepsilon^2 \\ \varepsilon_z^2 &= (\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 + \ldots)\,\varepsilon^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Vergleicht man die Darstellung (16) mit derjenigen in (10), in welchen die n ebenfalls nur in linearen Verbindungen vorkommen, so findet man, indem dort die Summen $[an]$, $[bn]$, $[cn] \ldots$ aufgelöst werden:

---

[1]) Vor der Multiplikation sind die mittleren Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ daher nach der Multiplikation $\sqrt{p_1}\varepsilon_1, \sqrt{p_2}\varepsilon_2, \ldots$ welche sämmtlich nach 2 (13) gleich ε sind.

$$\begin{aligned} \alpha_{\iota 1} &= \nabla_{\iota 1} a_1 + \nabla_{\iota 2} b_1 + \nabla_{\iota 3} c_1 + \dots \\ \alpha_{\iota 2} &= \nabla_{\iota 1} a_2 + \nabla_{\iota 2} b_2 + \nabla_{\iota 3} c_2 + \dots \\ \alpha_{\iota 3} &= \nabla_{\iota 1} a_3 + \nabla_{\iota 2} b_3 + \nabla_{\iota 3} c_3 + \dots \\ & \dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{17}$$

Würde man hier quadriren, so würden sich rechts nicht so einfach zu reducirende Ausdrücke ergeben. Multiplicirt man aber die erste Gleichung mit $\alpha_{\iota 1}$, die zweite mit $\alpha_{\iota 2}$, u. s. w. . . . die $\varkappa$te mit $\alpha_{\iota\varkappa}$ und addirt, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha_{\iota 1}^2 + \alpha_{\iota 2}^2 + \dots + \alpha_{\iota\varkappa}^2 + \dots = & \Delta_{\iota 1}(a_1 \alpha_{\iota 1} + a_2 \alpha_{\iota 2} + a_3 \alpha_{\iota 3} + \dots) \\ & + \Delta_{\iota 2}(b_1 \alpha_{\iota 1} + b_2 \alpha_{\iota 2} + b_3 \alpha_{\iota 3} + \dots) \\ & + \Delta_{\iota 3}(c_1 \alpha_{\iota 1} + c_2 \alpha_{\iota 2} + c_3 \alpha_{\iota 3} + \dots) \\ & + \dots\dots \end{aligned} \tag{17a}$$

Um die rechts auftretenden Summen in den Klammern zu entwickeln, multiplicirt man die Gleichungen (17) der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3 . . . dann mit b_1, b_2, b_3 . . . u. s. w. und erhält:

$$\begin{aligned} a_1 \alpha_{\iota 1} + a_2 \alpha_{\iota 2} + a_3 \alpha_{\iota 3} + \dots &= \nabla_{\iota 1}[aa] + \nabla_{\iota 2}[ab] + \nabla_{\iota 3}[ac] + \dots \\ b_1 \alpha_{\iota 1} + b_2 \alpha_{\iota 2} + b_3 \alpha_{\iota 3} + \dots &= \nabla_{\iota 1}[ab] + \nabla_{\iota 2}[bb] + \nabla_{\iota 3}[bc] + \dots \\ c_1 \alpha_{\iota 1} + c_2 \alpha_{\iota 2} + c_3 \alpha_{\iota 3} + \dots &= \nabla_{\iota 1}[ac] + \nabla_{\iota 2}[bc] + \nabla_{\iota 3}[cc] + \dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{17b}$$

Gemäss (11a) verschwinden hier die rechten Seiten für alle Combinationen mit Ausnahme derjenigen, in denen $[ai]$, $[bi]$, $[ci]$ . . . (i das Element der ιten Zeile) auftritt, und diese wird gemäss (11) gleich 1[1]); es wird daher:

$$\alpha_{\iota 1}^2 + \alpha_{\iota 2}^2 + \alpha_{\iota 3}^2 \dots = \nabla_{\iota\iota} \tag{17c}$$

demnach

$$\varepsilon_x^2 = \nabla_{11}\varepsilon^2; \quad \varepsilon_y^2 = \nabla_{22}\varepsilon^2; \quad \varepsilon_z^2 = \nabla_{33}\varepsilon^2 \dots . \tag{18}$$

oder die Gewichte der Unbekannten

$$p_x = \frac{1}{\nabla_{11}}; \quad p_y = \frac{1}{\nabla_{22}}; \quad p_z = \frac{1}{\nabla_{33}} \dots , \tag{18a}$$

d. h. die Gewichte der Unbekannten sind gleich den reciproken Werthen der durch die Determinante D dividirten Unterdeterminanten der Diagonalreihe, und zwar derjenigen Unterdeterminante, welche aus der zur betreffenden Unbekannten gehörigen Zeile (Normalgleichung) entnommen ist.

Hat man die Normalgleichungen nicht unbestimmt aufgelöst, sondern nach der GAUSS'schen Methode, so erhält man die Gewichte nicht unmittelbar; setzt man in (10): $[an] = 1$, $[bn] = [cn] = \dots = 0$, so folgt $x = \nabla_{11}$, d. h. ∇_{11} oder der reciproke Werth des Gewichts von x ist derjenige Werth von x, welchen man erhält, wenn man in den Normalgleichungen (6) an Stelle der rechten Seite in der Normalgleichung für x die Einheit, in den übrigen die Null setzt; ebenso erhält man den reciproken Werth des Gewichtes irgend einer andern Unbekannten, wenn man in der Normalgleichung für diese Unbekannte die rechte Seite gleich 1 setzt, und die übrigen Null, u. s. w. Will man daher nach der GAUSS'schen Methode verfahren, so wird man in dem Schema auf pag. 48 zweckmässig bei r Unbekannten noch r Columnen hinzufügen, von denen jede einer der Combinationen:

$$\begin{aligned} [an] = 1, \quad [bn] = 0, \quad [cn] = 0, \quad [dn] = 0 \\ [an] = 0, \quad [bn] = 1, \quad [cn] = 0, \quad [dn] = 0 \\ [an] = 0, \quad [bn] = 0, \quad [cn] = 1, \quad [dn] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

---

[1]) Produkte von Minoren einer Elementenreihe mit dieser selbst; im ersten Falle mit anderen Elementenreihen.

entspricht. Um die mittleren Fehler ε_x, ε_y, ε_z ... zu bestimmen, ist noch die Kenntniss von ε nöthig. Hat man ursprünglich die Gewichte p aus den vorher bekannten mittleren Fehlern ε_1, ε_2, ε_3 ... der beobachteten Werthe V_1, V_2, V_3 ... bestimmt, so wird man $\varepsilon = \sqrt{p_i}\,\varepsilon_i$ kennen; man kann aber ε aus der Uebereinstimmung der Resultate selbst finden. Setzt man die gefundenen Werthe x, y, z ... der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen (4) ein, so erhält man die übrigbleibenden Fehler:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + \ldots - n_1 \\ v_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + \ldots - n_2 \\ v_3 &= a_3x + b_3y + c_3z + \ldots - n_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4a}$$

die nur dann Null sein würden, wenn die Beobachtungen fehlerfrei wären. Da die Gleichungen (4) auf die Gewichtseinheit reducirt sind, so könnte man sofort den mittleren Fehler ε der Gewichtseinheit aus der Fehlerquadratsumme $[vv]$ ermitteln. Nach dem Begriffe des mittleren Fehlers ist, wenn ρ die Zahl der Bedingungsgleichungen ist:

$$\varepsilon^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{\rho},$$

wobei Δ die wahren Beobachtungsfehler sind, die man aber nicht kennt; diese würden sich aus den Gleichungen (4) ergeben, wenn man für x, y, z ... ihre wahren Werthe $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ ... an Stelle der gefundenen, wahrscheinlichsten Werthe x, y, z ... substituiren würde; es wäre also:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1(x+\xi) + b_1(y+\eta) + c_1(z+\zeta) + \ldots - n_1 \\ \Delta_2 &= a_2(x+\xi) + b_2(y+\eta) + c_2(z+\zeta) + \ldots - n_2 \\ \Delta_3 &= a_3(x+\xi) + b_3(y+\eta) + c_3(z+\zeta) + \ldots - n_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4b}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (4a) und (4b) der Reihe nach mit Δ_1, Δ_2, Δ_3 .... und addirt, so erhält man

$$\begin{aligned} [v\Delta] &= [a\Delta]x + [b\Delta]y + [c\Delta]z \ldots - [n\Delta] \\ [\Delta\Delta] &= [a\Delta](x+\xi) + [b\Delta](y+\eta) + [c\Delta](z+\zeta) + \ldots - [n\Delta], \end{aligned}$$

aus welchen man durch Subtraction:

$$[\Delta\Delta] = [v\Delta] + [a\Delta]\xi + [b\Delta]\eta + [c\Delta]\zeta + \ldots \tag{20}$$

erhält. Multiplicirt man aber die Gleichungen (4a), (4b), bezw. mit v_1, v_2, v_3 .... und addirt, so folgt wegen (5b):

$$[vv] = -[nv]; \quad [v\Delta] = -[nv],$$

demnach

$$[v\Delta] = [vv]$$

und damit aus (20):

$$[\Delta\Delta] = [vv] + [a\Delta]\xi + [b\Delta]\eta + [c\Delta]\zeta + \ldots \tag{20a}$$

Die Bestimmung von $[vv]$ ist einfach; es war oben gefunden: $[vv] = -[nv]$; multiplicirt man nun die Gleichungen (4a) der Reihe nach mit $-n_1$, $-n_2$, $-n_3$ ... und addirt, so folgt:

$$-[nv] = [nn] - [an]x - [bn]y - [cn]z - \ldots$$

folglich

$$[vv] = [nn] - [an]x - [bn]y - [cn]z - \ldots \tag{21}$$

Hat man die Unbekannten nach der Gauss'schen Methode bestimmt, so lässt sich diese Gleichung noch vereinfachen; substituirt man nämlich x aus der ersten Eliminationsgleichung (14), so wird

$$[vv] = [nn] - [bn]y - [cn]z \dots\dots$$
$$- [an]\frac{[an]}{[aa]} - \frac{[an]}{[aa]}[ab]y - \frac{[an]}{[aa]}[ac]z \dots\dots$$
$$= [nn1] - [bn1]y - [cn1]z \dots\dots$$

und wenn man hier für y aus der zweiten Eliminationsgleichung (14) substituirt:

$$[vv] = [nn2] - [cn2]z - \dots\dots$$

In dieser Weise fortfahrend erhält man schliesslich bei r Unbekannten

$$[vv] = [nnr]. \tag{21a}$$

$[vv]$ kann demnach in Gleichung (20a) als bekannt angesehen werden; zwischen den Grössen ξ, η, ζ .... und den wahren Beobachtungsfehlern Δ, welche noch in (20a) auftreten, kann man noch einfache Relationen aufstellen; multiplicirt man die Gleichungen (4b) bezw. mit a_1, a_2, a_3 .... und addirt, ferner mit b_1, b_2, b_3 .... und addirt u. s. w., so folgt mit Rücksicht auf die Normalgleichungen (6), welchen die in (4b) auftretenden x genügen müssen:

$$\begin{aligned} [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta + \dots\dots &= [a\Delta] \\ [ab]\xi + [bb]\eta + [bc]\zeta + \dots\dots &= [b\Delta] \\ [ac]\xi + [bc]\eta + [cc]\zeta + \dots\dots &= [c\Delta] \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{20b}$$

Man könnte die Ausdrücke für $[a\Delta]$, $[b\Delta]$ ... in (20a) substituiren, wodurch die unbekannten, wahren Beobachtungsfehler eliminirt wären; dann braucht man aber die ξ, η, ζ, deren Werthe vollständig unbekannt sind, während man, wenn auch nicht die Grösse der einzelnen Δ, so doch die allgemeine Vertheilung und den durchschnittlichen Werth derselben kennt. Es wird daher besser, die ξ, η, ζ aus (20b) auszudrücken, und deren Werthe in (20a) zu substituiren. Aber die Gleichungen (20b) sind genau dieselben Gleichungen wie die Normalgleichungen, nur tritt an Stelle der Unbekannten x, y, z ... überall ξ, η, ζ und an Stelle der n treten die Δ; hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_{11}\Delta_1 + \alpha_{12}\Delta_2 + \alpha_{13}\Delta_3 + \dots \\ \eta &= \alpha_{21}\Delta_1 + \alpha_{22}\Delta_2 + \alpha_{23}\Delta_3 + \dots \\ \zeta &= \alpha_{31}\Delta_1 + \alpha_{32}\Delta_2 + \alpha_{33}\Delta_3 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{16a}$$

wo die α dieselbe Bedeutung haben, wie früher in (16), sodass für dieselben die Gleichungen (17), (17a), (17b), bestehen. Hiernach wird:

$$[a\Delta]\xi = (a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + a_3\Delta_3 + \dots)(\alpha_{11}\Delta_1 + \alpha_{12}\Delta_2 + \alpha_{13}\Delta_3 + \dots)$$
$$= a_1\alpha_{11}\Delta_1^2 + a_2\alpha_{12}\Delta_2^2 + a_3\alpha_{13}\Delta_3^2 + \dots\dots + \Sigma a_\iota \alpha_{\iota\varkappa}\Delta_\iota\Delta_\varkappa.$$

Die letzte Summe enthält nur die Combinationen aller wahren Beobachtungsfehler Δ_ι und muss daher, der Natur derselben gemäss, verschwinden; in der ersten Summe treten die Quadrate der einzelnen Beobachtungsfehler auf, und man kann, da ξ jedenfalls nur äusserst klein ist, an Stelle derselben einen mittleren Werth dieses Quadrates, d. i. das Quadrat der mittleren Fehler der Gleichungen (4), also ε^2 setzen, und erhält dann mit Berücksichtigung von (17b) und (11a):

$$[a\Delta]\xi = (a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{12} + a_3\alpha_{13} + \dots)\,\varepsilon^2 = \varepsilon^2.$$

Dasselbe gilt für die übrigen Summen $[b\Delta]\eta$, $[c\Delta]\zeta$ .... und da deren Zahl gleich der Zahl r der Unbekannten ist, so folgt aus (20a) mit Rücksicht auf (19):

$$\rho \varepsilon^2 = [vv] + r\varepsilon^2$$

$$\varepsilon^2 = \frac{[vv]}{\rho - r}, \tag{22}$$

wobei ρ die Zahl der Bedingungsgleichungen und r die Zahl der Unbekannten ist, und $[vv]$ durch (21) oder (21a) bestimmt ist. Als durchgreifende Prüfung der ganzen Ausgleichung kann man die Unbekannten in die Bedingungsgleichungen (4) substituiren, und daraus die übrigbleibenden Fehler v einzeln bestimmen, daraus $[vv]$ bilden, welches sich innerhalb der Unsicherheit der Rechnung mit dem aus (21) oder (21a) folgenden Werthe decken muss.

Unterliegt die Bestimmung einzelner Unbekannten einer besonderen Unsicherheit, so wird diese nothwendig die übrigen Unbekannten mit beeinflussen, denn man erhält immer nur zusammengehörige Werthesysteme. Ist nicht von vornherein bekannt, dass und welche Werthe unsicher erhalten werden (z. B. der Uhrgang oder die stündliche Azimuthänderung bei Beobachtungen am Meridiankreise, wenn diese nur einen kurzen Zeitraum umfassen), so wird es sich im Verlaufe der Rechnung zeigen, indem die Coëfficienten dieser Unbekannten sehr klein werden. In diesem Falle wird man die Ausgleichung wiederholen, indem man alle Unbekannten als Functionen dieser Elemente darstellt. Seien diese Unbekannten u, w, so werden die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots &= [an] - [al]u - [am]w \\
[ab]x + [bb]y + [bc]z + \ldots &= [bn] - [bl]u - [bm]w \\
[ac]x + [bc]y + [cc]z + \ldots &= [cn] - [cl]u - [cm]w \qquad (23 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen unterliegt keiner Schwierigkeit; man erhält entweder nach der GAUSS'schen Methode oder durch Determinanten:

$$\begin{aligned}
x &= \nabla_{11}[an] + \nabla_{12}[bn] + \ldots - \{\nabla_{11}[al] + \nabla_{12}[bl] + \ldots\}u - \{\nabla_{11}[am] + \nabla_{12}[bm] + \ldots\}w \\
y &= \nabla_{12}[an] + \nabla_{22}[bn] + \ldots - \{\nabla_{12}[al] + \nabla_{22}[bl] + \ldots\}u - \{\nabla_{12}[am] + \nabla_{22}[bm] + \ldots\}w \qquad (24) \\
z &= \nabla_{13}[an] + \nabla_{23}[bn] + \ldots - \{\nabla_{13}[al] + \nabla_{23}[bl] + \ldots\}u - \{\nabla_{13}[am] + \nabla_{23}[bm] + \ldots\}w \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

wobei natürlich die ∇_{11}, ∇_{12}, ∇_{13} ... jetzt die Minoren der Determinante $(r-2)$ten Grades von den $r-2$ ersten Unbekannten sind; (die Normalgleichungen für u, w brauchen nicht aufgestellt zu werden). Substituirt man diese Werthe in die Bedingungsgleichungen, so erhält man wieder ρ Bedingungsgleichungen zwischen den beiden Unbekannten u, w (und ganz ähnlich, wenn drei oder mehr Unbekannte ausgeschaltet werden mussten); in diesen können die Coëfficienten so klein sein, dass an eine Bestimmung der Unbekannten nicht zu denken ist; dann wird man sich für u, w auf anderem Wege Werthe zu verschaffen suchen (im vorigen Beispiel z. B. für den Uhrgang) oder aber, man wird anderweitig bekannte Werthe annehmen müssen: gleich Null, wenn die angenommenen Näherungen für die betreffenden Unbekannten selbst die bis dahin besten bekannten Werthe wären, und durch Substitution dieser Ausdrücke in (14) x, y, z ... berechnen. In jedem Falle erhält man in den Gleichungen (24) den Einfluss, welchen die u, w, d. h. Aenderungen in den diesen entsprechenden Unbekannten auf die übrigen Unbekannten haben. Sind die Coëfficienten jedoch ausreichend gross, um an eine gute Bestimmung der u, w schreiten zu können[1]), so ist die bei der ersten Ausgleichung erhaltene Un-

---

[1]) Nahe Proportionalität der Coëfficienten gestattet nur die Bestimmung von $u \pm w$, kann aber nur auftreten, wenn dieselbe bereits in den ursprünglichen Bedingungsgleichungen vorhanden war.

sicherheit nur eine Folge der vielen Zwischenoperationen, und man kann jetzt u, w aus diesen ρ Bedingungsgleichungen direkt durch Aufstellung zweier Normalgleichungen für u, w bestimmen, und dann die erhaltenen Werthe zur Ermittelung von x, y, z . . . aus (23) verwenden.

5. Beispiel. Die auf pag. 15 gegebenen Bedingungsgleichungen geben unter der Voraussetzung gleicher Gewichte die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 5\Delta x - 2{\cdot}715\xi - 1{\cdot}670n &= +1{\cdot}348 \\ -2{\cdot}715\Delta x + 14{\cdot}821\xi - 6{\cdot}610n &= -4{\cdot}4049 \\ -1{\cdot}670\Delta x - 6{\cdot}610\xi + 13{\cdot}841n &= +4{\cdot}3387. \end{aligned}$$

Nach der Gauss'schen Methode wird daher die Rechnung (die Logarithmen in Klammern eingeschlossen):

	+5 (0·6990)	−2·715 (0_n4338)	−1·670 (0_n2227)	+1·348 (0·1297)
(9_n7348)		+14·821 +1·475	−6·610 +0·907	−4·405 −0·732
(9_n5287)			+13·841 +0·558	+4·339 −0·450
(9·4307)				+2·196 +0·363
		+13·346 (1·1253)	−7·517 (0_n8760)	−3·673 (0_n5650)
(9_n7507)			+13·283 +4·234	+4·789 +2·069
(9_n4397)				+1·833 +1·011
			+9·049 (0·9566)	+2·720 (0·4346)
(9·4788)				+0·822 +0·818
				+0·004

Damit werden die Eliminationsgleichungen:

$$\begin{aligned} 5\Delta x - 2{\cdot}715\xi - 1{\cdot}670n &= +1{\cdot}348 \\ +13{\cdot}346\xi - 7{\cdot}517n &= -3{\cdot}673 \\ +9{\cdot}049n &= +2{\cdot}720 \end{aligned}$$

aus denen sich die Unbekannten

$$n = +0{\cdot}301, \quad \xi = -0{\cdot}106, \quad \Delta x = +0{\cdot}314$$

ergeben; die Fehlerquadratsumme ist von + 2·196 auf + 0·004 herabgegangen.

Rechnet man die Unterdeterminanten D_{ik} der neungliedrigen Determinante der Coëfficienten, so werden diese:

$$\begin{matrix} +161{\cdot}448 & +48{\cdot}617 & +42{\cdot}697 \\ +48{\cdot}617 & +66{\cdot}417 & +37{\cdot}584 \\ +42{\cdot}697 & +37{\cdot}584 & +66{\cdot}734; \end{matrix}$$

damit wurde die Determinante $D = 603{\cdot}98$, und die durch diese Determinante dividirten Unterdeterminanten Δ_{ik}:

$$\begin{matrix} +0{\cdot}2673 & +0{\cdot}0805 & +0{\cdot}0707 \\ +0{\cdot}0805 & +0{\cdot}1100 & +0{\cdot}0622 \\ +0{\cdot}0707 & +0{\cdot}0622 & +0{\cdot}1105 \end{matrix}$$

demnach die Unbekannte nach 4 (10):

$$\Delta x = +0{\cdot}3138; \quad \xi = -0{\cdot}1044; \quad n = +0{\cdot}3019$$

und die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler nach 4 (21): $[vv] = +0{\cdot}0027$, während sich durch Substitution der Werthe Δx, ξ, n in die Bedingungsgleichungen pag. 15 die übrigbleibenden Fehler

$$+0{\cdot}002, \quad -0{\cdot}015, \quad +0{\cdot}026, \quad +0{\cdot}008, \quad -0{\cdot}025$$

mit der Fehlerquadratsumme $+0{\cdot}0016$ ergiebt.

Die Determinanten Δ_{ii} der Diagonalreihe sind

$$+0{\cdot}2673, \quad +0{\cdot}1100, \quad +0{\cdot}1105,$$

deren reciproke Werthe die Gewichte der Unbekannten

$$p_{\Delta x} = 3{\cdot}74; \quad p_\xi = 9{\cdot}09; \quad p_n = 9{\cdot}05$$

sind. Mit $[vv] = +0{\cdot}0027$ wird, da $r = 5$, $\rho = 3$ ist, der Fehler der Gewichtseinheit $\varepsilon = \pm 0''{\cdot}037$ und damit

$$\varepsilon_{\Delta x} = \pm 0''{\cdot}019; \quad \varepsilon_\xi = \pm 0''{\cdot}012; \quad \varepsilon_n = \pm 0''{\cdot}012.$$

Dieses einfache Rechnungsbeispiel wird den Gang der numerischen Operationen ausreichend veranschaulichen, wenn auch, wie natürlich, die Ausdehnung der Rechnung mit der Zahl der Unbekannten ausserordentlich anwächst.

Es wird jedoch gut, noch ein in der Praxis sehr wichtiges, theoretisches Beispiel durchzuführen, d. i. die Bildung von Normalorten.

In denjenigen Fällen, in denen die Zahl der Bedingungsgleichungen sehr gross ist, wird die Arbeit bei der Bildung der Produkte $[aa]$, $[ab]$ . . . für die Normalgleichungen sehr gross. Man kann jedoch, ohne die Genauigkeit wesentlich zu beeinträchtigen, die Arbeit bedeutend vermindern, wenn die die einzelnen Bedingungsgleichungen gebenden Beobachtungen Gruppen bilden, wie dies z. B. bei dem hier durchgeführten numerischen Beispiele der Fall ist.

Von Wichtigkeit wird dies auch bei den Bahnbestimmungen. Jede vollständige Beobachtung eines Planeten und Kometen giebt zwei Bedingungsgleichungen; lassen sich aber der Zeit nach nicht zu entfernt von einander gelegene Beobachtungen zusammenfassen, so kann die Zahl der Bedingungsgleichungen wesentlich vermindert werden: jede Gruppe von Beobachtungen giebt einen Normalort, also zwei Bedingungsgleichungen.

Die Abweichungen, Beobachtung — Rechnung werden sich stets in der Form darstellen lassen:

$$\begin{aligned} u &= \cos\delta\Delta\alpha = a + b(t - t_0) + c(t - t_0)^2 + \ldots \\ v &= \quad\quad \Delta\delta = a' + b'(t - t_0) + c'(t - t_0)^2 + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Die Bestimmung der Coëfficienten a, b, c . . . . a', b', c' . . . aus den Beobachtungen und die Heranziehung dieser Coëfficienten zur Bestimmung der Elementencorrectionen ist aber keineswegs praktisch. Hingegen wird diese Darstellung sich als nützlich erweisen, wenn man die Zeiten $(t - t_0)$ innerhalb so enger Intervallen wählen kann, dass man mit den ersten Gliedern ausreicht. Berücksichtigt man die ersten drei Glieder, so geben die einzelnen beobachteten Rectascensionen die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 &= a + b(t_1 - t_0) + c(t_1 - t_0)^2 \\ u_2 &= a + b(t_2 - t_0) + c(t_2 - t_0)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= a + b(t_n - t_0) + c(t_n - t_0)^2 \end{aligned}$$

und ähnlich für die Deklinationen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man hieraus die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} na + \Sigma_1 b + \Sigma_2 c &= \alpha \\ \Sigma_1 a + \Sigma_2 b + \Sigma_3 c &= \beta \\ \Sigma_2 a + \Sigma_3 b + \Sigma_4 c &= \gamma, \end{aligned}$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_0)^\lambda = \Sigma_\lambda; \quad \sum_{i=1}^{n} u_i = \alpha; \quad \sum_{i=1}^{n} u_i(t_i - t_0) = \beta; \quad \sum_{i=1}^{n} u_i(t_i - t_0)^2 = \gamma \tag{2}$$

gesetzt ist.

Hieraus erhält man:

$$a = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \beta & \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \gamma & \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{vmatrix}; \quad b = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} n & \alpha & \Sigma_2 \\ \Sigma_1 & \beta & \Sigma_3 \\ \Sigma_2 & \gamma & \Sigma_4 \end{vmatrix}; \quad c = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} n & \Sigma_1 & \alpha \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & \beta \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \gamma \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} n & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

$$a = \frac{1}{D}[\alpha(\Sigma_2\Sigma_4 - \Sigma_3^2) - \beta(\Sigma_1\Sigma_4 - \Sigma_2\Sigma_3) + \gamma(\Sigma_1\Sigma_3 - \Sigma_2^2)]. \tag{3}$$

a ist der Werth von $(\cos\delta\Delta\alpha)$ für den Zeitmoment $t = t_0$ und kann demnach als die zur Zeit $t = t_0$ gehörige Ephemeridencorrection aufgefasst werden, unter der Voraussetzung, dass sich die gegebene Reihe der Ephemeridencorrectionen in der Form (1) darstellt. Anders ausgesprochen: Hat man eine Reihe von aufeinanderfolgenden Ephemeridencorrectionen, welche sich in der Form (1) darstellen lassen, so wird der Werth derselben für die Zeit $t = t_0$ durch die Form (3) dargestellt, wobei die Σ und α, β, γ durch (2) bestimmt sind. Bringt man den hieraus folgenden Werth von $\Delta\alpha$ an den zur Zeit t aus der Ephemeride folgenden Werth von α an[1]), so erhält man den allen Beobachtungen u_1, u_2, ... u_n sich nach der Methode der kleinsten Quadrate am besten anschmiegenden Werth von α, also einen aus dieser Beobachtungsgruppe abgeleiteten Normalort. Die Kenntniss der Werthe b, c ist dabei nicht weiter erforderlich; doch soll wegen des Folgenden noch der Werth von c angesetzt werden:

$$c = \frac{1}{D}[\alpha(\Sigma_1\Sigma_3 - \Sigma_2^2) - \beta(n\Sigma_3 - \Sigma_1\Sigma_2) + \gamma(n\Sigma_2 - \Sigma_1^2)].$$

Die Formeln werden etwas einfacher, wenn man den ganz beliebigen Zeitmoment t_0 so wählt dass $\Sigma_1 = 0$ wird; dann ist

$$t_0 = \frac{1}{n}[t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_n], \tag{4}$$

d. h. der Normalort bezieht sich auf die Mitte der den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Zeit. Dann wird:

$$a = \frac{1}{D}[\alpha(\Sigma_2\Sigma_4 - \Sigma_3^2) + \beta\Sigma_2\Sigma_3 - \gamma\Sigma_2^2]$$

$$c = \frac{1}{D}[-\alpha\Sigma_2^2 - \beta n\Sigma_3 + \gamma n\Sigma_2]$$

$$D = n(\Sigma_2\Sigma_4 - \Sigma_3^2) - \Sigma_2^3.$$

---

[1]) Man sucht $\cos\delta\Delta\alpha$ und nicht $\Delta\alpha$, weil die Werthe von $\Delta\alpha$ in den verschiedenen Deklinationen nicht direkt mit einander vergleichbar sind, sondern erst durch Multiplikation mit $\cos\delta$ auf den Parallel reducirt werden müssen.

Ist die Reihe der u-Werthe eine solche, dass $c = 0$ angenommen werden kann, d. h. kann man sich bei der Bildung des Normalortes auf die ersten beiden Glieder beschränken, so wird die Berechnung desselben äusserst einfach. Die Bedingung, dass $c = 0$ angenommen werden darf, ist

$$-\alpha\Sigma_2^2 - \beta n\Sigma_3 + \gamma n\Sigma_2 = 0. \tag{5}$$

Unter dieser Voraussetzung wird, wenn der Werth von γ aus dieser Gleichung in den Werth von a substituirt wird, β ebenfalls herausfallen und man findet

$$a = \frac{1}{nD}[n\alpha(\Sigma_2\Sigma_4 - \Sigma_3^2) + n\beta\Sigma_2\Sigma_3 - (\alpha\Sigma_2^3 + n\beta\Sigma_2\Sigma_3)]$$
$$= \frac{\alpha}{nD}[n(\Sigma_2\Sigma_4 - \Sigma_3^2) - \Sigma_2^3]$$

oder einfach

$$a = \frac{\alpha}{n} = \frac{\Sigma u_i}{n} \tag{6}$$

wie auch unmittelbar aus den Bedingungsgleichungen

$$na + \Sigma_1 b = \Sigma u_i$$
$$\Sigma_1 a + \Sigma_2 b = \Sigma u_i(t_i - t_0),$$

unter der Voraussetzung $c = 0$ für den durch (4) definirten Zeitmoment folgt.

Gleichung (5) giebt ein Kriterium für die Anwendbarkeit von Formel (6); da die u_i um die Beobachtungsfehler von den wahren Werthen abweichen, diese Beobachtungsfehler aber vollständig regellos sein werden, so kann man a priori kein Urteil über die Erfüllung oder Nichterfüllung dieser Gleichung geben. Auch wird im allgemeinen diese Gleichung nicht für Rectascensionen und Deklinationen gleichzeitig für denselben Zeitmoment t_0 erfüllt sein; man kann aber, wenn der Ausdruck (5) berechnet ist, leicht die an (6) anzubringende Correction bestimmen. Ist nämlich

$$-\alpha\Sigma_2^2 - \beta n\Sigma_3 + \gamma n\Sigma_2 = \varkappa,$$

so wird sofort:

$$c = \frac{\varkappa}{D}$$

bekannt und dann wird

$$a = \frac{1}{nD}[\alpha n(\Sigma_2\Sigma_4 - \Sigma_3^2) - \Sigma_2(cD + \alpha\Sigma_2^2)]$$
$$= \frac{1}{nD}[\alpha D - \Sigma_2 cD]$$

oder

$$a = \frac{1}{n}[\alpha - \Sigma_2 c]. \tag{7}$$

Meist wird man die Correction $\Sigma_2 c$ übergehen, und überdies die Ephemeridencorrection als für die nächstgelegene Mitternacht gültig ansehen können.

6. Es erübrigt noch die Behandlung der Aufgabe, wenn zwischen den Unbekannten Bedingungsgleichungen bestehen. Hierbei beschränkt man sich in den Lehrbüchern[1]) stets auf den dem unmittelbaren Bedürfnisse entsprechenden Fall, dass man Bedingungsgleichungen zwischen unmittelbar beobachteten Grössen zu erfüllen hat. Hier soll der allgemeine Fall betrachtet werden. Es seien also die Unbekannten X, Y, Z . . wieder aus den Gleichungen

$$V = f(X, Y, Z \ldots)$$

[1]) Auch Meyer-Czuber, l. c., pag. 313 behandelt nicht den allgemeinen Fall

zu ermitteln, wobei V eine beobachtete Grösse ist; seien V_1, V_2, V_3 . . die einzelnen Beobachtungen, m_1, m_2, m_3 . . . die Werthe der Function f für die angenommenen genäherten Werthe x_0, y_0, z_0 . . .

$$V_\iota - m_\iota = n_\iota,$$

so hat man die Bestimmungsgleichungen für die x, y, z . . . in der linearen Form

$$n_\iota = a_\iota x + b_\iota y + c_\iota z + \ldots \tag{1a}$$

und den Fehler dieser Bestimmungsgleichungen

$$v_\iota = a_\iota x + b_\iota y + c_\iota z + \ldots \ldots - n_\iota. \tag{2}$$

Sind die Gleichungen auf die Fehlereinheit reducirt, so wird die Summe der Fehlerquadrate

$$\Sigma = [vv]$$

zu einem Minimum zu machen sein, wozu erforderlich ist, dass

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x}dx + \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial y}dy + \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial z}dz + \ldots = 0 \tag{3}$$

wird. Hier sind nun aber die x, y, z . . . nicht von einander unabhängig, sondern gewissen theoretischen Bedingungen unterworfen, die sich durch die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y, Z \ldots) &= 0 \\ \psi(X, Y, Z \ldots) &= 0 \\ \chi(X, Y, Z \ldots) &= 0 \\ \ldots\ldots & \end{aligned} \tag{4}$$

ausdrücken lassen. Der natürlichste Weg scheint derjenige zu sein, aus diesen Bedingungsgleichungen so viele Unbekannte zu bestimmen, als Bedingungsgleichungen gegeben sind, welche sich demnach als Functionen der übrigen darstellen, diese in die Gleichungen (1a) zu substituiren, wodurch die noch übrigbleibenden Unbekannten von einander unabhängig sind, und die Aufgabe auf die frühere reducirt erscheint. Die Auflösung wird aber in dieser Form unmöglich, wenn die Bedingungsgleichungen nicht leicht lösbar (z. B. transcendent) sind. Einfacher wird es daher, wenn man aus den Bedingungsgleichungen (4) die Beziehungen zwischen den Differentialen der Unbekannten aufstellt, und diese mit unbestimmten Coëfficienten K_1, K_2, K_3 . . . multiplicirt, zu (3) addirt. Man hat aus (4), indem $dX = dx$, $dY = dy$, $dZ = dz$ . . . ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \ldots &= 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz + \ldots &= 0 \\ \frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}dy + \frac{\partial\chi}{\partial z}dz + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x} + K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_2\frac{\partial\psi}{\partial x} + K_3\frac{\partial\chi}{\partial x} + \ldots\right\}dx + \left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial y} + K_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + K_3\frac{\partial\chi}{\partial y} + \ldots\right\}dy \\ &+ \left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial z} + K_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_2\frac{\partial\psi}{\partial z} + K_3\frac{\partial\chi}{\partial z} + \ldots\right\}dz + \ldots\ldots = 0. \end{aligned} \tag{5a}$$

Ist r die Zahl der Unbekannten und s die Zahl der Bedingungsgleichungen, so sind s von den Coëfficienten gleich Null zu setzen, hiernach K_1, K_2, K_3 . . . zu bestimmen, diese in die $r - s$ übrigen Coëfficienten zu substituiren, welche jetzt von einander unabhängig sind, und daher für sich verschwinden müssen.

Man hat also alle r Coëfficienten gleich Null zu setzen, und erhält daraus r Gleichungen, welche im Vereine mit den s Bedingungsgleichungen (4) $(r+s)$ Gleichungen zur Bestimmung der $(r+s)$ Unbekannten $x, y, z \ldots K_1, K_2 \ldots$ dienen. Man hat daher:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x} + K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_2\frac{\partial\psi}{\partial x} + K_3\frac{\partial\chi}{\partial x} + \ldots &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial y} + K_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + K_3\frac{\partial\chi}{\partial y} + \ldots &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial z} + K_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_2\frac{\partial\psi}{\partial z} + K_3\frac{\partial\chi}{\partial z} + \ldots &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Auch in dieser Form bedarf man der Zuziehung der Bedingungsgleichungen (4); um diese unter allen Umständen, auch wenn sie algebraisch von höherem Grade oder transcendent wären, leicht benutzen zu können, wird es am besten, auch sie durch die angenommenen Näherungen $x_0, y_0, z_0 \ldots$ linear zu machen. Sei also

$$\begin{array}{llll} \varphi(x_0, y_0, z_0 \ldots) = \varphi_0; & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = \varphi_1; & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 = \varphi_2; & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 = \varphi_3 \ldots \\ \psi(x_0, y_0, z_0 \ldots) = \psi_0; & \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 = \psi_1; & \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 = \psi_2; & \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_0 = \psi_3 \ldots \\ \chi(x_0, y_0, z_0 \ldots) = \chi_0; & \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_0 = \chi_1; & \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_0 = \chi_2; & \left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_0 = \chi_3 \ldots \end{array}$$

so erhält man für dieselben die geforderte lineare Form zwischen den Unbekannten $x, y, z \ldots$:

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y, Z \ldots) &= \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 y + \varphi_3 z + \ldots = 0 \\ \psi(X, Y, Z \ldots) &= \psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 y + \psi_3 z + \ldots = 0 \\ \chi(X, Y, Z \ldots) &= \chi_0 + \chi_1 x + \chi_2 y + \chi_3 z + \ldots = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Die in (6) auftretenden Differentialproduction $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \ldots \frac{\partial\psi}{\partial x} \ldots$ (welche an Stelle der Differentialproduction $\frac{\partial\varphi}{\partial X}, \frac{\partial\varphi}{\partial Y} \ldots \frac{\partial\psi}{\partial X} \ldots$ mit Rücksicht auf die Einführung der Gleichungen (7) gewählt wurden), sind nun unmittellbar durch die Coëfficienten der Unbekannten in (7) ausdrückbar, und da auch nach 4 (5):

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x} = [av]; \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial y} = [bv] \ldots$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} [av] + K_1\varphi_1 + K_2\psi_1 + K_3\chi_1 + \ldots &= 0 \\ [bv] + K_1\varphi_2 + K_2\psi_2 + K_3\chi_2 + \ldots &= 0 \\ [cv] + K_1\varphi_3 + K_2\psi_3 + K_3\chi_3 + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6a}$$

Setzt man hier die v aus (2) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots &= [an] - K_1\varphi_1 - K_2\psi_1 - K_3\chi_1 - \ldots \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \ldots &= [bn] - K_1\varphi_2 - K_2\psi_2 - K_3\chi_2 - \ldots \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \ldots &= [cn] - K_1\varphi_3 - K_2\psi_3 - K_3\chi_3 - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Die Lösung der Aufgabe liegt in den $r+s$ Gleichungen (8) und (7), welche die $r+s$ Unbekannten $x, y, z \ldots K_1, K_2 \ldots$ enthalten. Die Gleichungen

(7) enthalten nur die $x, y, z \ldots$; allein die Zahl der Unbekannten muss grösser sein, als die Zahl der Bedingungen, da ja die Unbekannten nicht aus diesen, sondern durch Beobachtungen zu bestimmen sind; es würden also, wie schon erwähnt, immer eine Reihe der Unbekannten $x, y, z \ldots$ als Functionen der übrigen auftreten und hierdurch eine allgemeine Lösung in dieser Form in nicht symmetrischer Weise erfolgen. Die Gleichungen (8) hingegen enthalten nebst allen $x, y, z \ldots$ noch die $K_1, K_2 \ldots$; dennoch lässt sich, wenn man von diesen ausgeht, eine symmetrische und leicht übersichtliche Form der Lösung geben, wobei man noch den Vortheil hat, die Operationen in zwei gesondert zu behandelnde Gruppen zu theilen. Stellt man aus (8) die r Unbekannten $x, y, z \ldots$ als Functionen der K dar, wobei die Lösung mittels derselben Determinanten wie früher erreicht wird, also mittels der Determinante D der $[aa]$, $[ab] \ldots$, $[bb] \ldots$ und den durch D dividirten Unterdeterminanten $\frac{D_{ix}}{D} = \nabla_{ix}$, so wird:

$$\begin{aligned}
x &= \nabla_{11}[an] + \nabla_{12}[bn] + \nabla_{13}[cn] + \ldots - K_1\Phi_1 - K_2\Psi_1 - K_3 X_1 - \ldots \\
y &= \nabla_{12}[an] + \nabla_{22}[bn] + \nabla_{23}[cn] + \ldots - K_1\Phi_2 - K_2\Psi_2 - K_3 X_2 - \ldots \\
z &= \nabla_{13}[an] + \nabla_{23}[bn] + \nabla_{33}[cn] + \ldots - K_1\Phi_3 - K_2\Psi_3 - K_3 X_3 - \ldots \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned} \tag{9}$$

wobei[1]:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{11}\varphi_1 + \nabla_{12}\varphi_2 + \nabla_{13}\varphi_3 + \ldots = \Phi_1 \qquad \nabla_{11}\psi_1 + \nabla_{12}\psi_2 + \nabla_{13}\psi_3 + \ldots = \Psi_1 \\
&\nabla_{12}\varphi_1 + \nabla_{22}\varphi_2 + \nabla_{23}\varphi_3 + \ldots = \Phi_2 \qquad \nabla_{12}\psi_1 + \nabla_{22}\psi_2 + \nabla_{23}\psi_3 + \ldots = \Psi_2 \\
&\nabla_{13}\varphi_1 + \nabla_{23}\varphi_2 + \nabla_{33}\varphi_3 + \ldots = \Phi_3 \qquad \nabla_{13}\psi_1 + \nabla_{23}\psi_2 + \nabla_{33}\psi_3 + \ldots = \Psi_3 \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\qquad\qquad \nabla_{11}\chi_1 + \nabla_{12}\chi_2 + \nabla_{13}\chi_3 + \ldots = X_1 \\
&\qquad\qquad \nabla_{12}\chi_1 + \nabla_{22}\chi_2 + \nabla_{23}\chi_3 + \ldots = X_2 \\
&\qquad\qquad \nabla_{13}\chi_1 + \nabla_{23}\chi_2 + \nabla_{33}\chi_3 + \ldots = X_3 \\
&\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned} \tag{10}$$

Setzt man die Gleichungen (9) in die Gleichungen (5) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 + \Phi_1[an] + \Phi_2[bn] + \Phi_3[cn] + \ldots = K_1\{\Phi_1\varphi_1 + \Phi_2\varphi_2 + \Phi_3\varphi_3 + \ldots\} + \\
&+ K_2\{\Phi_1\psi_1 + \Phi_2\psi_2 + \Phi_3\psi_3 + \ldots\} + K_3\{\Phi_1\chi_1 + \Phi_2\chi_2 + \Phi_3\chi_3 + \ldots\} + \ldots \\
&\psi_0 + \Psi_1[an] + \Psi_2[bn] + \Psi_3[cn] + \ldots = K_1\{\Psi_1\varphi_1 + \Psi_2\varphi_2 + \Psi_3\varphi_3 + \ldots\} + \\
&+ K_2\{\Psi_1\psi_1 + \Psi_2\psi_2 + \Psi_3\psi_3 + \ldots\} + K_3\{\Psi_1\chi_1 + \Psi_2\chi_2 + \Psi_3\chi_3 + \ldots\} + \ldots \\
&\chi_0 + X_1[an] + X_2[bn] + X_3[cn] + \ldots = K_1\{X_1\varphi_1 + X_2\varphi_2 + X_3\varphi_3 + \ldots\} + \\
&+ K_2\{X_1\psi_1 + X_2\psi_2 + X_3\psi_3 + \ldots\} + K_3\{X_1\chi_1 + X_2\chi_2 + X_3\chi_3 + \ldots\} + \ldots
\end{aligned} \tag{11}$$

---

[1]) Diese Ausdrücke sind die ersten Polaren der quadratischen Formen

$$\begin{aligned}
\Phi &= (\Delta_1\varphi_1 + \Delta_2\varphi_2 + \Delta_3\varphi_3 + \ldots)^2 = \Delta\varphi^2 \\
\Psi &= (\Delta_1\psi_1 + \Delta_2\psi_2 + \Delta_3\psi_3 + \ldots)^2 = \Delta\psi^2 \\
X &= (\Delta_1\chi_1 + \Delta_2\chi_2 + \Delta_3\chi_3 + \ldots)^2 = \Delta\chi^2, \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

daher werden die Coëfficienten von K in den Gleichungen (11) in derselben symbolischen Schreibweise:

$$\begin{matrix}
\Delta\varphi^2 & \Delta\varphi\Delta\psi & \Delta\varphi\Delta\chi \ldots\ldots \\
\Delta\varphi\Delta\psi & \Delta\psi^2 & \Delta\psi\Delta\chi \ldots\ldots \\
\Delta\varphi\Delta\chi & \Delta\psi\Delta\chi & \Delta\chi^2 \ldots\ldots
\end{matrix}$$

Doch hat diese Darstellungsweise für die praktische Berechnung keine weiteren Vortheile.

Dieses sind s Gleichungen mit den s Unbekannten K[1]). Sind diese ermittelt, so giebt ihre Substitution in die Gleichung (9) sofort die Werthe der Unbekannten $x, y, z \ldots$

Beispiel: Es sollen die Unbekannten aus direkten Beobachtungen gefunden werden, wenn zwischen den letzteren Bedingungsgleichungen bestehen, ein Fall, der bei den geodätischen Vermessungen (direkte Messung von Winkeln, welche Dreiecken oder Vielecken angehören, oder die einen Horizontabschluss bilden) vorkommt. Die Gleichungen (1) werden dann:

$$X = V_1, \quad Y = V_2, \quad Z = V_3 \ldots$$

Die beobachteten Werthe $V_1, V_2, V_3 \ldots$ können direkt als die genäherten Werthe angesehen werden; die m_ι, d. i. die Werthe der Functionen für die angenommenen Näherungen, werden daher ebenfalls identisch mit den V_ι; folglich wird

$$n_1 = n_2 = n_3 \ldots\ldots = 0$$

und die in den Gleichungen (1a) auftretenden $x, y, z \ldots$ sind die an die Näherungen $V_1, V_2, V_3 \ldots$ anzubringenden Correctionen. Da die Gleichungen (1a) bereits auf die Gewichtseinheit reducirt gedacht waren, so müssen sie mit den bezüglichen Gewichten der V angeschrieben werden, und sind daher:

$$\sqrt{p_1}\, x = 0, \qquad \sqrt{p_2}\, y = 0, \qquad \sqrt{p_3}\, z = 0 \ldots$$

wobei $p_1, p_2, p_3 \ldots$ bezw. die Gewichte von $V_1, V_2, V_3 \ldots$ sind. Wären keine Bedingungsgleichungen gegeben, so wären auch $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen; wenn aber die angenommenen Näherungen $V_1, V_2, V_3 \ldots$ die Bedingungsgleichungen (4) nicht erfüllen, so werden $\varphi_0, \psi_0, \chi_0 \ldots$ nicht gleich Null sein und die wahrscheinlichsten Werthe der $x, y, z \ldots$ sind nicht mehr Null, sondern die Bedingungsgleichungen (4) müssen unter allen Umständen strenge erfüllt werden. Man hat daher:

---

[1]) Die Determinante ist, wie man sieht, das Produkt der beiden Matricen:

$$\vartheta = \left|\begin{matrix} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \ldots\ldots \\ \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \ldots\ldots \\ X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots\ldots \\ \psi_1 \psi_2 \psi_3 \ldots\ldots \\ \chi_1 \chi_2 \chi_3 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right|$$

welche je r Columnen und s Zeilen haben, und daher als $\binom{r}{s}$ Produkte von je zwei Determinanten $s$ter Ordnung ausdrückbar sind, von denen die eine der ersten, die zweite der zweiten Matrix entnommen ist, und zwar denselben Columnen. Die Benutzung dieser Darstellung hat vielleicht manche Vortheile, da, abgesehen von den Gliedern $\varphi_0, \psi_0, \chi_0 \ldots$ bei den Zählern der Unbekannten dieselbe Zerlegung möglich ist, und bei jeder Unbekannten an Stelle einer der Zeilen der zweiten Matrix die Summen $[an]$, $[bn]$, $[cn] \ldots$ treten. Es wird z. B.

$$K_2 = \frac{\vartheta_2}{\vartheta},$$

wobei ϑ_2 durch das Produkt der beiden Matricen darstellbar ist:

$$\vartheta_2 = \left|\begin{matrix} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \ldots\ldots \\ \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \ldots\ldots \\ X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots\ldots\ldots \\ [an][bn][cn] \ldots \\ \chi_1 \chi_2 \chi_3 \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right|$$

wo also die sämmtlichen $\binom{r}{s}$ Determinanten der ersten Matrix dieselben bleiben. $\varphi_0, \psi_0, \chi_0 \ldots$ kann man aber jeder Zeit gleich Null machen, wenn man für $x_0, y_0, z_0 \ldots$ eines der unendlich vielen Lösungssysteme treten lässt, welche die Gleichungen (4) erfüllen.

$$\begin{array}{llll} a_1 = \sqrt{p_1}; & b_1 = 0; & c_1 = 0; \ldots & [aa] = p_1; \quad [ab] = 0; \quad [ac] = 0 \ldots \\ a_2 = 0; & b_2 = \sqrt{p_2}; & c_2 = 0; \ldots & [ab] = 0; \quad [bb] = p_2; \quad [bc] = 0 \ldots \\ a_3 = 0; & b_3 = 0; & c_3 = \sqrt{p_3} \ldots & [ac] = 0; \quad [bc] = 0; \quad [cc] = p_3 \ldots \\ \ldots & & & \ldots \end{array}$$

Die Determinante der $[aa]$, $[ab]$ ... ist gleich $p_1 p_2 p_3$ ... daher die durch diese Determinante dividirten Unterdeterminanten:

$$\begin{array}{lll} \nabla_{11} = \frac{1}{p_1}; & \nabla_{12} = 0; & \nabla_{13} = 0 \ldots \\ \nabla_{12} = 0; & \nabla_{22} = \frac{1}{p_2}; & \nabla_{23} = 0 \ldots \\ \nabla_{13} = 0; & \nabla_{23} = 0; & \nabla_{33} = \frac{1}{p_3} \ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

Damit werden die durch (10) definirten Hilfscoëfficienten;

$$\begin{array}{lll} \Phi_1 = \frac{\varphi_1}{p_1}; & \Psi_1 = \frac{\psi_1}{p_1}; & X_1 = \frac{\chi_1}{p_1} \ldots \\ \Phi_2 = \frac{\varphi_2}{p_2}; & \Psi_2 = \frac{\psi_2}{p_2}; & X_2 = \frac{\chi_2}{p_2} \ldots \\ \Phi_3 = \frac{\varphi_3}{p_3}; & \Psi_3 = \frac{\psi_3}{p_3}; & X_3 = \frac{\chi_3}{p_3} \ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

und die Gleichungen (11) für die Bestimmung der K werden, da wegen $n_i = 0$ auch $[an] = [bn] = \ldots = 0$ ist:

$$\begin{aligned} K_1 \left[\frac{\varphi\varphi}{p}\right] + K_2 \left[\frac{\varphi\psi}{p}\right] + K_3 \left[\frac{\varphi\chi}{p}\right] + \ldots &= \varphi_0 \\ K_1 \left[\frac{\varphi\psi}{p}\right] + K_2 \left[\frac{\psi\psi}{p}\right] + K_3 \left[\frac{\psi\chi}{p}\right] + \ldots &= \psi_0 \\ K_1 \left[\frac{\varphi\chi}{p}\right] + K_2 \left[\frac{\psi\chi}{p}\right] + K_3 \left[\frac{\chi\chi}{p}\right] + \ldots &= \chi_0 \\ \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

wobei z. B.

$$\left[\frac{\varphi\psi}{p}\right] = \frac{\varphi_1\psi_1}{p_1} + \frac{\varphi_2\psi_2}{p_2} + \frac{\varphi_3\psi_3}{p_3} + \ldots$$

ist. Die Gleichungen (12) sind die GAUSS'schen Gleichungen für die Bestimmung der K, welche von GAUSS den Namen der CORRELATEN erhalten haben. Sind die K bestimmt, so folgen die Unbekannten x, y, z ... aus den Gleichungen (9), welche hier

$$\begin{aligned} p_1 x &= -K_1\varphi_1 - K_2\psi_1 - K_3\chi_1 \ldots \\ p_2 y &= -K_1\varphi_2 - K_2\psi_2 - K_3\chi_2 \ldots \\ p_3 z &= -K_1\varphi_3 - K_2\psi_3 - K_3\chi_3 \ldots \\ \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

lauten, und dann ist

$$X = V_1 + x; \quad Y = V_y + y; \quad Z = V_3 + z \ldots \tag{14}$$

N. HERZ.

Mikrometer und Mikrometermessungen. Mit dem Namen Mikrometer werden in der allgemeinsten Bedeutung des Wortes Vorrichtungen bezeichnet, mittelst deren kleine Grössen gemessen werden können; in dem besonderen Sinne, in welchem hier davon die Rede sein wird, werden darunter Apparate verstanden, welche in Verbindung mit dem Fernrohr zur Messung von kleinen Bögen oder Coordinatendifferenzen benachbarter Punkte an der Himmelskugel dienen. Ihre Anwendung, wie überhaupt die Benutzung des Fernrohrs zu Messungszwecken beruht auf dem Satze der Dioptrik, dass jeder einfallenden Geraden, welche durch den ersten Knotenpunkt des Objectives geht, eine ihr parallel durch den zweiten Knotenpunkt gehende Austrittsgerade entspricht. Die Lage, in welcher zwei Objecte am Himmel vom ersten Knotenpunkt aus erscheinen, ist daher identisch mit der Lage der correspondirenden Bildpunkte, gesehen vom zweiten Knotenpunkte aus, und die Messung dieses Bildes in möglichst sicherer Weise herbeizuführen, ist der Zweck der mikrometrischen Vorrichtung.

Das Gebiet, auf welchem die Mikrometer in der astronomischen Praxis Anwendung finden, ist sehr ausgedehnt. Denn es umfasst einerseits die mikrometrischen Messungen im engeren Sinne, bei denen es ausschliesslich auf die relative Lage zweier oder mehrerer scheinbar nahe gelegenen Objecte ankommt, also die Bestimmung der Lage der Satelliten zu ihren Hauptkörpern, die Ermittelung der Grösse und Figur der Körper unseres Sonnensystems, ihre Topographie, die Doppelsternbeobachtungen, die Parallaxenbestimmungen, die Ausmessung von Sternhaufen, die Festlegung der Oerter der Nebelflecke in Bezug auf Sterne in ihrer Umgebung; andererseits können zahlreiche absolute Ortsbestimmungen nicht anders als durch Zuhülfenahme mikrometrischer Messungen ausgeführt werden. Das letztere gilt für alle Fälle, wo die Lichtschwäche oder das Aussehen der Objecte, die Zeit des Meridiandurchganges und andere Umstände eine directe Bestimmung ihres Ortes an Meridiankreisen nicht gestatten, und da den Instrumenten dieser Gattung aus gewissen Gründen stets nur mässige Dimensionen gegeben werden können, so werden die Positionen der überwiegenden Anzahl der meist lichtschwachen Kometen und der Asteroiden auf indirectem Wege bestimmt werden müssen. Der Unterschied der Coordinaten solcher Objecte gegen einen genügend hellen benachbarten Stern wird, meist an parallaktisch aufgestellten Refractoren, mikrometrisch gemessen, der absolute Ort dieses Ausgangssterns aber an einem Meridianinstrument ermittelt.

Bei dieser Mannigfaltigkeit der Anwendungen ist es begreiflich, dass nicht jedes Mikrometer für jeden Zweck gleich geeignet sein kann; während das Ringmikrometer in den Händen des geschickten Beobachters recht brauchbare Positionsbestimmungen eines kleinen Planeten oder eines Kometen zu liefern vermag, würde es ein vergebliches Bemühen sein, die gegenseitige Lage der Componenten eines Doppelsterns mit der erforderlichen Genauigkeit damit messen zu wollen, und wenn andererseits das Fadenmikrometer hier vorzügliche Dienste leistet, steht dieses Mikrometer wiederum bei der Bestimmung des Durchmessers einer Planetenscheibe weit hinter dem Doppelbildmikrometer zurück. Es mag an dieser Stelle sogleich bemerkt werden, dass seit den unerwartet grossen Fortschritten, welche die Photographie in ihrer Anwendung auf Himmelsaufnahmen gemacht hat, bei gewissen der vorhergenannten Aufgaben, ganz vornehmlich bei Sternhaufen, an Stelle der directen Ocularbeobachtung mit Vortheil und in vielen

Fällen allein mit Aussicht auf Erfolg die photographische Abbildung tritt und die mikrometrische Messung statt in der Bildebene des Fernrohrs auf der photographischen Platte ausgeführt wird. Die für diesen Zweck erforderlichen Apparate bleiben hier von der Besprechung ausgeschlossen.

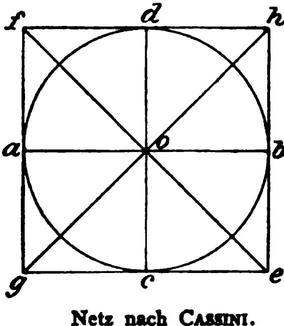
Man kann die grosse Anzahl von Mikrometern, welche seit der Mitte des 17. Jahrhunderts ersonnen und, manche freilich nur versuchsweise oder ganz vorübergehend, in Anwendung gekommen sind, in zwei Hauptklassen einreihen; die erste umfasst die Mikrometer, bei denen die Beobachtung an dem einfachen, durch das Objectiv entworfenen Bild ausgeführt wird, die zweite diejenigen, welche auf der Verdoppelung oder Vervielfachung des Bildes beruhen. In der ersten Klasse unterscheiden wir zwei Gruppen, einerseits die Mikrometer, welche während der Messung dieselbe Lage in ihren Theilen und in Bezug auf das Fernrohr beibehalten — Netz-, Lamellen- und Kreismikrometer —, und andererseits die Mikrometer, bei welchen beide Coordinaten oder eine derselben durch Lagenänderung einzelner Theile gewonnen werden — Schraubenmikrometer. Die mikrometrischen Vorrichtungen der zweiten Klasse unterscheiden sich von einander darin, wie die Verdoppelung oder Vervielfachung des Bildes, ob durch das Objectiv, durch das Ocular, durch Prismen und doppelbrechende Krystalle, oder endlich durch Beugung des Lichtes an Spalten herbeigeführt wird.

I. Netz-Lamellen- und Kreismikrometer.

Sobald man erkannt hatte, dass zugleich mit dem in der Focalebene des Objectivs eines Fernrohrs entworfenen Bilde eines äusseren Gegenstandes (Sterns) eine ebendaselbst befindliche Marke deutlich gesehen wird, lag es nahe, diese Eigenschaft des Fernrohrs für die Bestimmung der linearen Grösse des Bildes und des Winkels, unter dem Bild und Gegenstand am Mittelpunkt des Objectivs erscheinen, zu verwerthen. Die einfachste hierauf beruhende Vorrichtung war das feste Fadennetz, welches der Marquis von Malvasia, der Beschützer und Mitbeobachter des ersten Cassini in seinen »Ephemerides novissimae motuum coelestium« (1662) beschreibt, dessen Erfindung jedoch nach Venturi dem bei der Herstellung der Ephemeriden betheiligten Montanari angehören soll. Dieses Mikrometer war nichts anderes als ein System von mehreren feinen und senkrecht einander durchkreuzenden Silberfäden; nachdem der Abstand der einzelnen Fäden von einander aus der Zeit ermittelt war, welche ein Aequatorstern gebrauchte, um die senkrecht zur Richtung der täglichen Bewegung gestellten Fäden zu durchlaufen, konnte die angulare Grösse eines in unendlicher Entfernung befindlichen Objectes durch Schätzung der von ihm im Netze eingenommenen Fläche bestimmt werden. Unabhängig von Malvasia empfahl Zahn in seinem »Oculus artificialis teledioptricus« (1685) für denselben Zweck Gitter mittelst Diamant auf Glas einzuritzen, und Tobias Mayer benutzte bei seinen Mondaufnahmen ähnliche Netze, die er mit Tusche auf Glas hergestellt hatte. Eines ausgezeichneten Rufes erfreuten sich die Glasgitter von Brander, auf welche Lambert in seinen »Anmerkungen über die Brander'schen Mikrometer von Glas«, Augsburg 1796, aufmerksam machte.

Unter den Netzmikrometern, welche zur Bestimmung des relativen Ortes zweier Sterne verwandt wurden und zum Theil auch jetzt noch in Gebrauch sind, mag an erster Stelle das nach D. Cassini benannte Netz Erwähnung finden. Dasselbe besteht aus vier sich unter einem Winkel von je 45° schneidenden Fäden (Fig. 282), welche auf einem Rahmen in der Focalebene des Fernrohrs aufgespannt sind und deren einer (ab) in die Richtung der täglichen Bewegung

gestellt wird. Beobachtet man an einem solchen Netze die in Sternzeit ausgedrückten Momente, wann durch die tägliche scheinbare Bewegung des Himmelsgewölbes ein Stern durch die Fäden ef und gh geführt wird, so entspricht ihr Mittel der Sternzeit des Durchganges durch den Stundenkreis cd und ihre halbe Differenz, multiplicirt mit $15 \cos \delta$ (δ = Declination des Sterns) dem Declinationsunterschied gegen den Mittelpunkt o. Die Beobachtung des zweiten Sterns bei unverändertem Stand des Fernrohrs giebt analoge Grössen, aus deren Verbindung mit den ersteren der Unterschied der Coordinaten beider Sterne in gerader Aufsteigung und in Declination hervorgeht. Da es sich bei den Anwendungen stets um den Anschluss eines unbekannten Sterns an einen seiner Lage nach bekannten handeln wird, so kann man die für die Reduction erforderliche genäherte Kenntniss der Declination des ersteren leicht durch Schätzung, oder auch durch eine erste Annäherung, bei welcher man von der Declination des bekannten Sterns ausgeht, erlangen.



Netz nach CASSINI.
(A. 282.)

Um den Einfluss eines Fehlers in der Einstellung des Fadens ab in die Richtung des Parallels bestimmen und in Rechnung ziehen zu können, werden die Antrittsmomente beider Objecte auch an dem Faden cd beobachtet. Seien (Fig. 283) der Winkel, den der Faden cd mit dem durch O gehenden Stundenkreis macht, i, die in Sternzeit ausgedrückten Momente des Antritts des Sterns an die Fäden bei s, s' und s'' bezw. ϑ, ϑ' und ϑ'', die Sternzeit des Durchgangs durch den Stundenkreis $pp'\Theta$, der Abstand $O\sigma = d$, so erhält man

$$s\sigma = d \tang(45 + i),$$

$$s'\sigma = d \tang i, \quad s''\sigma = d \tang(45 - i)$$

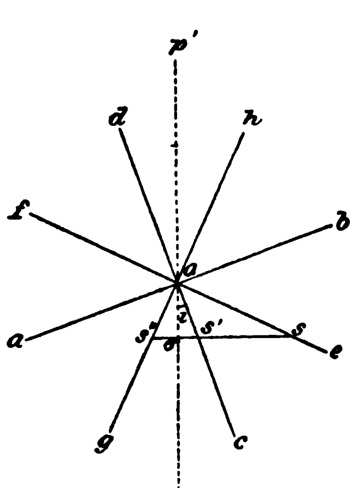
und hieraus, wenn man $\vartheta' - \vartheta = a$, $\vartheta'' - \vartheta' = a'$, setzt

$$\tang i = \frac{a - a'}{a + a'}$$

und bis auf die zweite Potenz von i

$$d = 15 \cos \delta \frac{(a + a')}{2}$$

$$\Theta = \frac{\vartheta + \vartheta' + \vartheta''}{3} + \tfrac{1}{6}(a - a').$$



(A. 283.)

Hat man mehrere Beobachtungen, die bei derselben Justirung bezw. demselben Winkel i angestellt sind, so kann man $\tang i$ aus allen Beobachtungen gemäss dem Ausdruck

$$\tang i = \frac{\Sigma a - \Sigma a'}{\Sigma a + \Sigma a'}$$

berechnen, und erhält dann aus jeder einzelnen Beobachtung

$$\Theta = \frac{\vartheta + \vartheta' + \vartheta''}{3} + \tfrac{1}{6}(a + a') \frac{\Sigma a - \Sigma a'}{\Sigma a + \Sigma a'}.$$

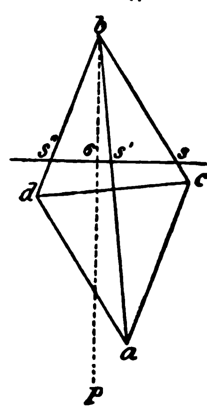
Haben Θ' und d' dieselbe Bedeutung für den zweiten Stern mit den Coordinaten α' und δ', wie Θ und d für den ersten Stern (α, δ), so ist

$$\alpha' - \alpha = \Theta' - \Theta$$

$$\delta' - \delta = d' - d$$

wo die Grössen d positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem der Stern nördlich oder südlich von der Mitte durch das Netz geht. Es ist hierbei vorausgesetzt worden, dass die Wege, welche die Sterne beschreiben, als geradlinig oder als Bögen grössten Kreises angesehen werden dürfen, oder dass die Sterne in oder nahe dem Aequator stehen; ist dies nicht der Fall, so bedarf die zweite Gleichung eines Zusatzgliedes für die von der Declination abhängige Krümmung des Parallels. Ferner muss auch die Einwirkung der Strahlenbrechung in unserer Atmosphäre und, falls das eine Object ein Wandelstern ist, der Einfluss seiner eigenen Bewegung berücksichtigt werden. Alle diese Correctionen können nach den Vorschriften berechnet werden, welche nachher für die noch jetzt gebräuchlichen Mikrometer, unter denen in etwas veränderter Form auch das Mikrometer unter 45° vorkommt, entwickelt werden.

Eine zweite Form des Netzes ist die nach BRADLEY benannte Rautenform (Fig. 284), bei welcher die Diagonalen in dem Verhältniss von 1:2 stehen und die kürzere in die Richtung der täglichen Bewegung gestellt wird. Bei genauer Justirung ergiebt wiederum das Mittel der Zeiten, zu denen der Stern zwei aneinander stossende Seiten passirt, den Moment des Durchgangs durch den durch die längere Diagonale dargestellten Stundenkreis, und die in Bogenmaass verwandelte Differenz derselben entspricht dem Declinationsunterschied gegen die nördliche oder südliche Spitze. Wenn die beiden Objecte auf verschiedenen Seiten der kleineren Diagonale durch das Netz gehen, so wird die genaue Kenntniss der Länge der letzteren erfordert; man erlangt sie am sichersten durch Beobachtung eines Sternpaares von bekannter Declinationsdifferenz. Zur Justirung des Netzes ist in der Richtung der kleinen Diagonale ein Faden gespannt, während zur Controlle und zur Berücksichtigung eines Fehlers in der Justirung auch hier die Beobachtung der Antrittszeiten an dem darauf senkrechten diagonalen Faden dient. Ist b die südliche Spitze, bP der durch b gezogene Stundenkreis, $b\sigma = d$, $\sigma b s' = i$ und behält man im Uebrigen die früheren Bezeichnungen bei, so folgt[1])



BRADLEY's Raute.
(A. 284.)

$$tang\, i = 2\,\frac{a - a'}{a + a'}$$

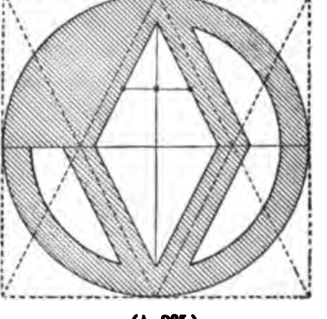
und bis auf die zweite Potenz von i

$$d = 15\, cos\, \delta\, (a + a')$$

$$\theta = \frac{\vartheta + \vartheta' + \vartheta''}{3} + \tfrac{1}{3}(a - a')$$

oder wenn $tang\, i$ aus allen vorhandenen Beobachtungen bestimmt wird

$$\theta = \frac{\vartheta + \vartheta' + \vartheta''}{3} + \tfrac{1}{3}(a + a')\,\frac{\Sigma a - \Sigma a'}{\Sigma a + \Sigma a'}.$$

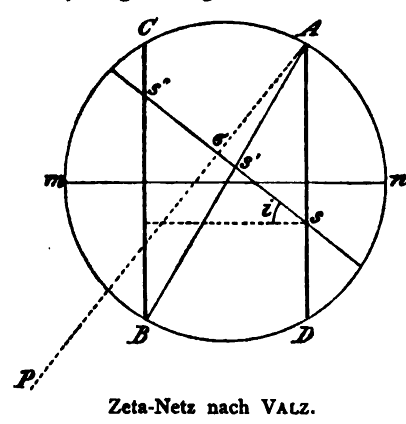

(A. 285.)

Um ein derartiges Mikrometer auch für Beobachtungen schwacher Objecte, die eine künstliche Beleuchtung des Gesichtsfeldes nicht ertragen, herzurichten, wurde das Netz auf eine Kupfertafel verzeichnet (Fig. 285) und die Tafel so ausgeschnitten, dass nur der Ring, der Rhombus und ein Segment stehen blieb. Man beobachtete

[1]) Vergl. R. ENGELMANN, Recensionen von F. W. BESSEL (Anhang).

dann das Erscheinen und Verschwinden des Sterns an den Seiten des Rhombus und konnte mittelst des vollen Segments, welches ihn dauernd verdeckt hielt, entscheiden, ob er über oder unter der Mitte durchgegangen war.

Auch andere Rautenformen und geradlinige Figuren wurden in Vorschlag gebracht und zum Theil angewandt. FLAUGERGUES empfahl eine Raute, die aus zwei aneinander gelegten gleichseitigen Dreiecken gebildet wird, weil sie sich leichter als jede andere Form herstellen lasse; MONTEIRO DA ROCCA schlug eine Raute vor, deren spitze im Stundenkreis liegende Winkel 45° betrugen und deren Seiten bis zum Rande des Diaphragmas verlängert waren, um durch Beobachtung der Objecte an den vier Seiten den Justirungsfehler bestimmen zu können; BURKHARDT erklärte das Quadrat, dessen eine Diagonale in den Parallel gestellt war, für die geeignetste Form. Wir werden auf letzteres, welches in neuerer Zeit, allerdings in etwas erweiterter Form, vielfach benutzt wird, an anderer Stelle näher eingehen. Hier sei weiter der Construction erwähnt, welche VALZ[1]) vorgeschlagen und der er den Namen »Réticule à sommets alternes ou en Zeta« gegeben hat. Sie zeichnet sich durch eine grosse Einfachheit aus; von den Endpunkten des Durchmessers AB eines Kreises (Fig. 286) werden auf der Peripherie die Punkte C und D abgetragen, so dass die Sehnen AC und BD gleich dem Halbmesser sind und die Punkte C und B, B und A, A und D durch (Metall-)Drähte mit einander verbunden; ein Transversalfaden mn senkrecht auf AD und BC dient zur genäherten Einstellung in die Richtung der täglichen Bewegung. Das Mikrometer hat hiernach vor manchem anderen, z. B. dem CASSINIschen, den Vorzug, dass die Fäden oder Drähte, an denen die Vorübergänge beobachtet werden, einander nicht kreuzen und in dieselbe Ebene gebracht werden können; man kann sie daher auch stark genug wählen, um sie, ohne künstliche Beleuchtung und bei derselben Ocularstellung, alle gleich scharf zu sehen. Auch die Reduction lässt an Einfachheit kaum etwas zu wünschen übrig; ist der Abstand der beiden Parallelfäden mittelst Sterndurchgängen ein für alle mal bestimmt, so giebt die Beobachtung der Antrittszeiten eines Objects an den drei Fäden bei s, s' und s'' den Fehler der Orientirung, die verbesserte Zeit des Durchganges durch den Stundenkreis PA und den Declinationsunterschied gegen den Punkt A. Bezeichnen r den gegenseitigen Abstand der parallelen Fäden, i den Winkel, den die Richtung der täglichen Bewegung mit dem Querfaden einschliesst, positiv, wenn der Stern nach Süden abweicht, und behält man im Uebrigen die früheren Bezeichnungen bei, so findet man leicht:



Zeta-Netz nach VALZ.
(A. 286.)

$$\cos i = \frac{r}{(\vartheta'' - \vartheta)\, 15 \cos\delta} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i = \sqrt{\frac{(\vartheta'' - \vartheta)\, 15 \cos\delta - r}{(\vartheta'' - \vartheta)\, 15 \cos\delta + r}}$$

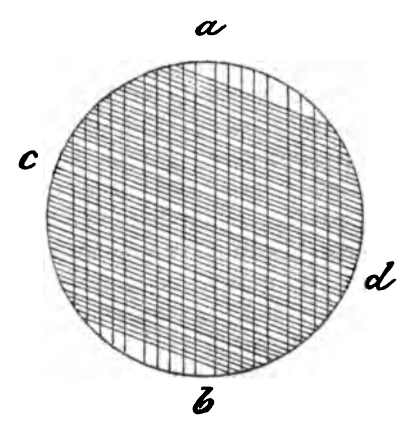
$$\Theta = \frac{\vartheta + \vartheta'}{2} - (\vartheta' - \vartheta)\cos(2i + 60^\circ)$$

$$d = 2(\vartheta' - \vartheta)\, 15 \cos\delta \cos i \sin(i + 60);$$

dieselben Relationen gelten für den zweiten Stern.

[1]) DE ZACH, Correspondance astronomique, géographique, hydrographique et statistique, Vol. III, Lettre XVI.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier sehr naher Sterne, z. B. der Componenten eines Doppelsterns, hat FRAUNHOFER unter dem Namen Lampen-Netz-Mikrometer[1]) ein Mikrometer angegeben und auch ausgeführt, welches zwar durch das von ihm zu hoher Vollkommenheit gebrachte und demselben Zweck dienende Positionsmikrometer sogleich verdrängt wurde, immerhin aber ein historisches Interesse beanspruchen darf. Es besteht aus einem Planglase (Fig. 287), auf welchem zwei Systeme von geraden parallelen Linien eingeätzt sind, deren Entfernungen von einander genau bestimmt sind und bei welchen die einen durch die anderen unter einem genau bekannten, nur wenig spitzen Winkel geschnitten werden. Bei dem von FRAUNHOFER für die Sternwarte in Dorpat gelieferten Apparat beträgt dieser Winkel 76°. Zur leichteren Unterscheidung sind die Striche jedes Systems in Gruppen eingetheilt, innerhalb deren sie gleich weit von einander abstehen. Das Netz wird bei Nacht in derselben Weise, wie die Fäden der später zu besprechenden Positionsmikrometer, sichtbar gemacht; man sieht die Striche entweder als feine helle Linien auf dunklem Grund, oder sie erscheinen schwarz in hellem Feld. Für die Beobachtung wird das Mikrometer in der Focalebene des Objectivs so gerichtet, dass die *ab*-Linien sich sehr nahe im Stundenkreis befinden, die Linien des anderen Systems folglich einen sehr spitzen Winkel (14°) mit der Richtung der täglichen Bewegung bilden. Indem man die Antritte der beiden zu vergleichenden Sterne an einer Anzahl von Strichen sowohl des einen, als des anderen Systems beobachtet, hat man — wie aus späteren Erörterungen hervorgehen wird —, für die Bestimmung beider Coordinaten nahe die günstigsten Bedingungen. Was die Berechnung der Beobachtungen angeht, so ermittelt man zunächst aus dem Verhältniss der Zeiten τ und τ', welche bei demselben Stern zwischen den Durchgängen durch zwei benachbarte Stundenlinien und durch zwei ebensolche Linien des zweiten Systems verfliessen, mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Abstände f und g und des Winkels γ zwischen den beiden Strichsystemen die wahre Neigung der *ab*-Linien gegen den Stundenkreis gemäss dem Ausdruck



Lampen-Netz-Mikrometer nach FRAUNHOFER.
(A. 287.)

$$tang\ i = cotang\ \gamma - \frac{\tau}{\tau'}\frac{g}{f}\frac{1}{sin\ \gamma}.$$

Hierauf werden die Durchgänge, die im Allgemeinen für die beiden Objecte nicht an denselben Linien beobachtet zu sein brauchen und bei engeren Sternpaaren auch nicht beobachtet werden können, auf ein und dasselbe Strichpaar reducirt, und daraus nach den Ausdrücken, die für das einfache Lamellenmikrometer nachher gegeben werden, die Unterschiede in Rectascension und Declination abgeleitet. Um ebensoviele Antritte an den Stundenlinien, als an den dazu geneigten Strichen beobachten zu können, sind die ersten weiter gezogen und zwar im Verhältniss von 1 : *cos* γ.

[1]) J. VON FRAUNHOFER's gesammelte Schriften, herausgeg. von E. LOMMEL, München 1888.

Die bisher besprochenen Mikrometer und überhaupt alle Netze, welche aus geradlinigen Figuren bestehen, erfordern, wie es in der Natur der Sache liegt, eine Orientirung in Bezug auf die Richtung der täglichen Bewegung, indessen es genügt, wie früher gezeigt wurde, dieselbe annähernd herzustellen und den übrig gebliebenen Fehler aus den Beobachtungen selbst zu bestimmen und in Rechnung zu ziehen. Gleichwohl würde es beschwerlich sein, wenn die Orientirung bei jeder Wiederholung der Beobachtung von neuem ausgeführt werden müsste, und man wird daher derartige Netze zweckmässig nur da anwenden, wo die Orientirung, nach welchem Punkt des Himmels das Fernrohr auch gerichtet sein mag, wenigstens beiläufig erhalten bleibt, d. h. in Verbindung mit parallaktisch aufgestellten Instrumenten. Man hat, namentlich in früherer Zeit, auch Meridianinstrumente damit versehen, und eine der ausgiebigsten Anwendungen in dieser Richtung ist die Katalogisirung des südlichen Himmels, welche LACAILLE während seines Aufenthaltes am Cap der guten Hoffnung ausgeführt, und in seinem »Coelum australe stelliferum« niedergelegt hat. LACAILLE hatte zu diesem Zweck parallel zu dem Hauptfernrohr seines in den Meridian gestellten Quadranten ein kleines Fernrohr mit schwacher Vergrösserung, aber grossem Gesichtsfeld befestigt, in dessen Brennebene je nach Bedürfniss verschiedene Netze, der Mehrzahl nach Rhomben, eingeführt und justirt werden konnten; indem er nun bei einem während einer längeren Beobachtungsreihe unveränderten Stand des Fernrohrs die Durchgänge aller Sterne durch die Raute beobachtete, welche die tägliche Bewegung in das Gesichtsfeld führte, konnte er aus den unter der grossen Anzahl vorkommenden Sternen von bekannter Position als Anhaltspunkten die Oerter der übrigen unbekannten Sterne ermitteln.

Die Genauigkeit, welche diese Mikrometer in der relativen Ortsbestimmung gewähren, wird ausser durch die Fehler der Beobachtung selbst auch durch den höheren oder geringeren Grad von Vollkommenheit bedingt, welcher in der Herstellung der vorgeschriebenen Form des Netzes erreicht ist. Wenn auch bei dem gegenwärtigen Stand der Präcisionsmechanik die mechanischen Fehler solcher mehr oder weniger einfachen Netzconstructionen äusserst klein sein werden, so erklärte doch FRAUNHOFER es noch für unmöglich, einer Raute eine bestimmte Form in dem Grade genau zu geben, wie es zu guten Beobachtungen nöthig sei, und dies wird in bedeutend grösserem Maasse für die Mikrometer des vorigen Jahrhunderts gelten, die nicht selten von den Beobachtern selbst hergestellt werden mussten. Es kann nicht zweifelhaft sein, dass manche ältere Beobachtungsresultate merklich an Genauigkeit gewinnen würden, wenn sie von den Fehlern in der Form, wie in der Justirung des Netzes befreit werden könnten, und jedenfalls wird man bei der Beurtheilung der Sicherheit solcher Beobachtungen auf das Bestehen derartiger Fehler Rücksicht nehmen müssen. Als ein Beleg hierfür mag es genügen, auf die Untersuchungen von ARGELANDER[1]) über die oben erwähnten Beobachtungen LACAILLE's und auf die eingehende Prüfung hinzuweisen, der FABRITIUS[2]) eines der von LACAILLE benutzten Netze, — das Reticulus medius, eine Raute von dem Diagonalenverhältniss 1:2 — unterzogen hat.

Kreis- und Ringmikrometer.

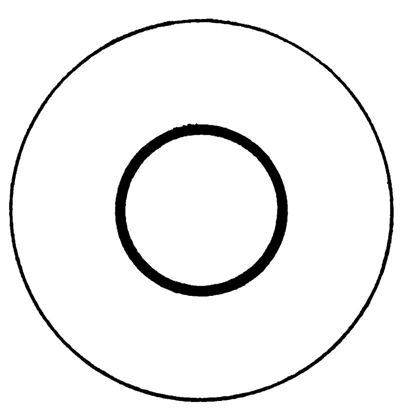
Von der obigen Beschränkung frei und an keine besondere Aufstellung des Fernrohrs gebunden, zeichnet sich das Kreismikrometer auch durch seine ein-

---

[1]) Bonner Beobachtungen, Bd. VII.

[2]) F. W. FABRITIUS, Untersuchungen über LACAILLE's Reticulus medius. Helsingfors 1873.

fache Construction vor den anderen Formen aus. Nach dem von G. BIGOURDAN[1]) erbrachten Nachweis muss die Priorität der Idee, die Kreislinie für mikrometrische Zwecke zu benutzen, LACAILLE zugeschrieben werden, der im Jahre 1737 auf die Vortheile, welche sie gewährt, aufmerksam gemacht hat; auf der anderen Seite scheint es aber zweifellos, dass unabhängig von LACAILLE der Italiener BOSCOVICH auf dieselbe Idee gekommen ist. Wenigstens setzt BOSCOVICH in seiner im Jahre 1739 in Rom unter dem Titel: »De novo telescopii usu ad objecta coelestia determinanda« erschienenen Abhandlung den Gebrauch des Mikrometers auseinander und hebt insbesondere mit Rücksicht auf den in jenem Jahr erschienenen Kometen den Vorzug hervor, dass das neue Mikrometer keiner künstlichen Beleuchtung bedürfe. In seiner ursprünglichen Form war das Kreismikrometer nichts anderes, als der von dem letzten Diaphragma gebildete, das Gesichtsfeld des Fernrohrs begrenzende Kreis, und ein halbes Jahrhundert verging, bis nahe gleichzeitig KÖHLER und J. G. REPSOLD den leeren Kreis durch einen in der Bildebene aufgehängten und genau abgedrehten schmalen Ring von Messing ersetzten; es wurde dadurch zugleich der Vortheil erreicht, dass der Beobachter auf die Zeit des Appulses des Objectes an den Ring gehörig vorbereitet war. Der neue und bequeme Apparat fand bald eine weite Verbreitung, besonders nachdem OLBERS und BESSEL seine grosse Brauchbarkeit durch zahlreiche eigene Beobachtungen erwiesen und besondere Regeln für die zweckmässigste Benutzung auf theoretischem Wege abgeleitet hatten. Auch in der Herstellung wurden, namentlich von FRAUNHOFER, neue und erhebliche Verbesserungen eingeführt. FRAUNHOFER bohrte in ein dünnes Planglas eine runde Oeffnung und befestigte darin einen schmalen stählernen Ring, indem er mittelst des Polirstahls den vorstehenden Rand umlegte und hierauf den inneren Rand genau kreisrund abschliff. Uebrigens war auch der äussere Rand, obwohl nicht in derselben Weise bearbeitet, von vornherein so formvollendet, dass man auch ihn mitbenutzen und durch Beobachtung von je zwei Momenten, des Verschwindens und Wiedererscheinens, die Genauigkeit der Messung erhöhen konnte. An die Stelle des Kreismikrometers trat damit das Ringmikrometer (Fig. 288). Auch Doppelringe wurden in derselben Weise hergestellt, indem zwei mit je einem Ring versehene Glasplatten so auf einander gelegt wurden, dass die Ringe concentrisch sind und in derselben Ebene liegen. Vielfach werden, besonders in neuerer Zeit, die Ringe nicht in das Glas eingelassen, sondern nur aufgekittet. Da das Kreis- oder Ringmikrometer auch heute noch, für Ortsbestimmungen von kleinen Planeten und Kometen, und für Anschlüsse von Nebelflecken an benachbarte Sterne verwandt wird, muss auf die Theorie desselben näher eingegangen werden.



Einfaches Ringmikrometer.
(A. 288.)

---

[1]) Bulletin Astronomique. Août 1895.

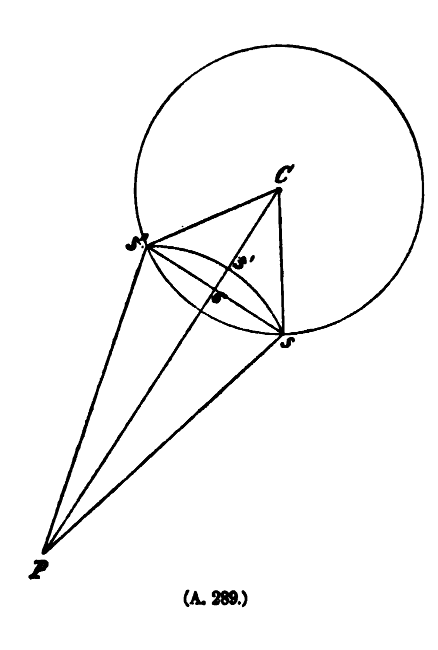
Seien ϑ_1 und ϑ_2 die in Sternzeit ausgedrückten Momente des Erscheinens und Wiederverschwindens eines Objectes am ersten und zweiten Rande des Kreises, α und δ die Rectascension und Declination desselben, T und D der Stundenwinkel und die Declination des Punktes, in welchem der durch den Mittelpunkt des Kreises und den optischen Mittelpunkt des Objectivs bestimmte Strahl die Himmelskugel treffen würde, r der Radius des Kreises, $\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$, so bestehen die Gleichungen:

$$1.\quad \vartheta - \alpha - T = 0$$
$$2.\quad \cos r = \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos 15(T - \vartheta_1 + \alpha)$$
$$3.\quad \cos r = \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos 15(\vartheta_2 - \alpha - T)$$

und für ein zweites Object, dessen Durchgang bei unverändertem Stand des Fernrohres beobachtet ist:

$$4.\quad \vartheta' - \alpha' - T = 0$$
$$5.\quad \cos r = \sin\delta' \sin D + \cos\delta' \cos D \cos 15(T - \vartheta_1' + \alpha')$$
$$6.\quad \cos r = \sin\delta' \sin D + \cos\delta' \cos D \cos 15(\vartheta_2' - \alpha' - T).$$

Von den beiden Objecten sei das erstere seinem Orte nach bekannt; aus der 1. und 4. Gleichung folgt dann unmittelbar $\alpha' - \alpha$ in Function der beobachteten Momente; aus der 2. oder 3. Gleichung ergiebt sich ein Werth von D ausgedrückt durch δ und r, der in die 5. oder 6. Gleichung eingetragen zur Kenntniss von δ' führt. Setzt man in 2. statt $T + \alpha$ ϑ und bezeichnet $15\,\frac{(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{2}$ mit τ, so folgt



(A. 289.)

$$\cos r = \cos(\delta - D) - 2\cos\delta \cos D \sin^2\frac{\tau}{2}$$

oder

$$\sin^2\tfrac{1}{2} r = \sin^2\frac{\delta - D}{2} + \cos\delta \cos D \sin^2\frac{\tau}{2},$$

aus welcher Gleichung $\delta - D$ strenge ermittelt werden kann.

Die Rechnung lässt sich in der folgenden Weise vereinfachen. Man verbinde (Fig. 289) die Eintritts- und Austrittsstelle s und s'' durch einen Bogen grössten Kreises und nenne d den Abstand des Durchschnittspunktes σ mit dem Stundenkreis PC vom Mittelpunkt C, $\pm$ gerechnet, wenn der Durchschnittspunkt $\left.\begin{matrix}\text{nördlich}\\ \text{südlich}\end{matrix}\right\}$ liegt, dann wird:

$$\cos\tau = \operatorname{cotang}(D + d) \operatorname{tang}\delta$$

oder

$$\operatorname{tang}(D + d) = \operatorname{tang}\delta(1 + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\tau + 4\sin^4\tfrac{1}{2}\tau + \ldots)$$

oder

$$D + d - \delta = \frac{\sin 2\delta}{2} \cdot 2\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} + 4\operatorname{tang}\delta \cos^2\delta\,\frac{\sin^4\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} - (D + d - \delta)^2 \operatorname{tang}\delta \sin 1''$$

mithin, wenn in dem letzten Glied auf der rechten Seite der genäherte Werth

$$D + d - \delta = \frac{\sin 2\delta}{2} 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\tau}{\sin 1''}$$

substituirt wird:

$$D + d - \delta = \frac{\sin 2\delta}{2} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} + \frac{\sin 2\delta}{2} \cos^2 \delta \frac{4 \sin^4 \frac{1}{2}\tau}{\sin 1''},$$

wo das zweite Glied in allen Fällen vernachlässigt werden kann.

Man hat demnach

$$\delta - D = d - \frac{\sin 2\delta}{2} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} = d - \sin\delta \cos\delta \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\tau}{\sin 1''}$$

und für den zweiten Stern

$$\delta' - D = d' - \frac{\sin 2\delta'}{2} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\tau'}{\sin 1''} = d' - \sin\delta' \cos\delta' \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\tau'}{\sin 1''}.$$

Die Abstände d und d' ergeben sich aus den Gleichungen

$$\cos^2 r = \cos^2 d (1 - \sin^2\tau \cos^2\delta)$$

oder

$$\sin^2 d = \frac{\sin^2 r - \sin^2\tau \cos^2\delta}{1 - \sin^2\tau \cos^2\delta} \qquad \sin^2 d' = \frac{\sin^2 r - \sin^2\tau' \cos^2\delta'}{1 - \sin^2\tau' \cos^2\delta'}.$$

Man wird nur selten Veranlassung haben, diese strengen Ausdrücke anzuwenden, bei nicht sehr hohen Declinationen wird man mit den einfacheren Gleichungen auskommen:

$$d = \sqrt{r^2 - \tau^2 \cos^2\delta} \qquad d' = \sqrt{r^2 - \tau'^2 \cos^2\delta'},$$

welche, wie sogleich ersichtlich, durch Einführung zweier Hülfswinkel für die numerische Rechnung geeigneter gemacht werden können. Stellt man die hiernach für die Reduction erforderlichen Ausdrücke zusammen, so hat man:

$$15 \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} = \tau \qquad 15 \frac{\vartheta_2' - \vartheta_1'}{2} = \tau' \tag{1}$$

$$\frac{\tau \cos\delta}{r} = \sin\varphi \qquad \frac{\tau' \cos\delta'}{r} = \sin\varphi' \tag{2}$$

$$d = r \cos\varphi \qquad d' = r \cos\varphi' \tag{3}$$

$$\alpha' - \alpha = \frac{\vartheta_1' + \vartheta_2'}{2} - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \tag{4}$$

$$\delta' - \delta = d' - d - \frac{\sin 1''}{2} (\sin\delta' \cos\delta' \tau'^2 - \sin\delta \cos\delta \tau^2) \tag{5}$$

oder meist ausreichend

$$= d' - d - \frac{\sin 1''}{2} \operatorname{tang} \frac{\delta + \delta'}{2} (\cos^2\delta' \tau'^2 - \cos^2\delta \tau^2) \tag{5*}$$

oder auch

$$= d' - d + \frac{\sin 1''}{2} \operatorname{tang} \frac{\delta + \delta'}{2} (d' + d)(d' - d), \tag{5**}$$

wo das Correctionsglied verschwindet, wenn $d' = \pm d$ ist.

Die Berechnung von d' setzt eine genäherte Kenntniss von δ' voraus, die meist vorhanden oder mit genügender Genauigkeit leicht zu erlangen ist. Man kann übrigens den vorstehenden Ausdruck dahin abändern, dass an Stelle von δ' D eingeht, welches mittelst des bekannten Sternes direct berechnet werden kann. Es ist

$$d'^2 = r^2 - \tau'^2 \cos^2(D + \delta' - D) = r^2 - \tau'^2 \cos^2 D + 2\tau'^2 \sin D \cos D (\delta' - D) \sin 1'' \ldots$$

oder

$$d' = \sqrt{(r^2 - \tau'^2 \cos^2 D)} + \tau'^2 \sin D \cos D \sin 1'' \ldots;$$

setzt man daher

$$d'_0 = \sqrt{(r^2 - \tau'^2 \cos^2 D)},$$

so wird

$$\delta' - D = d_0' + \tau'^2 \sin D \cos D \sin 1'' - \frac{\tau'^2}{2} \sin \delta' \cos \delta' \sin 1'',$$

wofür man auch wird setzen dürfen

$$\delta' - D = d_0' + \frac{\tau'^2}{2} \sin 1'' \sin D \cos D \ . \ .$$

und hiermit

$$\delta' - \delta = d_0' - d + \tfrac{1}{2} \sin 1'' \tang \frac{D + \delta}{2} (\tau'^2 \cos^2 D + \tau^2 \cos^2 \delta); \qquad (5^{***})$$

im Allgemeinen werden aber die obigen Ausdrücke den Vorzug verdienen.

Es ist bisher angenommen worden, dass die Beobachtungsuhr nach Sternzeit regulirt sei; es bedürfen daher die Fälle, wo die Abweichung des Ganges der Uhr beträchtlich ist, noch einer Ergänzung. Nehmen wir an, die Uhr weiche in einem mittleren Tage um u^s ab, m. a. W. der tägliche Gang betrage u^s, wo u positiv ist, wenn die Uhr zurückbleibt und negativ, wenn sie voreilt, so wird die nach (4) berechnete Differenz $\alpha' - \alpha$ mit dem Factor $1 + \frac{u}{86636}$ zu multipliciren sein, und in den Ausdrücken (1) zur Berechnung von τ und τ' statt 15 der Factor $15\left(1 + \frac{u}{86636}\right)$ einzutreten haben. Geht die Uhr annähernd nach mittlerer Zeit und ist ihr täglicher Gang wiederum u^s, so werden statt der obigen Werthe die Factoren $\left(1 + \frac{236{\cdot}6 + u}{86400}\right)$ bezw. $15\left(1 + \frac{236{\cdot}6 + u}{86400}\right)$ anzuwenden sein.

Die Benutzung des Kreismikrometers setzt die Kenntniss des angularen Halbmessers (r) voraus und es ist daher zu zeigen, wie derselbe ermittelt werden kann. Der angulare Halbmesser ist der Winkel, unter dem der lineare Halbmesser an dem zweiten Knotenpunkt des Objectivs erscheint; bezeichnet man jenen mit ρ und die Hauptbrennweite mit F, so ist $\tang r = \frac{\rho}{F}$. Die directe Bestimmung von r durch lineare Ausmessung von ρ und F ist umständlich und setzt Mittel voraus, die meist nicht zur Verfügung stehen; dagegen wird man ihn direct durch unmittelbare Winkelmessung bestimmen können, wenn man gegenüber dem Objectiv des Fernrohres einen Theodoliten oder ein Universalinstrument aufstellt und abwechselnd den linken und rechten, oder den oberen und unteren Rand mit dem Faden einstellt und den Horizontal- oder Verticalkreis abliest, im ersteren Fall auch die Zenithdistanz für die Reduction auf den Horizont notirt. Empfehlenswerther ist aber hier, wie in ähnlichen Fällen, das Verfahren, die Bestimmung des Halbmessers auf dieselbe Gattung von Beobachtungen zu gründen, die am Mikrometer ausgeführt werden sollen. Will man das Mikrometer zur Messung der Lage von Flecken auf der Sonnenscheibe benutzen, so ermittle man den Radius aus Sonnenbeobachtungen; dient dagegen das Mikrometer zu Anschlüssen von Planeten und Kometen an benachbarte Fixsterne, so wende man den Halbmesser an, welcher aus Sternbeobachtungen folgt:

1. Bestimmung durch Sonnenbeobachtungen. Seien s_a und s_a' die in Bogen ausgedrückten Stundenwinkel der Sonne bei den äusseren Berührungen von Sonne und Kreis, s_i und s_i' die entsprechenden Winkel bei den inneren Berührungen, R der Radius der Sonne, so hat man, da der Weg der Sonne innerhalb des Zeitintervalls der Beobachtungen als geradlinig betrachtet werden kann:

$$\frac{s_a' - s_a}{2} = \tau_a \qquad \frac{s_i' - s_i}{2} = \tau_i$$

$$(R + r)^2 - \tau_a^2 \cos^2 \delta = (R - r)^2 - \tau_i^2 \cos^2 \delta$$

$$r = \frac{(\tau_a + \tau_i)(\tau_a - \tau_i) \cos^2 \delta}{4R}.$$

Die obigen Differenzen der Stundenwinkel der Sonne ergeben sich aus den entsprechenden Differenzen der beobachteten Zeitmomente:

a) wenn die Beobachtungsuhr annähernd nach Sternzeit regulirt ist und ihr täglicher Gang u^s beträgt,

$$\text{durch Multiplication mit dem Factor } 15\left(1 - \frac{\Delta\alpha - u}{86636}\right),$$

b) wenn die Uhr annähernd nach mittlerer Zeit geht,

$$\text{durch Multiplication mit dem Factor } 15\left(1 - \frac{\Delta g - u}{86400}\right).$$

Hier sind $\Delta\alpha$ und Δg die Aenderungen der Rectascension der Sonne und der Zeitgleichung in einem mittleren Tage; statt Δg kann auch $\Delta\alpha - 236{\cdot}6$ gesetzt werden.

2. Bestimmung von r aus Beobachtungen zweier Sterne von bekannter Declinationsdifferenz.

Aus den Gleichungen 2 und 5, pag. 72

$$\cos r = \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos\tau$$
$$= \sin\delta' \sin D + \cos\delta' \cos D \cos\tau'$$

folgt

$$\tang D = \frac{\cos\delta' \cos\tau' - \cos\delta \cos\tau}{\sin\delta - \sin\delta'} = \frac{\cos\delta' - \cos\delta}{\sin\delta - \sin\delta'} - 2\,\frac{\left(\cos\delta' \sin^2\frac{\tau'}{2} - \cos\delta \sin^2\frac{\tau}{2}\right)}{\sin\delta - \sin\delta'}$$

oder nach einer einfachen Reduction

$$\sin\left(D - \frac{\delta' + \delta}{2}\right) = \frac{\cos D}{\sin\frac{\delta - \delta'}{2}}\left(\cos\delta \sin^2\frac{\tau}{2} - \cos\delta' \sin^2\frac{\tau'}{2}\right)$$

und in den meisten Fällen genügend

$$D = \frac{\delta' + \delta}{2} + \frac{\cos D}{2(\delta - \delta')}(\cos\delta\,\tau^2 - \cos\delta'\,\tau'^2).$$

Ist hieraus D ermittelt, so folgt

$$\sin^2\tfrac{1}{2}r = \sin^2\tfrac{1}{2}(\delta - D)\left(1 + \frac{\cos\delta \cos D \sin^2\frac{\tau}{2}}{\sin^2\frac{1}{2}(\delta - D)}\right) = \sin^2\tfrac{1}{2}(\delta' - D)\left(1 + \frac{\cos\delta' \cos D \sin^2\frac{\tau'}{2}}{\sin^2\frac{1}{2}(\delta' - D)}\right)$$

oder, wenn man

$$\sqrt{\cos\delta \cos D}\,\frac{\sin\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\delta - D)} = \tang\psi$$

$$\sqrt{\cos\delta' \cos D}\,\frac{\sin\frac{\tau'}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\delta' - D)} = \tang\psi'$$

setzt

$$r = \frac{\delta - D}{\cos\psi} = \frac{\delta' - D}{\cos\psi'}.$$

Ein zweites und in den meisten Fällen ausreichendes Verfahren wird aus den obigen genäherten Reductionsausdrücken gewonnen:

$$\tau\cos\delta = r\sin\varphi \qquad \tau'\cos\delta' = r\sin\varphi'$$

$$d' - d = r(\cos\varphi' - \cos\varphi) = 2r\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2}\sin\frac{\varphi + \varphi'}{2},$$

wo φ und φ' als Winkel zwischen dem Stundenkreis des Mittelpunkts und dem Radius der Ein- oder Austrittsstelle durchweg von 0° bis 180° gezählt werden sollen. Es folgt hieraus

$$\tau \cos\delta + \tau' \cos\delta' = 2r \sin\frac{\varphi+\varphi'}{2} \cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}$$

$$\tau \cos\delta - \tau' \cos\delta' = 2r \sin\frac{\varphi-\varphi'}{2} \cos\frac{\varphi+\varphi'}{2};$$

bestimmt man also φ und φ' aus den Gleichungen

$$tang\frac{\varphi+\varphi'}{2} = \frac{d'-d}{\tau\cos\delta - \tau'\cos\delta'}$$

$$tang\frac{\varphi-\varphi'}{2} = \frac{d'-d}{\tau\cos\delta + \tau'\cos\delta'},$$

wo auf der rechten Seite die Grösse $d' - d$ aus der bekannten Declinationsdifferenz gemäss dem Ausdruck hervorgeht:

$$d' - d = \delta' - \delta + \frac{\sin 1''}{2} \, tang\frac{\delta+\delta'}{2} (\cos^2\delta'\tau'^2 - \cos^2\delta\,\tau^2),$$

so ergiebt sich der Durchmesser aus einer der Gleichungen:

$$2r = \frac{d'-d}{\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}}$$

$$= \frac{\tau\cos\delta + \tau'\cos\delta'}{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}$$

$$= \frac{\tau\cos\delta - \tau'\cos\delta'}{\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}$$

$$= \frac{2\tau\cos\delta}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{2\tau'\cos\delta'}{\sin\varphi'}.$$

Für die günstigste Wahl der zur Bestimmung des Halbmessers anzuwendenden Sterne gewährt der aus den letzten Gleichungen leicht abzuleitende Ausdruck einen Anhalt:

$$\Delta(d'-d) = (\cos\varphi' - \cos\varphi)\Delta r - r\sin\varphi'\Delta\varphi' + r\sin\varphi\Delta\varphi$$

oder wenn man $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi'$ mittelst der Gleichungen

$$\cos\delta\Delta\tau = \sin\varphi\Delta r + r\cos\varphi\Delta\varphi$$

$$\cos\delta'\Delta\tau' = \sin\varphi'\Delta r + r\cos\varphi'\Delta\varphi' \quad \text{eliminirt:}$$

$$\Delta(d'-d) = (\sec\varphi' - \sec\varphi)\Delta r - tang\,\varphi'\cos\delta'\Delta\tau' + tang\,\varphi\cos\delta\Delta\tau$$

$$\Delta r = \frac{\Delta(d'-d)}{\sec\varphi' - \sec\varphi} + \frac{\cos\delta'\,tang\,\varphi'\Delta\tau'}{\sec\varphi' - \sec\varphi} - \frac{\cos\delta\,tang\,\varphi\Delta\tau}{\sec\varphi' - \sec\varphi},$$

wobei zu erinnern ist, dass bei Durchgängen auf derselben Seite des Mittelpunkts $\frac{\sec}{tang}\varphi'$ und $\frac{\sec}{tang}\varphi$ dasselbe, bei entgegengesetzten Durchgängen verschiedenes Vorzeichen haben. Betrachten wir zunächst die Unsicherheit, die aus der Beobachtung hervorgeht. Da der Winkel, den die Bewegungsrichtung des Sternes mit der an der Ein- bezw. Austrittsstelle gezogenen Tangente bildet, gleich φ ist, so wird der wahrscheinliche Werth des Gesammtfehlers in der Auffassung der Zeit des Verschwindens oder Wiedererscheinens die Form haben $\sqrt{\left(\frac{a}{v}\right)^2 \frac{\sec^2\delta}{\sin^2\varphi} + b^2}$. Hier bezeichnet a den sogenannten Gesichtsfehler, der wesentlich aus der Unfähigkeit des Auges hervorgeht, Lichtreize, die auf be-

nachbarte Stellen der Netzhaut fallen, getrennt wahrzunehmen, b eine von der Sternbewegung unabhängige Grösse, die bei der Auge- und Ohrmethode aus der Unsicherheit der Auffassung der Schläge der Uhr hervorgeht (Gehörfehler), bei der Registrirmethode dagegen alle Fehler zusammenfasst, die aus der Unsicherheit der Uebertragung der vom Auge empfangenen Eindrücke auf die Muskeln der Hand, ferner aus der veränderlichen Trägheit der electromagnetischen Apparate, den Unsicherheiten der Ablesung der Signale und anderen Fehlerquellen resultiren; endlich ist v die Vergrösserung. Schreibt man statt $\frac{a}{v}$ einfach a, so wird das Quadrat des mittleren Fehlers von r, soweit die Beobachtung daran Theil hat,

$$\frac{15^2}{2}\,\frac{a^2 sec^2\varphi' + b^2 cos^2\delta' tang^2\varphi'}{(sec\,\varphi' - sec\,\varphi)^2} + \frac{15^2}{2}\,\frac{a^2 sec^2\varphi + b^2 cos^2\delta\, tang^2\varphi}{(sec\,\varphi' - sec\,\varphi)^2}.$$

Nehmen wir an, um zwei extreme Fälle zu unterscheiden, dass die Sterne symmetrisch zur Mitte durch das Feld gehen, so ergänzen sich φ und φ' zu 180° und der obige Ausdruck geht sehr nahe über in

$$\frac{15^2}{4}(a^2 + b^2 cos^2\delta\, sin^2\varphi).$$

Der Gesichtsfehler wird demnach, wie auch die Sehnen liegen, mit gleichem Betrag eingehen; dagegen wird der Einfluss des Fehlers b um so kleiner werden, je weiter die Sterne von einander abstehen und je höher ihre Declination ist. Setzen wir zweitens den Fall, dass der Declinationsunterschied nahe gleich dem Radius sei und einer der Sterne in der Nähe des Mittelpunkts durchgehe, so wird der eine Winkel φ nahe an 0°, der andere nahe an 90° liegen und der obige Ausdruck reducirt sich auf

$$\frac{15^2}{2}(a^2 + b^2 cos^2\delta).$$

Bei derselben Declination wird daher, so weit es sich um die reinen Beobachtungsfehler handelt, die symmetrische Anordnung den Vorzug verdienen. Auch wird sich, wenigstens in niedrigen Declinationen, die Anwendung der Registrirmethode wegen des erfahrungsgemäss kleineren Betrages der Grösse b empfehlen.

Was ferner den Einfluss eines constanten Fehlers in der angenommenen Declinationsdifferenz betrifft, so wird ein solcher mit vollem Betrag in den resultirenden Durchmesser eingehen, wenn $\delta' - \delta$ nahe $= 2r$, dagegen sehr vermindert werden, wenn der eine Stern in der Nähe des Mittelpunkts, der andere in der Nähe des oberen oder unteren Randes das Mikrometer passirt, oder auch wenn bei kleiner Declinationsdifferenz die Durchgänge symmetrisch zum Mittelpunkt stattfinden; in letzterem Falle darf aber die Declinationsdifferenz nicht zu klein gewählt werden, weil bei Sehnen, die nicht merklich von dem Durchmesser verschieden sind, die Beobachtungsfehler starke Verrückungen und daher auch Aenderungen des Centriwinkels hervorbringen können. Welcher Methode im Uebrigen der Vorzug gebührt, wird von der relativen Grösse des Gesichts- und Gehörfehlers (bez. b) und des zu befürchtenden Fehlers in dem Declinationsunterschied abhängen; am besten wird man auch hier die Bestimmung auf verschiedene Methoden gründen.

Da der in Winkelmaass ausgedrückte Halbmesser nur so lange constant ist, als der Ring sich in derselben Entfernung vom Objectiv befindet, so ist es nothwendig diese Stellung durch die auf dem Ocularauszug befindliche Scale oder falls eine solche nicht vorhanden ist, durch eine Marke zu fixiren. Strenge genommen wird man aber auch auf die Ausdehnung des Ringes durch die Temperatur und die Aenderungen der Brennweite des Fernrohres Rücksicht

nehmen müssen; wir verweisen hierfür auf den Abschnitt über die Bestimmung des Winkelwerths der Schraube eines Fadenmikrometers.

Es ist weiter zu untersuchen, wie man die Beobachtungen anzuordnen hat, um die günstigsten Resultate für den relativen Ort der beiden Objecte zu erlangen. Zunächst zeigt der Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung eines Ein- und Austritts, dass der Gesichtsfehler einen um so grösseren Einfluss auf die Bestimmung der Zeit des Durchgangs durch den Stundenkreis des Mittelpunkts gewinnt, je weiter die vom Stern beschriebenen Sehnen — um hier diese nicht ganz zutreffende Bezeichnung der Kürze wegen zu gebrauchen — vom Mittelpunkt abstehen. Man wird daher, um den sichersten Anschluss in Rectascension zu erhalten, den Vergleichstern, an welchen der unbekannte Stern angeschlossen werden soll, möglichst so auswählen, dass er nahe gleiche Declination hat, und beide Sterne in der Nähe des Mittelpunktes durchgehen lassen. Sind die Declinationen verschieden, so ordnet man die Durchgänge symmetrisch zum Mittelpunkt an, weil in diesem Fall der Factor des Gesichtsfehlers $\frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi'}$ sein Minimum hat.

Um die günstigsten Bedingungen für die Bestimmung der Declination zu erkennen, suchen wir nach dem Vorgang von Bessel[1]) den Maximalfehler, der aus der wahrscheinlichen Unsicherheit in der Kenntniss des Radius und den wahrscheinlichen Fehlern in der Auffassung der Zeitmomente hervorgehen kann. Aus der Gleichung

$$d^2 = r^2 - \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}\right)^2 15^2 \cos^2\delta$$

folgt der Fehler von d in Function eines Fehlers Δr

$$\Delta d = \frac{r}{d}\,\Delta r;$$

ferner ist der Einfluss des Gesichtsfehlers im Maximum

$$\Delta d = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{d}\,\frac{15^2\cos^2\delta}{2}\,\Delta\vartheta \quad \text{oder wegen} \quad \Delta\vartheta = \frac{a\sec\delta}{\sin\varphi}$$

$$\Delta d = \frac{15ra}{d}$$

und der Einfluss des Fehlers b

$$\Delta d = \frac{15\cos\delta}{d}\sqrt{r^2 - d^2}\,b.$$

Der Gesammtfehler beträgt daher bei dem ungünstigsten Zusammenwirken der Einzelfehler in d:

$$\Delta d = \frac{r}{d}(15a + \Delta r) + \frac{15\cos\delta}{d}\sqrt{r^2 - d^2}\,b$$

und in der Declinationsdifferenz:

$$\Delta(\delta' - \delta) = r(15a + \Delta r)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}\right) + 15\cos\delta\, b\left(\sqrt{\frac{r^2 - d^2}{d^2}} + \sqrt{\frac{r^2 - d'^2}{d'^2}}\right).$$

Setzt man $\delta' - \delta = \varepsilon r$, so ergeben sich die folgenden Werthe für die Factoren von $15a + \Delta r$ und $15\cos\delta\, b$, je nachdem man die beiden Objecte symmetrisch zum Mittelpunkt oder das eine nahe dem oberen oder unteren Rand durchgehen lässt:

[1]) Abhandlungen von F. W. Bessel, herausgegeben von R. Engelmann Bd. II 58, b.

$\delta' - \delta$	Factor von $(15\,a + \Delta r)$ Beide Durchgänge symmetrisch	Ein Durchgang nahe dem Rande	Factor von $15 \cos \delta\, b$ Beide Durchgänge symmetrisch	Ein Durchgang nahe dem Rande
0·0	(∞)	2·00	(∞)	0·00
0·2 r	20·00	2·25	19·90	0·75
0·4 r	10·00	2·67	9·80	1·33
0·6 r	6·67	3·50	6·36	2·29
0·8 r	5·00	6·00	4·58	4·90
1·0 r	4·00	(∞)	3·46	(∞)
1·2 r	3·33	6·00	2·67	4·90
1·4 r	2·86	3·50	2·04	2·29
1·6 r	2·50	2·67	1·50	1·33
1·8 r	2·22	2·25	0·97	0·75
2·0 r	2·00	2·00	0·00	0·00

Die Factoren des Gesichtsfehlers werden hiernach einander gleich für $\delta' - \delta = 0·76r$ und $\delta' - \delta = 2r$; für Werthe $< 0·76r$ sind die Factoren bei symmetrischen Sehnen grösser und um so mehr, je kleiner die δ-Differenz ist, während sie bei grösseren Werthen kleiner sind, als die entsprechenden Werthe für eine Randsehne, sich aber diesen mit Zunahme der δ-Differenz immer mehr nähern. Die Factorencurven b schneiden sich bei den Abscissen $\delta' - \delta = 0·79\,r$, $1·48r$ (und $2r$); für Werthe $< 0·79r$ und $> 1·48r$ sind die Ordinaten für die symmetrischen Durchgänge die grösseren, zwischen diesen beiden Werthen die kleineren. Die günstigsten Bedingungen sind hiernach: Beobachtung einer Randsehne bis etwa $\delta' - \delta = 0·8r$ und symmetrischer Sehnen von $\delta' - \delta = 0·8r$ bis $\delta' - \delta = 1·5r$; über diese Grenzen hinaus verdienen in Bezug auf den Fehler b ein Durchgang nahe dem Rande, in Bezug auf den Gesichtsfehler und den Fehler im Radius symmetrische Durchgänge den Vorzug; der Unterschied ist aber hier kaum von Bedeutung. Die Bestimmung ist am unsichersten, wenn $\delta' - \delta$ nahe $= 0·8\,r$, da für diesen Werth die Factoren im Minimum nahe $= 5$ sind. Es geht ferner aus obigen Zahlen hervor, dass man bei δ-Differenzen von weniger als $0·8\,r$ die Bestimmung beider Coordinaten am günstigsten trennt, weil die Rectascensionsbestimmung in allen Fällen symmetrische Sehnen verlangt. Dagegen sind über jene Grenze hinaus die Bedingungen für beide Coordinaten dieselben, nur wird die Unsicherheit in Rectascension um so grösser, je kleiner die Sehnen sind. Man wird daher bei der Auswahl des Vergleichsterns, an den das zu bestimmende Object angeschlossen werden soll, möglichst darauf zu achten haben, dass sein Unterschied in Declination klein ist, und — wofern man sich auf die unveränderte Lage des Fernrohres in der Zwischenzeit zwischen den beiden Durchgängen verlassen kann — lieber einen etwas grösseren Unterschied in Rectascension in Kauf nehmen. Die Beobachtung der beiden Coordinaten erfolgt dann getrennt; zur Bestimmung des Unterschiedes in gerader Aufsteigung werden nahe centrale Durchgänge, für die Declinationsdifferenz Durchgänge in der Nähe des Randes zu beobachten sein. Hierbei empfiehlt es sich, die letzteren auf beide Seiten des Mittelpunktes zu vertheilen, da, wie die Gleichung $\delta' - \delta = \pm d' \mp d$ zeigt, ein etwaiger durch das verschiedene Aussehen der beiden Objecte erzeugter Auffassungsfehler im Mittel aus nördlichen und südlichen Durchgängen eliminirt wird. Derartige Fehler treten z. B. bei ungleich hellen Objecten auf, indem der schwächere Stern später dem Auge erscheinen und früher demselben wieder verloren gehen wird, als der hellere Stern. Das Mittel der Zeiten oder die daraus abzuleitende α-Differenz wird da-

durch nicht oder nicht erheblich beeinflusst, während die Länge der Sehne und mithin ihr Abstand von dem Mittelpunkt geändert wird. Hat man keinen Parallelstern zur Verfügung, so wird man sich theilweise einen Ersatz dadurch schaffen, dass man das zu bestimmende Object mit zwei Sternen verbindet, die in Declination, und wenn es angeht, auch in Rectascension symmetrisch zu ihm liegen.

Man kann fragen, welches die Bedingungen sind, dass bei Benutzung eines Parallelsternes beide Coordinaten aus denselben Durchgängen mit gleicher Genauigkeit hervorgehen, und in welchem Verhältniss die letztere zu dem erreichbaren Maximum steht. Bezeichnet ε den mittleren Fehler, so ist

$$\varepsilon^2[(\alpha' - \alpha)\cos\delta)] = \frac{a^2}{\sin^2\varphi} + b^2\cos^2\delta$$

$$\varepsilon^2(\delta' - \delta) = \frac{a^2}{\cos^2\varphi} + b^2\cos^2\delta\,\mathrm{tang}^2\varphi;$$

beide Werthe stimmen überein, wenn $\sin\varphi = \cos\varphi$ oder $\varphi = 45°$, d. h. wenn die Sehnen einen Abstand von 0·71 des Radius vom Mittelpunkt haben. Das Gewicht p einer solchen Bestimmung im Verhältniss zu dem Maximalgewicht P ergiebt sich:

$$\text{in AR.}\quad \frac{P}{p} = \frac{2a^2 + b^2\cos^2\delta}{a^2 + b^2\cos^2\delta} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\delta}$$

$$\text{in Decl.}\quad \frac{P}{p} = \frac{2a^2 + b^2\cos^2\delta}{a^2} = 2 + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\delta.$$

Während hiernach die Gewichtsverminderung in Rectascension höchstens $\frac{1}{2}$ beträgt, erreicht sie in Declination mindestens diesen Betrag, kann aber noch grösser werden, wenn b im Verhältniss zu a sehr merklich ist.

Das Ringmikrometer kann als die Verbindung zweier concentrischen Kreise angesehen werden, deren jeder zwei Beobachtungsmomente liefert. Anstatt die Reduction in Declination für die beiden Kreise getrennt auszuführen, kann man einfacher in der folgenden Weise verfahren. Wenn die Indices a und i den äusseren und den inneren Kreis kennzeichnen, so setze man

$$\tau_a\cos\delta = r_a\sin\varphi_a \qquad d = r_a\cos\varphi_a$$
$$\tau_i\cos\delta = r_i\sin\varphi_i \qquad d = r_i\cos\varphi_i$$

und weiter

$$\frac{r_a + r_i}{2} = R \qquad \frac{r_a - r_i}{2} = \Delta,$$

dann folgt

$$\cos\delta(\tau_a + \tau_i) = 2R\sin\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2} + 2\Delta\sin\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2}$$

$$\cos\delta(\tau_a - \tau_i) = 2R\sin\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2} + 2\Delta\sin\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2}$$

$$2d = 2R\cos\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2} - 2\Delta\sin\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2}\sin\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2}$$

$$0 = -2R\sin\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2}\sin\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2} + 2\Delta\cos\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2}.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$\Delta = R\,\mathrm{tang}\frac{\varphi_a - \varphi_i}{2}\,\mathrm{tang}\frac{\varphi_a + \varphi_i}{2}$$

und durch Einsetzen dieses Werthes in die drei vorhergehenden Gleichungen:

$$\cos\delta\,\frac{\tau_a+\tau_i}{2} = R\,\frac{\sin\frac{\varphi_a+\varphi_i}{2}}{\cos\frac{\varphi_a-\varphi_i}{2}}$$

$$\cos\delta\,\frac{\tau_a-\tau_i}{2} = R\,\frac{\sin\frac{\varphi_a-\varphi_i}{2}}{\cos\frac{\varphi_a+\varphi_i}{2}}$$

$$d = R\,\frac{\left(\cos^2\frac{\varphi_a-\varphi_i}{2} - \sin^2\frac{\varphi_a+\varphi_i}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi_a-\varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_a+\varphi_i}{2}} = R\,\frac{\left(\cos^2\frac{\varphi_a+\varphi_i}{2} - \sin^2\frac{\varphi_a-\varphi_i}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi_a-\varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_a+\varphi_i}{2}}.$$

Setzt man daher

$$\frac{\tau_a+\tau_i}{2R}\cos\delta = \sin A \qquad \frac{\tau_a-\tau_i}{2R}\cos\delta = \sin B,$$

so nimmt d die einfache Form an

$$d = R\cos A\cos B.$$

Bei dieser Ableitung ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die aus den Beobachtungen an dem äusseren und inneren Kreis abgeleiteten Abstände der Sehnen vom Mittelpunkt gleiches Gewicht haben. Dies ist — theoretisch wenigstens — nicht der Fall. Bezeichnen ε_a und ε_i die mittleren Fehler der halben Sehnen des äusseren und inneren Kreises, so werden die correspondirenden Fehler in dem Abstand bezw. $\frac{\tau_a\cos\delta}{d}\varepsilon_a$ und $\frac{\tau_i\cos\delta}{d}\varepsilon_i$ sein und der plausibelste Werth des Abstands wird aus dem Ausdruck gefunden $d = \frac{d_a\tau_i^2\varepsilon_i^2 + d_i\tau_a^2\varepsilon_a^2}{\tau_i^2\varepsilon_i^2 + \tau_a^2\varepsilon_a^2}$. Nach dem Früheren enthalten die Grössen ε den Gesichtsfehler a und den Gehörfehler b, an dessen Stelle bei Anwendung der Registrirmethode ein in derselben Weise wirkender Fehler tritt; für den ersteren haben zahlreiche von verschiedenen Beobachtern an Meridianinstrumenten angestellte Durchgangsbeobachtungen den mittleren Werth $4^s{\cdot}71$ ($v = 1$), für den letzteren $0^s{\cdot}10$ bezw. $0^s{\cdot}07$ ergeben. Diese Werthe dürfen indessen nicht ohne weiteres auf das Ringmikrometer übertragen werden, vielmehr muss der Beobachter, wenn er die grösste Genauigkeit erreichen will, durch besondere Beobachtungen in verschiedenen Declinationen und unter Anwendung verschiedener Vergrösserungen den individuellen Werth jener Grössen ermitteln. Ist der Einfluss des Gesichtsfehlers der überwiegende, wie es z. B. bei schwachen Vergrösserungen, die bei Ringmikrometern vorwiegend benutzt werden, und bei gleichzeitig hohen Declinationen der Fall sein würde, so reducirt sich der obige Ausdruck auf

$$d = \frac{d_a r_i^2 + d_i r_a^2}{r_i^2 + r_a^2} = \frac{d_a + d_i}{2} - \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2 + r_i^2}\,\frac{d_a - d_i}{2},$$

so dass in diesem Falle das Mittel der aus dem äusseren und dem inneren Ring gefundenen Abstände um einen constanten Bruchtheil ihrer halben Differenz vermindert werden müsste.

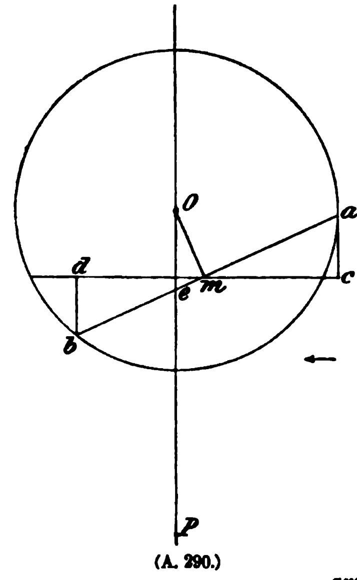
Berücksichtigung der eigenen Bewegung.

Das zu bestimmende Object habe eine eigene Bewegung, welche während der kurzen Zeit des Durchganges durch das Mikrometer als der Zeit proportional angenommen werden kann; $\Delta\alpha'$ (in Zeitsecunden) sei die Zunahme der Recta-

scension, $\Delta\delta'$ (in Bogensecunden) die Zunahme der Declination, beide für eine Secunde Sternzeit. Nun ist von vornherein klar, dass eine eigene Bewegung in Rectascension auf die Bestimmung von $\alpha' - \alpha$ keinen Einfluss ausübt, da das Mittel der Zeiten des Eintritts und des Austritts auch dann noch mit der Zeit des Durchganges durch den Stundenkreis des Mittelpunkts zusammenfällt; dagegen wird die Bestimmung von $\delta' - \delta$ beeinflusst, weil aus der gebrauchten Zeit auf die Länge der Sehne und damit auf ihren Abstand vom Mittelpunkt geschlossen wird. Umgekehrt übt eine eigene Bewegung in Declination nur einen geringen Einfluss auf diesen Abstand aus, ändert dagegen merklich die Zeit des Durchgangs durch den Stundenkreis der Mitte. Zunächst folgt, dass, wenn $\vartheta_2' - \vartheta_1'$ die Sternzeit ist, welche zwischen Eintritt und Austritt verflossen ist, $(\vartheta_2' - \vartheta_1')(1 - \Delta\alpha')$ die Zeit sein würde, die das Object ohne eigene Bewegung gebraucht haben würde, um die Sehne zu durchlaufen; man wird folglich statt des Werthes $\tau' = 15\,\frac{\vartheta_2' - \vartheta_1'}{2}$ zu setzen haben $\tau'' = \tau'(1 - \Delta\alpha')$. Da $\log\tau'' = \log\tau' + \log(1 - \Delta\alpha') = \log\tau' - \mathfrak{M}\Delta\alpha' \ldots$ wo $\mathfrak{M}$ den Modul der Brigg'schen Logarithmen bezeichnet, und da andererseits

$$\Delta\alpha' = \frac{4\Delta\alpha_0'}{2\times 86636} = \frac{\Delta\alpha_0'}{43318}$$

wenn unter $\Delta\alpha_0'$ die Veränderung der Rectascension in 48 Stunden mittlerer Zeit, ausgedrückt in Bogenminuten, verstanden wird, so wird angenähert $\log\tau'' = \log\tau' - 0{\cdot}00001\,\Delta\alpha_0'$, und die Berücksichtigung der eigenen Bewegung in AR. läuft demnach darauf hinaus, dass $\log\tau'$ um ebenso viele Einheiten der 5. Decimale vermindert oder vermehrt wird, als die in Bogenminuten ausgedrückte positive bezw. negative 48-stündige Bewegung in AR. beträgt. Diese Vereinfachung ist bis zu etwa $\Delta\alpha_0' = 200'$ zulässig. Es sei ferner (Fig. 290) ab die von dem Object beschriebene Sehne, m ihre Mitte, cmd ein Bogen gr. Kr. senkrecht auf dem Stundenkreis PO, ac senkrecht zu cd, dann wird die Zeit des Durchganges durch den Stundenkreis PO erhalten, wenn man zu dem Mittel der Zeiten die Zeit zulegt, die der Körper gebraucht, um die Strecke em zu durchlaufen, und die Declinationsdifferenz gegen den Mittelpunkt zu dieser Zeit wird Oe sein. Nun ist



(A. 290.)

$$am = \tau' \cos\delta'(1 - \Delta\alpha')$$

$$\frac{am}{r} = \sin\varphi' \qquad Om = d' = r\cos\varphi'$$

und wenn der Winkel $eOm = amc = \varepsilon$ gesetzt wird, hinreichend nahe

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{ac}{mc} = \frac{\Delta\delta'}{15(-1\Delta\alpha')\cos\delta'},$$

mithin

$$em = \frac{d'\Delta\delta'}{15(1 - \Delta\alpha')\cos\delta'}$$

und die Zeit, welche der Körper gebraucht, um diese Strecke zu durchlaufen

$$\Delta\vartheta' = \frac{d'\,\Delta\delta'}{15^2(1-\Delta\alpha')^2\cos^2\delta'}$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung

$$\Delta\vartheta' = \frac{d'\,\Delta\delta'}{15^2\cos^2\delta'}.$$

Ferner ist $Oe = d'\sec\varepsilon$ oder innerhalb derselben Grenzen $= d'$, wo d' in der oben erläuterten Weise berechnet wird. Beide Coordinatenunterschiede gelten für das Mittel der Durchgangszeiten des bewegten Objectes.

Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung.

Die Strahlenbrechung übt bei Kreismikrometerbeobachtungen einen zweifachen Einfluss aus; einerseits wird durch sie die Lage der Sterne an der Himmelskugel, und zweitens die Geschwindigkeit und Richtung der täglichen Bewegung geändert. Man erhält den analytischen Ausdruck für die Gesammtwirkung am einfachsten, wenn man, wie es Bessel in seiner Abhandlung (Astronomische Nachrichten, Bd. 3 und 4) gethan hat, die durch die Natur des Mikrometers gegebenen Bedingungen unmittelbar auf die scheinbaren d. h. die mit Refraction afficirten Oerter der Sterne, so wie sie zu den verschiedenen Momenten der Beobachtung gehören, anwendet.

Bezeichnen α und δ die wahren Coordinaten, $\alpha + \frac{p_1}{15}$, $\delta + q_1$ bezw. $\alpha + \frac{p_2}{15}$, $\delta + q_2$ die durch die Strahlenbrechung geänderten Coordinaten für die Zeiten des Ein- und Austritts, T und D wie früher den Stundenwinkel und die Declination des Kreismittelpunktes, dann treten an Stelle der Gleichungen 2. und 3. pag. 72 die folgenden:

$$r^2 = 15^2\left(T - \vartheta_1 + \alpha + \frac{p_1}{15}\right)^2 \cos D\cos(\delta + q_1) + (\delta + q_1 - D)^2$$

$$r^2 = 15^2\left(\vartheta_2 - T - \alpha - \frac{p_2}{15}\right)^2 \cos D\cos(\delta + q_2) + (\delta + q_2 - D)^2$$

und ebensolche zwei Gleichungen liefert die Beobachtung des zweiten Sternes.

Setzt man hierin

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} = \vartheta + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}$$

$$\vartheta_2 = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} = \vartheta - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}$$

und analog

$$p_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2} = p + \frac{p_1 - p_2}{2} \quad \text{u. s. f.}$$

und weiter

$$\vartheta - \alpha - \frac{p}{15} - T = x \qquad \delta + q - D = d,$$

so wird mit Vernachlässigung von $\frac{q_1 - q_2}{2}$ unter dem Cosinuszeichen:

$$r^2 = \frac{15^2}{4}\left(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \frac{p_2}{15} + \frac{p_1}{15} - 2x\right)^2 \cos D\cos(\delta + q) + \left(d + \frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{15^2}{4}\left(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \frac{p_2}{15} + \frac{p_1}{15} + 2x\right)^2 \cos D\cos(\delta + q) + \left(d - \frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2.$$

Der halbe Unterschied und die halbe Summe dieser Gleichungen geben:

$$0 = 15^2 x\left(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \frac{p_2}{15} + \frac{p_1}{15}\right) \cos D \cos(\delta + q) + d(q_2 - q_1)$$

$$r^2 = 15^2\left[\tfrac{1}{4}\left(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \frac{p_2}{15} + \frac{p_1}{15}\right)^2 + x^2\right] \cos D \cos(\delta + q) + d^2 + \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right)^2$$

oder wenn

$$p_2 - p_1 = 15(\vartheta_2 - \vartheta_1)\frac{dp}{dt} \qquad q_2 - q_1 = 15(\vartheta_2 - \vartheta_1)\frac{dq}{dt}$$

gesetzt werden, wo die $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ für die Mitte der Zeiten genommen werden müssen,

$$0 = 15\, x\left(1 - \frac{dp}{dt}\right) \cos D \cos(\delta + q) + d\,\frac{dq}{dt}$$

$$r^2 = 15^2\left[\tfrac{1}{4}(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\left(1 - \frac{dp}{dt}\right)^2 + x^2\right]\cos D \cos(\delta + q) + d^2 + \frac{15^2}{4}(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

aus welchen Gleichungen x und d gefunden werden.

Da nun für den zweiten Stern analog

$$\vartheta' - \alpha' - \frac{p'}{15} - T = x' \qquad \delta' + q' - D = d',$$

wo x' und d' in derselben Weise erhalten werden, so ergeben sich die wahren von Strahlenbrechung befreiten Coordinatenunterschiede aus:

$$\alpha' - \alpha = \vartheta' - \vartheta - \frac{p'}{15} + \frac{p}{15} - x' + x$$
$$\delta' - \delta = d' - d - q' + q.$$

Es wird selten nothwendig sein, diese strenge Auflösung anzuwenden; in der überwiegenden Anzahl der Fälle wird man mit einer Näherung auskommen, die auf der Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen der Strahlenbrechung beruht; nur wenn die Objecte dem Horizont sehr nahe stehen, wird man auf die obigen Gleichungen zurückgehen müssen.

Zunächst sind hier die Ausdrücke für die Strahlenbrechung in Rectascension und Declination und ihre Differentialquotienten nach der Zeit zu entwickeln. Bezeichnen P den Pol, Z das Zenith, S den wahren, S' den mit Strahlenbrechung behafteten Ort eines Sternes, so ist nach der angenommenen Bezeichnung $PS = 90 - \delta$, $PS' = 90 - (\delta + q)$, $S'PS = p$, und wenn noch gesetzt wird $SS' = \rho$, $ZSP = \eta$, so erhält man

$$\sin p \cos(\delta + q) = \sin\rho \sin\eta$$
$$\cos p \cos(\delta + q) = \cos\rho \cos\delta - \sin\rho \sin\delta \cos\eta$$
$$\sin(\delta + q) = \cos\rho \sin\delta + \sin\rho \cos\delta \cos\eta$$

aus welchen Gleichungen p und q berechnet werden können. Aus denselben Gleichungen folgen durch Differentiation

$$\cos^2(\delta + q)\frac{dp}{dt} = \sin\eta \cos\delta \frac{d\rho}{dt} + \sin\rho(\cos\rho \cos\delta \cos\eta - \sin\rho \sin\delta)\frac{d\eta}{dt}$$

$$\cos(\delta + q)\frac{dq}{dt} = (\cos\rho \cos\delta \cos\eta - \sin\rho \sin\delta)\frac{d\rho}{dt} - \sin\rho \cos\delta \sin\eta \frac{d\eta}{dt}$$

oder wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dz}\frac{dz}{dt} = \sin\eta \cos\delta \frac{d\rho}{dz} \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\cos\varphi \cos a}{\sin z},$$

wo in der üblichen Weise unter z, a, φ Zenitdistanz, Azimut und Polhöhe verstanden werden,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\sin^2\eta\cos^2\delta}{\cos^2(\delta+q)}\frac{d\rho}{dz} + \frac{\cos\varphi\cos a}{\sin z\cos^2(\delta+q)}(\cos\rho\cos\delta\cos\eta - \sin\rho\sin\delta)\sin\rho$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\sin\eta\cos\delta}{\cos(\delta+q)}(\cos\rho\cos\delta\cos\eta - \sin\rho\sin\delta)\frac{d\rho}{dz} - \frac{\cos\varphi\cos a}{\cos(\delta+q)\sin z}\cos\delta\sin\eta\sin\rho.$$

Die Ausdrücke nehmen eine sehr viel einfachere Gestalt an, sobald man sich auf die erste Potenz der Strahlenbrechung beschränkt. Man erhält dann unmittelbar aus obigen Gleichungen:

$$p = \rho\sin\eta\sec\delta$$
$$q = \rho\cos\eta \quad \text{oder da} \quad \rho = \varkappa\,\mathrm{tang}\,z$$
$$p = \varkappa\,\mathrm{tang}\,z\sin\eta\sec\delta$$
$$q = \varkappa\,\mathrm{tang}\,z\cos\eta$$

und hieraus leicht, nach einigen kurzen Entwickelungen

$$\frac{dp}{dt} = \varkappa\,\mathrm{tang}^2 z\sin^2\eta + \frac{\varkappa\cos\varphi\cos t}{\cos z\cos\delta}$$
$$\frac{dq}{dt} = \varkappa\,\mathrm{tang}^2 z\sin\eta\cos\eta\cos\delta + \varkappa\,\mathrm{tang}\,z\sin\eta\sin\delta.$$

Zur Berechnung der Zenitdistanz und des parallaktischen Winkels dienen die folgenden Ausdrücke, in denen t den Stundenwinkel bezeichnet:

$$\sin z\sin\eta = \cos\varphi\sin t$$
$$\sin z\cos\eta = \cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t$$
$$\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t$$

Führt man hier die für jeden Beobachtungsort mit dem Argument t leicht zu tabulirenden Hülfsgrössen n und N ein, gemäss den Gleichungen:

$$\cos\varphi\cos t = \sin n\sin N$$
$$\sin\varphi = \sin n\cos N$$
$$\cos\varphi\sin t = \cos n,$$

wo N stets $< 90°$ genommen werden kann und dann positiv ist, wenn t im I. und IV., negativ im II. und III. Quadranten liegt, während $\sin n$ stets positiv ist und $\mathrm{cotang}\,n$ das Zeichen von $\sin t$ hat — diese Festsetzungen gelten für nördliche Breiten und müssen für südliche Breiten (bis auf N absolut $< 90°$) in ihr Gegentheil umgekehrt werden — so folgt

$$\mathrm{tang}\,z\sin\eta = \mathrm{cotang}\,n\,\mathrm{cosec}\,(N+\delta)$$
$$\mathrm{tang}\,z\cos\eta = \mathrm{cotang}\,(N+\delta)$$

und hiermit

$$p = \frac{\varkappa\,\mathrm{cotang}\,n}{\sin(N+\delta)\cos\delta} \qquad \frac{dp}{dt} = \varkappa\left(\frac{\mathrm{cotang}^2 n}{\sin^2(N+\delta)} + \frac{\sin N}{\sin(N+\delta)\cos\delta}\right)$$

$$q = \varkappa\,\mathrm{cotang}(N+\delta) \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\varkappa\,\mathrm{cotang}\,n\cos N}{\sin^2(N+\delta)}$$

Nach dem Früheren hat nun die Verbesserung der beobachteten Rectascensionsdifferenz den Ausdruck

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = +\frac{p}{15} - \frac{p'}{15} + x - x',$$

oder da

$$x = \frac{-d\frac{dq}{dt}}{15\left(1-\frac{dp}{dt}\right)\cos D\cos(\delta+q)} = \frac{-d\frac{dq}{dt}}{15\cos^2\delta}\ldots \qquad x' = \frac{-d'\frac{dq'}{dt}}{15\cos^2\delta'}\ldots$$

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = \frac{\varkappa d'\,cotang\,n'\cos N'}{15\sin^2(N'+\delta')\cos^2\delta'} - \frac{\varkappa d\,cotang\,n\cos N}{15\sin^2(N+\delta)\cos^2\delta} + \frac{\varkappa\,cotang\,n}{15\sin(N+\delta)\cos\delta} - \frac{\varkappa\,cotang\,n'}{15\sin(N'+\delta')\cos\delta'},$$

welcher Ausdruck mit Vernachlässigung der Produkte von $(\delta'-\delta)^2$ in die Strahlenbrechung und mit Einführung von $\delta_0 = \frac{\delta+\delta'}{2}$ die einfache Form annimmt:

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = \frac{2\varkappa\,cotang\,n\sec\delta_0\cos(N+\delta_0)}{15\sin^2(N+\delta_0)}(\delta'-\delta),$$

wo die n und N für die Mitte der Zeiten genommen werden müssen.

Was die Verbesserung des Declinationsunterschiedes angeht, so lehren die Gleichungen pag. 84, dass, nachdem die Grössen τ und τ' mit den Factoren $f = \left(1-\frac{dp}{dt}\right)\frac{\cos(\delta+q)}{\cos\delta}$, bezw. $f' = \left(1-\frac{dp'}{dt}\right)\frac{\cos(\delta'+q')}{\cos\delta'}$ multiplicirt worden sind, an die daraus abgeleitete Differenz $d'-d$ noch die Verbesserung $q-q'$ angebracht werden muss. Trägt man die Werthe von q und $\frac{dp}{dt}$ ein, so wird

$$f = 1-\varkappa\left(1+\frac{cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta)}\right),$$

wo in den meisten Fällen derselbe Werth von f, berechnet für das Mittel der Zeiten und die mittlere Declination, für beide Objecte ausreichen wird. Ferner wird dann

$$\Delta(\delta'-\delta) = \frac{\varkappa(\delta'-\delta)}{\sin^2(N+\delta_0)}$$

und damit in noch etwas bequemerer Weise als oben

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = 2\,cotang\,n\cos(N+\delta_0)\sec\delta_0\cdot\frac{\Delta(\delta'-\delta)}{15}.$$

Bei der Ableitung dieser Verbesserungen ist, indem die Strahlenbrechung für die beiden Objecte gleich $\varkappa\,tang\,z$ und $\varkappa\,tang\,z'$ angenommen wurde, die Grösse $\varkappa$ als eine Constante betrachtet worden. In Wirklichkeit ist aber $\varkappa$ eine Function der Zenitdistanz, und man wird sie daher in jedem Falle so annehmen müssen, dass sie die Veränderungen der Strahlenbrechung, auf die es bei den mikrometrischen Messungen in erster Linie ankommt, möglichst genau wiedergiebt. Setzt man daher $\rho = \alpha\,tang\,z$, wo α jetzt eine Function der Zenitdistanz ist, so hat man aus der Vergleichung der Aenderungen beider Ausdrücke

$$\frac{\varkappa}{\cos^2 z} = \frac{\alpha}{\cos^2 z} + tang\,z\frac{d\alpha}{dz} \qquad \text{oder} \qquad \varkappa = \alpha\left(1+\frac{d\log\alpha}{\mathfrak{M}dz}\sin z\cos z\right).$$

Nach den Bessel'schen Refractionstafeln hat α die Form

$$\alpha = \alpha_0\beta^A\gamma^\lambda,$$

wo β vom Barometer-, γ vom Thermometerstand, A und λ dagegen nur von der Zenitdistanz abhängen. Um auch $\varkappa$ auf dieselbe Form zu bringen, werde $\varkappa = \varkappa_0\beta^{A_0}\gamma^{\lambda_0}$ gesetzt, dann giebt die obige Gleichung nach Einsetzung dieser

Werthe von α und $\varkappa$ nach einer kurzen Entwicklung und unter Berücksichtigung, dass die Gleichung für jeden Werth von β und γ gelten muss[1]),

$$\varkappa_0 = \alpha_0\left(1 + \frac{d\,log\,\alpha_0}{\mathfrak{M}\,dz}\,sin\,z\,cos\,z\right)$$

$$A_0 = A + \frac{\alpha_0}{\varkappa_0}\,\frac{dA}{dz}\,sin\,z\,cos\,z$$

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{\alpha_0}{\varkappa_0}\,\frac{d\lambda}{dz}\,sin\,z\,cos\,z.$$

Eine Tafel für $\varkappa_0$ hat unter anderen Hansen in der genannten Abhandlung und Bessel in seinem Aufsatz über den Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen (Astronomische Untersuchungen, Bd. I) gegeben; aus letzterer ist der folgende Auszug entlehnt, wobei noch zu beachten ist, dass in den Retractionsverbesserungen für $\delta' - \delta$ der beobachtete Declinationsunterschied in Bogensecunden gesetzt werden muss; das Argument der Tafel ist die wahre Zenitdistanz, zu deren Berechnung die Gleichung dienen kann:

$$cos\,z = sin\,n\,sin\,(N + \delta_0).$$

Strahlenbrechungs-Tafel für Mikrometer-Beobachtungen.

Wahre Z. D.	$log\,\varkappa_0$	Diff.	A_0	λ_0
0°	6·4458	0		
10	6·4458	2		
20	6·4456	4		
30	6·4452	6		
40	6·4446			
40	6·4446	5		
45	6·4441	8		1·005
50	6·4433	11		1·006
55	6·4422	18		1·009
60	6·4404	26		1·014
65	6·4378			1·020
65	6·4378	8		1·020
66	6·4370	9		1·022
67	6·4361	10		1·024
68	6·4351	12		1·026
69	6·4339	13		1·028
70	6·4326	15		1·031
71	6·4311	19		1·034
72	6·4292	21		1·037
73	6·4271	25		1·040
74	6·4246	28		1·043
75	6·4218			1·047

Wahre Z. D.	$log\,\varkappa_0$	Diff.	A_0	λ_0
75° 0'	6·4218	13		1·047
30	6·4205	17		1·050
76 0	6·4188	21		1·054
30	6·4167	22		1·058
77 0	6·4145	23	0·997	1·062
30	6·4122	25	0·996	1·067
78 0	6·4097	30	0·996	1·073
30	6·4067	35	0·996	1·078
79 0	6·4032	41	0·995	1·085
30	6·3991	44	0·995	1·091
80 0	6·3947		0·994	1·099
80 0	6·3947	33	0·994	1·099
20	6·3914	38	0·994	1·105
40	6·3876	40	0·993	1·112
81 0	6·3836	41	0·993	1·119
20	6·3795	43	0·992	1·127
40	6·3752	50	0·991	1·136
82 0	6·3702	59	0·991	1·146
20	6·3643	65	0·990	1·156
40	6·3578	70	0·989	1·167
83 0	6·3508	81	0·987	1·178
20	6·3427	93	0·985	1·188
40	6·3334	103	0·983	1·199
84 0	6·3231	116	0·981	1·209
20	6·3115	128	0·979	1·219
40	6·2987	140	0·976	1·228
85 0	6·2847		0·973	1·237

Einheiten der 4. Dec.

Bar. *mm*	$log\,B$	Diff.
600	−978	72
610	−906	71
620	−835	69
630	−766	69
640	−697	67
650	−630	66
660	−564	65
670	−499	65
680	−434	63
690	−371	63
700	−308	61
710	−247	61
720	−186	60
730	−126	59
740	−67	58
750	−9	58
760	+49	57
770	+106	56
780	+162	55
790	+217	

$$log\,\beta = log\,B + log\,T$$

Therm. am Bar C°	$log\,T$	Diff.
−30	+21	7
−20	+14	7
−10	+7	7
0	0	7
+10	−7	7
+20	−14	7
+30	−21	

Aeuss. Temp. C°	$log\,\gamma$	Diff.
−30	+648	88
−25	+560	87
−20	+473	84
−15	+389	83
−10	+306	81
−5	+225	80
0	+145	79
+5	+66	77
+10	−11	75
+15	−86	75
+20	−161	73
+25	−234	72
+30	−306	70
+35	−376	

[1]) Vergl. P. A. Hansen, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe.

Beispiel. 1877 April 26 Strassburg (alte Sternwarte). Refractor von $4\frac{1}{2}''$ Oeffnung. Vergr. 40. Radien des Ringes $r_a = 1208''\cdot52$ $r_i = 1027''\cdot53$ $R = 1118''\cdot02$. Chronometer KESSELS (Sternzeit) $\Delta U = -3^m\, 49^s\cdot5$. Beob. KÜSTNER.

Komet II 1877 südlich von ∗7^m ($22^h\, 42^m\, 50^s + 48°\, 55'\cdot8$).

Komet		Stern		Durchgang
$17^h\, 23^m\, 44^s\cdot0$	$24^m\, 11^s\cdot5$	$17^h\, 25^m\, 20^s\cdot15$	$25^m\, 41^s\cdot3$	südlich
26 49·0	26 20·6	28 58·9	28 38·1	
31 38·5	32 2·5	33 48·15	34 15·15	nördlich
35 14·35	34 50·75	36 50·65	36 23·8	
39 5·5	39 29·5	41 12·25	41 40·15	„
42 34·9	42 10·0	44 10·9	43 43·3	
47 27·8	47 54·2	49 9·7	49 31·7	südlich
50 48·75	50 22·5	52 45·4	52 23·7	

Die je zwei unter einander stehenden Zahlen sind die beobachteten Momente des Ein- und Austrittes an demselben, dem äusseren bezw. inneren Kreis. Hieraus ergeben sich bis auf die erst nachher zu berechnenden Columnen:

$\frac{1}{2}(\vartheta_1' + \vartheta_2')$ *a*	*i*	Mittel	$\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ *a*	*i*	Mittel
$17^h\, 25^m\, 16^s\cdot50$	$16^s\cdot05$	$16^s\cdot27$	$27^m\ 9^s\cdot52$	$9^s\cdot70$	$9^s\cdot61$
33 26·42	26·62	26·52	35 19·40	19·47	19·43
40 50·20	49·75	49·97	42 41·57	41·72	41·64
49 8·27	8·35	8·31	50 57·55	57·70	57·62
17 37		10·27			

☄ — ∗	Corr. f. E. B.	α' — α	Red. auf d. Mittel d. Z.	Abw. v. Mittel
$-1^m\, 53^s\cdot34$	$-0^s\cdot73$	$-1^m\, 54^s\cdot07$	$-1^m\, 52^s\cdot39$	$-0^s\cdot52$
52·91	+ 0·54	52·37	51·84	+ 0·03
51·67	+ 0·59	51·08	51·60	+ 0·27
49·31	— 0·64	49·95	51·64	+ 0·23
		— 1 51·868	51·87	
	Refr. +	0·006		

$\frac{1}{2}(\vartheta_2'-\vartheta_1')$ *a*	*i*	$\frac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_1)$ *a*	*i*	$\frac{1}{15}\left(\frac{\tau_a'+\tau_i'}{2}\right)$	$\frac{1}{15}\left(\frac{\tau_a'-\tau_i'}{2}\right)$	$\frac{1}{15}\left(\frac{\tau_a+\tau_i}{2}\right)$	$\frac{1}{15}\left(\frac{\tau_a-\tau_i}{2}\right)$
$1^m 32^s\cdot50$	$1^m\ 4^s\cdot55$	$1^m 49^s\cdot37$	$1^m 28^s\cdot40$	$78^s\cdot52$	$13^s\cdot97$	$98^s\cdot89$	$10^s\cdot49$
1 47·92	1 24·12	1 31·25	1 4·33	96·02	11·90	77·79	13·46
1 44·70	1 20·25	1 29·32	1 1·58	92·47	12·22	75·45	13·87
1 40·47	1 14·15	1 47·85	1 26·00	87·31	13·16	96·92	10·93.

Berechnung der Hülfsgrössen.

Mittel d. Uhrz. ∗	$17^h\, 39^m\ \ 2^s$	δ'	$+ 48°\, 52'\cdot5$	*log cos* $(N + \delta_0)$	9·6963
ΔU	— 3 50	δ	+ 48 55·8	*log cos* δ_0 . .	9·8178
St. Zt.	17 35 12	*log cos t* .	9·3551	*log tang* δ_0 . .	0·0593
α∗	22 42 50	*log cos* φ .	9·8206	*log sin* 1'' . .	4·6856
t	18 52 22	*log sin t* .	$9\cdot9885_n$	*log tang* δ_0 *sin* 1''	4·7449
	283° 5'·5	*log cos* φ *cos t*	9·1757	*log* 2	0·3010
		log sin φ .	9·8750	*log sin n* . .	9·8835
		log cos N .	9·9915	*log cos n* . .	$9\cdot8091_n$
		N . . .	11° 18'·1	*log cotang n* .	$9\cdot9256_n$
		δ_0 . . .	48 54·1	*log sin* $(N + \delta_0)$	9·9385
		$N + \delta_0$.	60 12·2	*log cos z* . . .	9·8220

Refraction					
				z	48° 25′
$\log \frac{\varkappa}{\sin^2(N+\delta_0)}$	6·5666	$\log 2\, cotang\, n$.	0·2266$_n$	$\log \frac{cotang\, n}{\sin(N+\delta_0)}$.	9·9871$_n$
$\log(\delta'-\delta)$ . .	2·2923$_n$	$\log \frac{\cos(N+\delta_0)}{\cos\delta_0}$	9·8785	$\log[\ \ ]^2$	9·9742
$\log\Delta(\delta'-\delta)$ . .	8·8589$_n$			$\log\left(1+\frac{cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta_0)}\right)$	0·2883
	8·9290$_n$		0·1051$_n$		
$\log\Delta(\alpha'-\alpha)$.	7·8879	$\log 15$ . . .	1·1761	$\log\varkappa$	6·4436
					6·7319
				$\log\mathfrak{M}$	9·6378
				$\log f$ . . .	— 0·00023
				$\log \sin^2(N+\delta_0)$	9·8770

stündl. Bew. d. ☄ + 8^s·49 + 5′ 18″·7

$\log$ st. B. (α)	0·9289	$\log\cos\delta$	9·81755
$\log 3610$	3·5575	$\log 15f$	1·17586
$\log$ st. B. (δ)	2·5034	$\log 15f(1-\Delta\alpha')$ . . .	1·17484
$\log\Delta\alpha'$	7·3714	$\log\cos\delta'$	9·81803
$\log\mathfrak{M}$	9·6378	$\log 15f(1-\Delta\alpha')\cos\delta'$.	0·99287
$\log(1-\Delta\alpha')$ . . .	— 0·00102	$\log R$	3·04845
$\log f$	— 0·00023	$\log 15f\cos\delta$	0·99341
$\log 15$	1·17609	$\log\Delta\delta'$	8·9459
		$\log 15^2(1-\Delta\alpha')^2\cos^2\delta'$.	1·9862

Berechnung der Abstände, der Declinationsdifferenz und der Verbesserung der Rectascensionsdifferenz für eigene Bewegung.

$\log 15\frac{f(1-\Delta\alpha')\cos\delta'}{R}$	$\log\frac{1}{15}\left(\frac{\tau_a'+\tau_i'}{2}\right)$	$\log\frac{1}{15}\left(\frac{\tau_a'-\tau_i'}{2}\right)$	$\log\cos A'$	$\log\cos B'$
	7·94442	7·94442		
	1·89498	1·14520	9·85912	9·99669
	1·98236	1·07555	9·72835	9·99760
	1·96600	1·08707	9·76448	9·99748
	1·94106	1·11926	9·80631	9·99707

	$\log \cos A'\cos B'$	$\log\frac{\Delta\delta'}{15^2(1-\Delta\alpha')^2\cos^2\delta}$	$\log d'$
$\log R$	3·04845		6·9597
	9·85581		2·90426$_n$
	9·72595		2·77440
	9·76196		2·81041
	9·80338		2·85183$_n$

$\log\frac{15f\cos\delta}{R}$	$\log\frac{1}{15}\left(\frac{\tau_a+\tau_i}{2}\right)$	$\log\frac{1}{15}\left(\frac{\tau_a-\tau_i}{2}\right)$	$\log\cos A$	$\log\cos B$	$\log\cos A\cos B$
	7·94496	7·94496			$\log R$ 3·04845
	1·99515	1·02078	9·69103	9·99814	9·68917
	1·89092	1·12905	9·86229	9·99692	9·85921
	1·87766	1·14208	9·87340	9·99674	9·87014
	1·98641	1·03862	9·71646	9·99797	9·71443

d' ☄	d ✱	$d'+d$	$\log(d'+d)$	$\log(d'-d)$	$\log[(d'+d)(d'-d)]$
				$\log\frac{tang\,\delta_0 \sin 1''}{2}$	4·4439
—802″·16	—546″·54	—1349″	3·1300$_n$	2·4082$_n$	5·5382
+594·84	+808·46	+1403	3·1470	2·3304$_n$	5·4784$_n$
+646·27	+829·07	+1475	3·1688	2·2625$_n$	5·4313$_n$
—710·93	—579·27	—1290	3·1106$_n$	2·1206$_n$	5·2312

$d'-d$	Corr. f. Krümmung d. Par.	$\delta'-\delta$	Red. a. d. Mittel d. Zeiten	Red. a. $\frac{n+s}{2}$	Abw. v. Mittel
− 255″·62	+ 0″·96	− 254″·66	− 191″·45	− 194″·31	+ 1″·65
− 213 ·62	− 0 ·84	− 214 ·46	− 194 ·65	− 191 ·79	+ 4 ·17
− 182 ·80	− 0 ·75	− 183 ·55	− 203 ·00	− 200 ·14	− 4 ·18
− 131 ·66	+ 0 ·47	− 131 ·19	− 194 ·75	− 197 ·61	− 1 ·65
	Mittel	− 195 ·96	s − 193 ·10	− 195 ·96	
	Refr.	− 0 ·07	n − 198 ·82		
			$n-s$ − 5 ·72.		

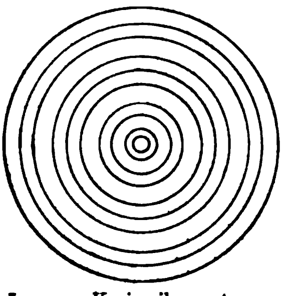
Nach dem Zonen-Catalog der Astronomischen Gesellschaft (Abtheilung Bonn) ist die Position des Vergleichsternes:

			Verwandlung d. Uhrzeit in mittlere Ortszeit	
M. Aeq. 1875·0	22ʰ 42ᵐ 45ˢ 57	+48° 55′ 24″·1		17ʰ 37ᵐ 10ˢ 3
Praec. 1877·0—1875·0	+ 5·13	+ 37·9	Δ*U*	− 3 49·5
	22 42 50·70	+48 56 2·0	Sternzeit	17 33 20·8
Red. a. d. sch. Ort	− 0·56	− 11·6	St.-Zt. i. m. M.	2 18 16·5
Scheinb. Ort *	22 42 50·14	+48 55 50·4		15 15 4·3
☄ − *	− 1 51·86	− 3 16·0	Red. a. m. Zt.	− 2 29·9

Hiernach ist der Ort des Kometen

1877 April 26 15ʰ 12ᵐ 34ˢ 4 M. Zt. Strassburg 22ʰ 40ᵐ 58ˢ 28 + 48° 52′ 34″·4.

Es können Fälle eintreten, in denen die Beobachtung des Verschwindens und Wiedererscheinens eines Objectes am Rande des Ringmikrometers wegen seiner Form und Lichtvertheilung schwierig und unsicher wird. Es wird dies allemal da stattfinden, wo es sich um Objecte von grösserer Ausbreitung und ohne merkliche Lichtconcentration handelt. Zahlreiche Fälle dieser Art findet man unter den Kometen und unter den Nebelflecken. Man ist dann meistens darauf angewiesen, die Messung auf die scheinbare Mitte oder besser auf den scheinbaren Schwerpunkt zu beziehen, begegnet aber bei Benutzung des gewöhnlichen Ringmikrometers der Schwierigkeit, dass in Folge der Unsichtbarkeit des hinter dem Ringe liegenden Theiles die Lage jenes Punktes gerade in den entscheidenden Momenten nur unsicher beurtheilt werden kann. Um für solche Fälle die Genauigkeit der Messung zu erhöhen, construirte FRAUNHOFER[1]) das sogen. Lampen-Kreismikrometer (Fig. 291), eine planparallele Glasplatte, auf der mit flussspathsauren Dämpfen feine concentrische Kreise eingeätzt waren, welche durch seitlich auffallendes Licht in derselben Weise wie die Linien seines Netzmikrometers hell auf dunklem Grunde sichtbar gemacht wurden. Da, wie oben gezeigt worden, die genaue Messung von Declinationsdifferenzen Randsehnen, die Messung der AR.-Unterschiede aber Durchgänge in kurzem Abstand vom Mittelpunkt verlangt, so wurde eine grössere Anzahl von Kreisen auf der Platte hergestellt, um durch Beobachtung an verschiedenen Kreisen die günstigsten Bedingungen für beide Coordinaten zu gewähren. Bei dem von FRAUNHOFER für den 9-zölligen Refractor der Dorpater Sternwarte zuerst gelieferten Mikrometer



Lampen-Kreismikrometer von FRAUNHOFER.

(A. 291.)

---

[1]) s. Gesammelte Schriften.

dieser Art waren nicht weniger als 9 Kreise gezogen, deren Winkeldurchmesser von 2'·7 bis 24'·8 gingen; ein innerster Kreis von nur 15" Durchmesser sollte für die Bestimmung der Durchmesser der übrigen Kreise dienen. Bei der schwächsten dem Mikrometer beigegebenen Vergrösserung (73) umfasste das Gesichtsfeld sämmtliche zehn Kreise, während bei der stärksten (284) nur drei Kreise gesehen wurden. Das Lampen-Kreismikrometer hat in der ihm von FRAUNHOFER gegebenen Form keine grosse Verbreitung gefunden; erst in neuerer Zeit werden wiederum leuchtende Kreise[1]) für mikrometrische Zwecke angewandt, jedoch mit der vortheilhaften Abänderung, dass die Zahl der auf derselben Platte befindlichen Kreise eine sehr viel beschränktere ist. Die Kreise werden mit Diamant auf dünnem Glas, wie es zu Deckgläschen für mikroskopische Präparate benutzt wird, eingeritzt, und nach einer von ABBE angegebenen sinnreichen Methode, auf welche an einer anderen Stelle noch näher eingegangen wird, sichtbar gemacht.

Positionsringmikrometer.

Um bei der Auswahl der Anhaltsterne, an welche ein unbekanntes Object angeschlossen werden soll, weniger beschränkt zu sein und die Messungen allemal unter den günstigsten Bedingungen anstellen zu können, hat KOBOLD[2]) zwei Ringmikrometer zu einem Positionsringmikrometer verbunden. Auf einer planparallelen Glasplatte werden zwei Stahlringe von nahe gleichen Dimensionen neben einander und in einem gegenseitigen Abstand, welche der grössten zu messenden Declinationsdifferenz entspricht, befestigt; die Platte wird, wie gewöhnlich, vor die Feldlinse des Mikrometeroculars gesetzt und dieses in einen am Ocularende des Fernrohres sitzenden Positionskreis (s. d. beim Positionsmikrometer) eingeschraubt, welcher eine auf ganze oder halbe Minuten ablesbare Drehung um die Fernrohrachse gestattet. Stellt man nun das Mikrometer durch Drehung so, dass die Projection der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Ringe auf den Declinationskreis nahe gleich der Declinationsdifferenz der beiden Objecte ist, und beobachtet die Durchgänge einmal nahe der Mitte der Ringe und dann in der Nähe der oberen oder unteren Ränder, so erhält man aus jenen in Verbindung mit der Entfernung der beiden Mittelpunkte und dem Winkel, den die Verbindungslinie mit der Richtung der täglichen Bewegung macht, die Rectascensions-, aus diesen die Declinationsdifferenz, beide Coordinaten also in der vortheilhaftesten Weise. Den Nullpunkt des Positionskreises, d. h. die Ablesung, für welche die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte mit der Richtung der täglichen Bewegung zusammenfällt, ermittelt man einfach und sicher dadurch, dass man den Vergleichstern so durch das Gesichtsfeld laufen lässt, dass er in beiden Ringen in möglichst grosser und gleicher Entfernung vom Mittelpunkt durchgeht. Ergiebt dann die Reduction den Abstand in dem ersten Ringe d_1, in dem zweiten d_2 und ist g der Abstand der Kreismittelpunkte, so hat man zu der Kreisablesung noch $\Delta p = arc\,sin\frac{d_2 - d_1}{g}$ hinzuzufügen, um den Nullpunkt zu erhalten. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass die Kreisablesung dem Sinne der Positionswinkel (s. d.) entsprechend fortschreitet. Ist der Nullpunkt p_0 bekannt, so findet man die gesuchten Unterschiede aus den Gleichungen

$$\alpha' - \alpha = \vartheta' - \vartheta - g\,cos\,(p - p_0)\,sec\,\delta_0$$
$$\delta' - \delta = d' - d + g\,sin\,(p - p_0)$$

---

[1]) O. KNOPF, Beobachtungen von Kometen und kleinen Planeten auf der Grossherzoglichen Sternwarte zu Jena im Jahre 1892. Astr. Nachr. Bd. 134.

[2]) H. KOBOLD, das Positionsringmikrometer. COPERNICUS, Vol. I.

worin ϑ' und ϑ die Zeiten der Durchgänge durch die Meridiane der Mittelpunkte der Ringe, d' und d die Abstände der Sehnen von diesen Mittelpunkten bezeichnen, und für $p - p_0$ der Winkel genommen werden muss, den die Richtung von dem Ring, an welchem das Object $\alpha'\delta'$ beobachtet wird, nach dem zweiten Ring mit der West-Ostrichtung einschliesst. Der Abstand g kann, den obigen Gleichungen gemäss, aus den Coordinatenunterschieden bekannter Sterne leicht ermittelt werden, während zur Bestimmung der Radien der beiden Ringe die früher gegebenen Methoden dienen.

Differenzen-Mikrometer.

Das von BOGUSLAWSKI[1]) im Jahre 1845 unter diesem Namen angegebene Mikrometer zeichnet sich vor allen bis dahin benutzten Formen durch die denkbar grösste Einfachheit aus und besteht in einem blossen Faden oder einer geradlinigen Lamelle, welche in der Hauptbrennebene des Objectivs und möglichst nahe der optischen Achse befestigt ist und durch Drehung in beliebig verschiedene Lagen zum Declinationskreis gebracht werden kann. Die Theorie und der Gebrauch dieses Mikrometers ist leicht zu übersehen. Beobachtet man die Zeiten, wann bei ruhendem Fernrohr und irgend einer Lage des Fadens das bekannte und das zu bestimmende Object den Faden kreuzen, so gewinnt man eine Relation zwischen den Coordinatendifferenzen, dem Winkel, den der Faden mit dem Declinationskreis einschliesst und gegebenen Grössen. Da ein Positionskreis zur directen Bestimmung des Winkels nicht vorausgesetzt wird, so wird der letztere eliminirt, indem bei demselben Stand des Fernrohrs und derselben Lage des Fadens noch der Durchgang eines zweiten bekannten Sterns beobachtet wird. Die durch Elimination des Winkels gewonnene Gleichung enthält nunmehr ausser bekannten Grössen nur noch die Unterschiede der beiden Coordinaten der drei Sterne. Wiederholt man daher dieselbe Beobachtung, aber jetzt in einer anderen Lage des Fadens, so erhält man eine zweite Gleichung, aus der in Verbindung mit der ersteren die Unbekannten sich bestimmen lassen. Seien α_1, δ_1 und α_2, δ_2 die Coordinaten der bekannten Sterne, A, D die Coordinaten des zu bestimmenden Sterns, ε_1 der Winkel, den der Faden mit dem Declinationskreis in der I. Lage einschliesst, ε_2 der entsprechende Winkel in der II. Lage, ϑ_1, ϑ_2, ϑ die Momente in Sternzeit, zu welchen die drei Objecte den Faden in Lage I passiren, ϑ_1', ϑ_2' und ϑ' die Momente für Lage II, so hat man, wie leicht zu ersehen

$$\text{in Lage I} \quad A - \alpha_1 = \vartheta - \vartheta_1 + \frac{D - \delta_1}{15 \cos \frac{D + \delta_1}{2}} \tang \varepsilon_1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{15 \cos \frac{\delta_2 + \delta_1}{2}} \tang \varepsilon_1,$$

woraus nach Elimination von $\tang \varepsilon_1$:

$$A - \alpha_1 = \vartheta - \vartheta_1 + [\alpha_2 - \alpha_1 - (\vartheta_2 - \vartheta_1)] \frac{D - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \cdot f$$

wo der Factor

$$f = \frac{\cos \frac{\delta_2 + \delta_1}{2}}{\cos \frac{D + \delta_1}{2}}$$

---

[1]) Memoirs of the Royal Astronomical Society vol XV.

meist nur wenig von der Einheit verschieden sein wird und ein genäherter Werth von D zu seiner Berechnung ausreicht.

Lage II giebt analog:

$$A - \alpha_1 = \vartheta' - \vartheta_1' + [\alpha_2 - \alpha_1 - (\vartheta_2' - \vartheta_1')] \frac{D - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \cdot f$$

und hieraus in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung:

$$D = \delta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{f} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_1 - (\vartheta' - \vartheta_1')}{\vartheta_2 - \vartheta_1 - (\vartheta_2' - \vartheta_1')}$$

$$A = \alpha_1 + \vartheta - \vartheta_1 + [\alpha_2 - \alpha_1 - (\vartheta_2 - \vartheta_1)] \frac{\vartheta - \vartheta_1 - (\vartheta' - \vartheta_1')}{\vartheta_2 - \vartheta_1 - (\vartheta_2' - \vartheta_1')}$$

oder auch

$$= \alpha_1 + \vartheta' - \vartheta_1' + [\alpha_2 - \alpha_1 - (\vartheta_2' - \vartheta_1')] \frac{\vartheta - \vartheta_1 - (\vartheta' - \vartheta_1')}{\vartheta_2 - \vartheta_1 - (\vartheta_2' - \vartheta_1')} .$$

Wie man leicht erkennt, wird die Bestimmung *ceteris paribus* am genauesten ausfallen, wenn man beide Coordinaten trennt und für die Rectascension den Faden oder die Lamelle nahe in den Declinationskreis stellt, für die Declination dagegen ihm eine möglichst geringe Neigung gegen die Richtung der täglichen Bewegung, bei der einen Hälfte der Durchgänge nach der einen, bei der zweiten nach der anderen Seite giebt. Dabei empfiehlt es sich, wie kaum bemerkt zu werden braucht, die beiden Vergleichsterne in nahe symmetrischer Lage zu dem zu bestimmenden Object auszuwählen. Hat letzteres eine eigene Bewegung, so kann man derselben dadurch Rechnung tragen, dass man alle beobachteten Antritte des bewegten Objectes auf ein und dieselbe Epoche ϑ_0 reducirt, wofür in Lage I (und entsprechend in Lage II) der Ausdruck dient:

$$\Delta\vartheta = (\vartheta - \vartheta_0)\left(\Delta A - \frac{f\Delta D}{\delta_2 - \delta_1} [\alpha_2 - \alpha_1 - (\vartheta_2 - \vartheta_1)]\right),$$

in welchem ΔA und ΔD die in Zeit bezw. Bogensecunden ausgedrückten Bewegungen sind, bezogen auf die bei $(\vartheta - \vartheta_0)$ gewählte Einheit.

Da die Ortsbestimmung mittels dieses Mikrometers lediglich ein Interpolationsverfahren ist, so kann von einer Berücksichtigung der Refraction ganz abgesehen werden, zumal wenn man die Messungen in Bezug auf die Stellungen des Fadens symmetrisch anordnet.

Bemerkenswerth ist noch, dass das Mikrometer auch an einem Fernrohr mit vertikaler Aufstellung benutzt werden kann. Während aber in diesem Fall die Durchgänge der drei Sterne bei unverändertem Stand des Fernrohrs beobachtet werden müssen, kann man und wird man sogar mit Vortheil bei einem parallaktisch montirten Instrument die Vergleichungen des ersten und zweiten Sterns und diejenigen des zweiten und dritten getrennt ausführen.

Der Faden oder die Lamelle unter 45°.

Das vorhergehend beschriebene Verfahren wird sehr vereinfacht, wenn das — parallaktisch aufgestellte — Fernrohr mit einem Positionskreis versehen ist, an welchem die Grösse des Winkels ε unmittelbar abgelesen werden kann. In diesem Falle genügt ein Vergleichstern, und die beiden Gleichungen zur Bestimmung des Ortes des unbekannten Objectes lauten:

$$\alpha' - \alpha = \vartheta' - \vartheta + \frac{\delta' - \delta}{15 \cos \delta_0} \tan \varepsilon$$

$$\alpha' - \alpha = \vartheta_1' - \vartheta_1 + \frac{\delta' - \delta}{15 \cos \delta_0} \tan \varepsilon_1 ,$$

woraus

$$\alpha' - \alpha = \frac{(\vartheta' - \vartheta)\, tang\, \varepsilon_1 - (\vartheta_1' - \vartheta_1)\, tang\, \varepsilon}{tang\, \varepsilon_1 - tang\, \varepsilon} \qquad \delta' - \delta = \frac{15 \cos \delta_0 [\vartheta' - \vartheta - (\vartheta_1' - \vartheta_1)]}{tang\, \varepsilon_1 - tang\, \varepsilon}.$$

Man leitet hieraus sogleich ab, dass beide Coordinaten mit derselben Genauigkeit — soweit es sich um die reinen Beobachtungsfehler in den Antritten handelt — bestimmt werden, wenn man $\varepsilon_1 = - \varepsilon = 45°$ macht, in welchem Falle die letzten Gleichungen die sehr einfache Form annehmen:

$$\alpha' - \alpha = \frac{\vartheta' - \vartheta + \vartheta_1' - \vartheta_1}{2} \qquad \delta' - \delta = 15 \cos \delta_0 \frac{\vartheta' - \vartheta - (\vartheta_1' - \vartheta_1)}{2}$$

Allerdings ist mit diesem Werth, gegenüber der durch Trennung der beiden Coordinaten zu erreichenden günstigsten Bestimmung, ein Genauigkeitsverlust verbunden, dessen Betrag sich aus den folgenden Ausdrücken des wahrscheinlichen oder mittleren Fehlers, unter Annahme einer symmetrischen Stellung der Lamelle, d. h. für $\varepsilon_1 = 360 - \varepsilon$ entnehmen lässt:

$$r^2 [\cos \delta (\alpha' - \alpha)] = \frac{a^2}{\cos^2 \varepsilon} + b^2 \cos^2 \delta \qquad r^2 (\delta' - \delta) = \frac{a^2}{\sin^2 \varepsilon} + b^2 \cos^2 \delta \cotang^2 \varepsilon$$

und für $\varepsilon = \pm 45°$ $r^2 [\cos \delta (\alpha' - \alpha)] = r^2 (\delta' - \delta) = 2a^2 + b^2 \cos^2 \delta$, sodass z. B. in AR. eine Zunahme von r^2 um den vollen Betrag von a^2 eintreten kann. Indessen wird praktisch der Unterschied in der Genauigkeit wegen der Nichtberücksichtigung der anderweitigen Fehlerquellen kleiner sein, als aus jenen theoretischen Ausdrücken hervorgeht, und es gebührt daher dieser von H. C. Vogel[1]) empfohlenen Methode sowohl wegen des nahe gleichen Gewichtes beider Coordinaten, als der einfachen Rechnung, auf die sie führt, entschieden der Vorzug.

Die obigen Gleichungen reichen fast in allen Fällen der Praxis aus; es mag indessen nicht unerwähnt bleiben, dass bei grosser Declinationsdifferenz und zugleich hoher Declination die Declinationsgleichung ein übrigens leicht zu berücksichtigendes Zusatzglied erhält. Bezeichnen T und D Stundenwinkel und Declination des Drehungsmittelpunktes des Kreises, welcher mit einem Punkt der Lamelle zusammenfallend angenommen werden kann, so giebt der Antritt des einen Objectes eine Gleichung von der Form

$$15 (\alpha - \vartheta + T) = (\delta - D)\, tang\, \varepsilon \sec \delta + \frac{(\delta - D)^2 \sin 1'' \sin D\, tang^2 \varepsilon}{2 \cos^2 \delta},$$

welche von der analogen Gleichung für den zweiten Stern subtrahirt zu der Relation führt

$$\alpha' - \alpha = \vartheta' - \vartheta + \tfrac{1}{15} [(\delta' - D) \sec \delta' - (\delta - D) \sec \delta]\, tang\, \varepsilon$$
$$+ \frac{\sin D \sin 1''}{2.15} \left(\frac{(\delta' - D)^2}{\cos^2 \delta'} - \frac{(\delta - D)^2}{\cos^2 \delta} \right) tang^2\, \varepsilon.$$

Setzt man hierin $D = \delta_0 = \frac{\delta + \delta'}{2}$, was darauf hinauskommt, dass die beiden Sterne in Declination symmetrisch zum Mittelpunkt der Lamelle und auch des Gesichtsfeldes eingestellt werden, so werden die beiden Gleichungen für $\varepsilon_1 = - \varepsilon = 45°$

$$\alpha' - \alpha = \vartheta' - \vartheta - \frac{(\delta' - \delta)}{15 \cos \delta_0} - \frac{\gamma}{15 \cos \delta_0}$$
$$\alpha' - \alpha = \vartheta_1' - \vartheta_1 + \frac{(\delta' - \delta)}{15 \cos \delta_0} + \frac{\gamma}{15 \cos \delta_0},$$

wo

---

[1]) Siehe Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, Bd. VIII. P. Kempf, Beobachtungen von Nebelflecken und Sternhaufen.

$$\gamma = (1 + 4\, tang^2 \delta_0) \left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right)^3 sin^2 1'',$$

mithin

$$\alpha' - \alpha = \frac{\vartheta' - \vartheta + \vartheta_1' - \vartheta_1}{2} \quad \text{wie oben,}$$

dagegen

$$\delta' - \delta = 15\, cos\, \delta_0 \frac{\vartheta' - \vartheta - (\vartheta_1' - \vartheta_1)}{2} - \gamma.$$

Für $\delta' - \delta = 10'$ erreicht γ folgende Werthe: bei $\delta_0 = 70°$ $0''{\cdot}03$, $\delta_0 = 75°$ $0''{\cdot}04$, $\delta_0 = 80°$ $0''{\cdot}08$, so dass es innerhalb dieser Grenzen noch vernachlässigt werden kann.

Berücksichtigung der Eigenbewegung.

Hat das zu bestimmende Object eine eigene Bewegung, so erhalten die nach den obigen Ausdrücken berechneten Unterschiede die Incremente

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{\Delta\delta'}{15} sec\, \delta_0 \frac{\vartheta_1' - \vartheta'}{2}$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = 15 \Delta\alpha' cos\, \delta_0 \frac{\vartheta_1' - \vartheta'}{2},$$

wo $\Delta\alpha'$ (in Zeit-) und $\Delta\delta'$ (in Bogensecunden) die Aenderungen der Eigenbewegung in der dem Factor $\frac{\vartheta_1' - \vartheta'}{2}$ zu Grunde liegenden Zeiteinheit sind und die hiernach verbesserten Coordinaten für das Mittel der Zeiten: $\frac{\vartheta_1' + \vartheta'}{2}$ gelten.

Einfluss der Refraction.

Die Einwirkung der Refraction ist eine verschiedene, je nachdem die Lamelle mit der scheinbaren, d. h. der durch die Strahlenbrechung afficirten Richtung der täglichen Bewegung, oder mit der wahren Richtung derselben den Winkel von $\pm 45°$ einschliesst. Indem wir in dieser Hinsicht auf den bezüglichen Abschnitt beim Positionsmikrometer verweisen, setzen wir hier zunächst voraus, dass die Lamelle oder der Faden nach dem wahren Parallel orientirt d. h. gegen den durch das Drehungscentrum gehenden Declinationskreis um $\pm 45°$ geneigt sei.

Sind wiederum α', δ', α, δ, die wahren, $\alpha' + \frac{p'}{15}$, $\delta' + q'$, $\alpha + \frac{p}{15}$, $\delta + q$ die mit Strahlenbrechung behafteten Oerter, so ergeben die Beobachtungen unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$\alpha' + \frac{p'}{15} - \left(\alpha + \frac{p}{15}\right) = \vartheta' - \vartheta - \tfrac{1}{15}[\delta' + q' - (\delta + q)]\, sec \left(\delta_0 + \frac{q' + q}{2}\right) \quad \text{Lage I}$$

$$\alpha' + \frac{p_1'}{15} - \left(\alpha + \frac{p_1}{15}\right) = \vartheta_1' - \vartheta_1 + \tfrac{1}{15}[\delta' + q_1' - (\delta + q_1)]\, sec \left(\delta_0 + \frac{q_1' + q_1}{2}\right). \quad \text{Lage II.}$$

An die ohne Rücksicht auf Strahlenbrechung berechneten Werthe $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ hat man folglich die Verbesserungen anzubringen:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = -\frac{1}{2.15}(p' - p + p_1' - p_1) - \frac{1}{2.15}[q' - q - (q_1' - q_1)]\, sec\, \delta_0$$
$$- \frac{1}{2.15}\left(\frac{q' + q}{2} - \frac{q_1' + q_1}{2}\right) tang\, \delta_0\, sec\, \delta_0\, (\delta' - \delta)$$

$$\Delta(\delta'-\delta) = -\tfrac{1}{2}[p'-p-(p_1'-p_1)]\cos\delta_0 - \tfrac{1}{2}(q'-q+q_1'-q_1)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{q'+q}{2}+\frac{q_1'+q_1}{2}\right)\tang\delta_0(\delta'-\delta).$$

Hier sind p und q die jedesmaligen Refractionen im Augenblicke des Antrittes des Objectes an die Lamelle, mithin Functionen der Declination und des Stundenwinkels, so dass man setzen kann:

$$p'-p = \frac{dp}{d\delta}(\delta'-\delta)+\frac{dp}{dt}(t'-t)$$
$$q'-q = \frac{dq}{d\delta}(\delta'-\delta)+\frac{dq}{dt}(t'-t)$$

und ebenso für die zweite Lage. Berücksichtigt man nun, dass bei

$$\text{Lage I} \quad t'-t = (\delta'-\delta)\sec\delta$$
$$\text{Lage II} \quad t_1'-t_1 = -(\delta'-\delta)\sec\delta$$

so erhält man leicht

$$p'-p = -\varkappa\left\{\frac{\cotang n\cos(N+2\delta_0)}{\sin^2(N+\delta_0)\cos^2\delta_0}-\frac{\cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta_0)\cos\delta_0}-\frac{\sin N}{\sin(N+\delta_0)\cos^2\delta_0}\right\}(\delta'-\delta)$$
$$q'-q = -\varkappa\left\{\frac{1}{\sin^2(N+\delta_0)}-\frac{\cotang n\cos N}{\sin^2(N+\delta_0)\cos\delta_0}\right\}(\delta'-\delta)$$
$$p_1'-p_1 = -\varkappa\left\{\frac{\cotang n_1\cos(N_1+2\delta_0)}{\sin^2(N_1+\delta_0)\cos^2\delta_0}+\frac{\cotang^2 n_1}{\sin^2(N_1+\delta_0)\cos\delta_0}+\frac{\sin N_1}{\sin(N_1+\delta_0)\cos^2\delta_0}\right\}(\delta'-\delta)$$
$$q_1'-q_1 = -\varkappa\left\{\frac{1}{\sin^2(N_1+\delta_0)}+\frac{\cotang n_1\cos N_1}{\sin^2(N_1+\delta_0)\cos\delta_0}\right\}(\delta'-\delta),$$

wo die Grössen n und N in jeder Lage mit den mittleren Stundenwinkeln zu berechnen sind. Hiermit ergiebt sich nach einigen Reductionen:

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = -\varkappa\left(\frac{\cotang n}{\sin(N+\delta_0)}+\frac{\cotang n_1}{\sin(N_1+\delta_0)}\right)\tang\delta_0\sec\delta_0\,\frac{\delta'-\delta}{15}$$
$$+\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\cos N\cos(N+\delta_0)}{\sin^2(N+\delta_0)}-\frac{\cos N_1\cos(N_1+\delta_0)}{\sin^2(N_1+\delta_0)}\right)\sec^2\delta_0\,\frac{\delta'-\delta}{15}$$
$$-\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta_0)}-\frac{\cotang^2 n_1}{\sin^2(N_1+\delta_0)}\right)\sec\delta_0\,\frac{\delta'-\delta}{15}$$
$$-\frac{\varkappa}{2}(\cotang(N+\delta_0)-\cotang(N_1+\delta_0))\tang\delta_0\sec\delta_0\,\frac{\delta'-\delta}{15}$$

$$\Delta(\delta'-\delta) = \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\cos(N+\delta_0)\cos N}{\sin^2(N+\delta_0)}+\frac{\cos(N_1+\delta_0)\cos N_1}{\sin^2(N_1+\delta_0)}\right)\sec\delta_0(\delta'-\delta)$$
$$-\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta_0)}+\frac{\cotang^2 n_1}{\sin^2(N_1+\delta_0)}\right)(\delta'-\delta)$$
$$-\frac{\varkappa}{2}(\cotang(N+\delta_0)+\cotang(N_1+\delta_0))\tang\delta_0(\delta'-\delta)$$
$$-\varkappa\left(\frac{\cotang n}{\sin(N+\delta_0)}-\frac{\cotang n_1}{\sin(N_1+\delta_0)}\right)\tang\delta_0(\delta'-\delta).$$

Man wird selten genöthigt sein, diese vollständigen und weitläufigen Ausdrücke anzuwenden; ist die Zenitdistanz nicht sehr gross und die Zwischenzeit zwischen den beiden Lagen nicht gar zu beträchtlich, so lassen sich dieselben bedeutend vereinfachen; aber auch bei grösseren Zwischenzeiten wird man mit den nachfolgenden genäherten Ausdrücken auskommen, wenn man die Beobachtungen auf beide Lagen symmetrisch vertheilt, also z. B. in der Reihenfolge I II II I beobachtet. Unter diesen Voraussetzungen werden in dem Ausdruck

für $\Delta(\alpha' - \alpha)$ die drei letzten Glieder, in demjenigen für $\Delta(\delta' - \delta)$ das letzte Glied übergangen werden dürfen und man wird einfach setzen können:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = -\frac{2\varkappa \, cotang\, n}{15 \sin(N + \delta_0)} \, tang\, \delta_0 \sec \delta_0 (\delta' - \delta)$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = \varkappa \left(\frac{\cos(N + \delta_0) \cos N \sec \delta_0}{\sin^2(N + \delta_0)} - \frac{cotang^2 n}{\sin^2(N + \delta_0)} - cotang(N + \delta_0)\, tang\, \delta_0 \right)(\delta' - \delta)$$

$$= \varkappa \left(cotang^2 (N + \delta_0) - \frac{cotang^2 n}{\sin^2(N + \delta_0)} \right)(\delta' - \delta).$$

Der letzte Ausdruck setzt voraus, dass bei der Berechnung von $(\delta' - \delta)$ für δ_0 das Mittel der wahren Declinationen genommen ist; wendet man dagegen die scheinbaren mit Strahlenbrechung behafteten Declinationen an, so fällt, wie aus der obigen Entwicklung leicht ersichtlich ist, das Glied $cotang(N + \delta_0)\, tang\, \delta'_0$ weg, und es wird in diesem Falle

$$\Delta(\delta' - \delta) = \varkappa \left(\frac{\cos(N + \delta_0) \cos N \sec \delta_0}{\sin^2(N + \delta_0)} - \frac{cotang^2 n}{\sin^2(N + \delta_0)} \right)(\delta' - \delta).$$

Ist die Lamelle nach dem scheinbaren Parallel orientirt, so kann man diesen Fall auf den vorigen zurückführen, indem man in den ursprünglichen Gleichungen an Stelle von ε und ε_1 $-45° + \Delta P$ und $+45° + \Delta P$ einführt, wo ΔP die Abweichung des scheinbaren Parallels vom wahren, gezählt von Ost durch Süd, bezeichnet. Die ursprünglichen Gleichungen würden also, mit Rücksicht auf die Kleinheit von ΔP, lauten:

$$\alpha' - \alpha = \vartheta' - \vartheta - \frac{(\delta' - \delta)}{15} \sec \delta_0 (1 - 2\Delta P)$$

$$\alpha' - \alpha = \vartheta_1' - \vartheta_1 + \frac{(\delta' - \delta)}{15} \sec \delta_0 (1 + 2\Delta P),$$

woraus hervorgeht, dass der in gewöhnlicher Weise berechnete und von Strahlenbrechung befreite AR.-Unterschied noch die Correction erhält:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{2}{15} \sec \delta_0 \Delta P (\delta' - \delta).$$

Setzt man hierin den Werth[1] $\Delta P = \frac{\varkappa \, cotang\, n \cos N}{\sin^2(N + \delta) \cos \delta}$ ein und vereinigt man dieses Glied mit den übrigen bei Orientirung nach dem wahren Parallel gefundenen Gliedern, so wird jetzt die Gesammtcorrection:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{2\varkappa \, cotang\, n \cos(N + \delta_0)}{15 \sin^2(N + \delta_0) \cos \delta_0} (\delta' - \delta);$$

die Correction der Declination ist in beiden Fällen die gleiche.

Das Mikrometer unter 45° wird, ebenso wie die hier beschriebenen Netz- und Kreismikrometer, vorzugsweise da mit Vortheil angewandt, wo es sich um die Ortsbestimmung schwacher Objecte, wie kleiner Planeten, Kometen, Nebelflecken handelt, welche eine künstliche Beleuchtung des Gesichtsfeldes nicht ertragen. Die Lamelle muss daher, gleichwie der Ring des Kreismikrometers, hinreichend breit sein, damit sie sich von dem dunklen Himmelsgrund deutlich abhebt und zugleich die beiden Beobachtungsmomente, das Verschwinden oder der Eintritt und das Wiedererscheinen oder der Austritt nicht zu rasch auf einander folgen. Sind die Objecte oder eines derselben **sehr** schwach, so em-

[1] Siehe den Abschnitt Positionsmikrometer.

pfiehlt es sich nach den Erfahrungen des Verf., statt einer einfachen Lamelle eine Doppellamelle oder ein Paar von Metalldrähten anzuwenden, die einen der Helligkeit und insbesondere dem Aussehen des Objectes angepassten gegenseitigen Abstand haben, und die Durchgangszeiten durch die (ideale) Mittellinie zu beobachten. Es lässt sich leicht eine Einrichtung treffen, durch welche der Abstand der beiden Lamellen innerhalb gewisser Grenzen variirt werden kann, während die Mittellinie in oder in der Nähe der optischen Achse verbleibt.

Um dem Mikrometer seine richtige Lage zu geben, lässt man einen Stern der Kante der Lamelle entlang laufen und ändert ihre Richtung so lange, bis sie genau parallel dem Wege des Sterns oder, bei grösseren Abständen vom Aequator, bis das Sternbildchen in gleichen Abständen von der Mitte von der Kante halbirt wird. (Vergleiche hierüber die »Bestimmung des Parallels« im Kapitel: Messungen mit dem Fadenmikrometer.) Macht man diese Bestimmung in der Nähe des Meridians, so erhält man, weil dort der scheinbare Parallel mit dem wahren zusammenfällt, die Richtung des wahren Parallels, welche auch für jede andere Lage des Fernrohrs gültig bleibt, wenn die Fehler des Instruments und seiner Aufstellung hinreichend klein sind; wird dagegen der Parallel an dem Orte des zu bestimmenden Objectes ermittelt, so ist er der scheinbare Parallel und weicht von dem wahren Parallel um den Betrag ΔP ab. Dreht man hierauf das Mikrometer um $\pm 45°$, so erhält man die für die Beobachtung verlangte Lage, sei es in Bezug auf die wahre oder scheinbare Richtung der täglichen Bewegung. Uebrigens empfiehlt es sich bei Anwendung einer Lamelle und Beobachtung sowohl des Ein- als des Austritts, den Parallel an beiden Rändern zu bestimmen und das Mittel der Ablesungen am Positionskreis einzustellen, um von dem Einfluss eines etwaigen kleinen Winkels zwischen den Kanten der Lamelle unabhängig zu werden.

Beispiel. 1889 April 9. Beobachtung des Kometen 1889 III am grossen Refractor der Sternwarte Strassburg. Metallfaden unter 45°. Vergr. 154 (Registrirt). Beob.: Becker.

☄ nördlich von $*7^m\!\cdot\!7$ ($5^h\ 15^m\ 17^s + 15°\ 44'\!\cdot\!3$ K).

Der scheinbare Parallel ergab sich aus dem Vergleichstern 357° 34'·7.

	Lage I 42° 34'·7 ☄	*	☄ — *	Lage II 312° 34'·7 ☄	*	☄ — *
	$9^h 48^m\ 4^s\!\cdot\!09$	$48^m 20^s\!\cdot\!29$	$-0^m 16^s\!\cdot\!20$	$10^h 5^m 16^s\!\cdot\!38$	$6^m 11^s\!\cdot\!57$	$-0^m 55^s\!\cdot\!19$
	48 47·40	49 3·89	16·49	6 36·41	7 31·55	55·14
	49 39·79	49 56·13	16·34	7 57·05	8 52·02	54·97
	50 25·07	50 41·09	16·02	9 22·10	10 17·31	55·21
	51 1·06	51 17·54	16·48	10 39·97	11 34·71	54·74
	51 34·33	51 50·80	16·47	12 25·51	13 20·64	55·13
	52 9·15	52 25·71	16·56	13 46·21	14 41·51	55·30
	52 51·51	53 8·00	16·49	15 9·11	16 4·45	55·34
	53 48·21	54 4·31	16·10	16 29·36	17 24·73	55·37
	54 43·61	54 59·95	16·34	17 51·50	18 46·55	55·05
	55 36·91	55 53·70	16·79	19 31·79	20 27·50	55·71
	56 13·53	56 29·61	16·08	21 13·41	22 8·40	54·99
Mittel	9 52 4·55	Mittel	—0 16·36	22 47·00	23 42·70	55·70
ΔU	+ 5 38·7		Mittel	10 13 46·6	Mittel	—0 55·22
Sternzeit	9 57 43·2		Diff. g. L. I	+ 21 42·1		
Stzt. i. m. M.	1 11 35·8		Red. a. M. Zt.	— 3·6		
Diff.	8 46 7·4					
Red. a. M. Zt.	— 1 26·2.					

Man hat folglich

			☄ — ✱	
	$8^h\,44^m\,41^s\!\cdot\!2$ M. Zt. Str.	Lage I	$-16^s\!\cdot\!36$	$\delta + 15°\,44'\!\cdot\!3$
	9 6 19·7 „ „ „	Lage II	$-55\!\cdot\!22$	$\delta' + 15\;\;48\!\cdot\!7$
Mittel	8 55 30·4 „ „ „	$\alpha' - \alpha$	$-35\!\cdot\!79$	$\delta_0 + 15\;\;46\!\cdot\!5$
½ Diff.	10 49·2	½ (I — II)	+19·43	
	10·82	*log* „	1·28847	
	$0^h\!\cdot\!1803$	*log* 15	1·17609	
			2·46456	
		$\cos\delta_0$	9·98333	
		$\delta' - \delta$	$+280''\!\cdot\!47$.	

Die eigene Bewegung des Kometen in 1^h m. Zt. betrug $-1^s\!\cdot\!56$ $-5''\!\cdot\!6$, woraus

$$15\,\Delta\alpha = -23\!\cdot\!4 \qquad \frac{\Delta\delta}{15} = -0\!\cdot\!373$$

$\log\frac{\Delta\delta}{15}$	$9\!\cdot\!5717_n$	$\log\frac{\Delta\delta}{15}\sec\delta_0$	$9\!\cdot\!5884_n$	Corr. $(\alpha' - \alpha)$	$-0^s\!\cdot\!07$
$\log\cos\delta_0$	9·9833	$\log\frac{\vartheta_1' - \vartheta'}{2}$	9·2560	Corr. $(\delta' - \delta)$	$-4''\!\cdot\!06$
$\log 15\Delta\alpha$	$1\!\cdot\!3692_n$	$\log 15\Delta\alpha\cos\delta_0$	$1\!\cdot\!3525_n$		

Refraction:

St.-Zt.	$10^h\;9^m$	$\log\frac{15}{2}$	0·875
α	5 15	$\log\cos\delta_0$	9·983
t	4 54	$\log\frac{\operatorname{cotang} n}{\sin(N+\delta_0)}$	0·217
δ_0	+15 47	$\log\operatorname{cotang}(N+\delta_0)$	0·241
N	+14 5		0·458
$N + \delta_0$	+29 52	$\log\frac{15}{2}\cos\delta_0$	0·858
$\log\sin n$	9·888	$\log\operatorname{cotang}^2(N+\delta_0)$	0·482
$\log\operatorname{cotang} n$	9·914	$\log\frac{\operatorname{cotang}^2 n}{\sin^2(N+\delta_0)}$	0·434
$\log\sin(N+\delta_0)$	9·697	G. L.	−0·980
$\log\cos z$	9·585		9·600
z	67°·4	$\log\varkappa(\delta' - \delta)$	8·878
$\log\varkappa$	6·436		9·502
$\log(\delta' - \delta)$	2·442	$\Delta(\alpha' - \alpha)$	$+0^s\!\cdot\!03$
		$\Delta(\delta' - \delta)$	$+0''\!\cdot\!02$

Nach dem Cat. A. G. Berlin *A* ist der Ort des Vergleichsternes

M. A. 1875·0	$5^h\,14^m\,28^s\!\cdot\!85$	$+15°\,43'\,19''\!\cdot\!5$
Praec. 1889·0—1875·0	+48·18	+54·9
M. A. 1889·0	5 15 17·03	+15 44 14·4
Red. a. sch. Ort	−0·96	−5·4
Sch. Ort ✱	5 15 16·07	+15 44 9·0
☄ — ✱	−35·79	+ 4 40·47
Corr. f. E. B.	— 0·07	— 4·06
Corr. f. Refr.	+ 0·03	+ 0·02

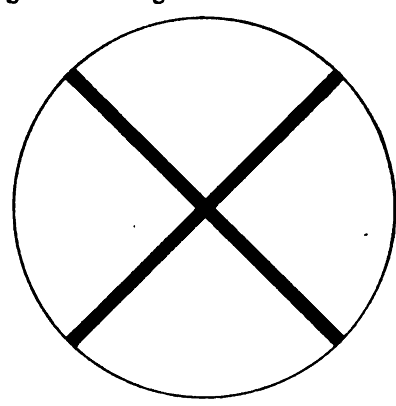
Hieraus folgt der Ort des Kometen

1889 April 9 $8^h\,55^m\,30^s\!\cdot\!4$ M. Zt. Strassburg $5^h\,14^m\,40^s\!\cdot\!24$ $+15°\,48'\,45''\!\cdot\!4$.

Bem. Komet klein, matt, nach der Mitte verdichtet, wegen hellen Himmelsgrundes besonders zuletzt schwierig zu beobachten.

Kreuzstabmikrometer — *Cross-Reticule.*

Anstatt der Lamelle nach einander die beiden Lagen unter 45° zu geben, kann man durch Anwendung zweier Lamellen oder eines Kreuzes dieselben gleichzeitig herstellen und erhält dann das in neuerer Zeit vielfach benutzte Kreuzstabmikrometer[1]) (Fig. 292). Dasselbe ist im Grunde nichts anderes, als das alte CASSINI'sche Netz, an welchem die zur Orientirung und zur Bestimmung des Fehlers der Orientirung dienenden Fäden weggelassen sind; es verlangt daher ein parallaktisch montirtes Fernrohr, ein Positionskreis ist nicht unumgänglich nothwendig, erleichtert aber den Gebrauch.



Kreuzstabmikrometer.
(A. 292.)

Die nach dem Vorigen leicht abzuleitenden Reductionsformeln lauten, wenn die Zeiten des Antritts an die Lamellen in ihrer Aufeinanderfolge mit ϑ_1, ϑ_2, bezw. ϑ_1', ϑ_2' und die Declination des Kreuzungspunktes mit D bezeichnet werden:

$$\alpha' - \alpha = \frac{\vartheta_1' + \vartheta_2'}{2} - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$$

$$\delta' - \delta = \pm \tau' \cos \delta' \mp \tau \cos \delta - 2 \frac{\sin D}{\sin 1''} (\cos \delta' \sin^2 \tfrac{1}{2} \tau' - \cos \delta \sin^2 \tfrac{1}{2} \tau),$$

wo die oberen / „ „ unteren } Zeichen sich auf einen nördlichen / südlichen } Durchgang beziehen und, wie früher

$$\tau = 15 \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} \qquad \tau' = 15 \frac{\vartheta_2' - \vartheta_1'}{2}$$

gesetzt sind.

Es empfiehlt sich, die Sterne symmetrisch zum Centrum durchgehen zu lassen, bei sehr kleinen Declinations-Differenzen dagegen die Durchgänge auf beide Seiten des Centrums zu vertheilen. Die letzte Gleichung kann dann vortheilhafter so geschrieben werden:

$$\delta' - \delta = \pm \tau' \cos \delta' \mp \tau \cos \delta + \frac{\sin \delta_0 \cos \delta_0}{2} (\tau + \tau')(\tau - \tau') \sin 1''.$$

Einfluss eines Fehlers in dem Winkel der Lamellen.

Beträgt der Winkel der beiden Lamellen statt 90° 90° + i, wo i eine kleine Grösse ist, deren zweite und höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so ist, abgesehen von dem Correctionsglied, $\delta - D = \pm \frac{\tau \cos \delta}{\tan g(45 + \frac{1}{2} i)}$ oder die an die Declinations-Differenz anzubringende Correction:

$$\Delta(\delta' - \delta) = -(\delta' - \delta)\, i \sin 1',$$

wenn i in Minuten ausgedrückt ist.

Der Einfluss dieses Fehlers wird daher eliminirt, wenn man die Beobachtungen wiederholt, nachdem man das Mikrometer um 90° gedreht hat; denn wenn der eine Winkel um i zu gross ist, ist der Nebenwinkel um denselben Betrag zu klein.

---

[1]) W. FABRITIUS, Ueber das Kreuzstabmikrometer. Astr. Nachr. Bd. 129. — G. L. TUPMAN, On the Cross Reticule. M. N. XLVIII. Siehe auch KEMPF, a. a. O., pag. 4.

Einfluss des Orientirungsfehlers.

Fällt die Halbirungslinie des Winkels nicht mit dem centralen Declinationskreis zusammen, sondern macht mit demselben einen Winkel p (gezählt in der Richtung der Positionswinkel und ausgedrückt in Bogenminuten), so bedarf die gemessene A R.-Differenz der Correction $\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{2}{15}(\delta' - \delta) \sec \delta_0\, p \sin 1'$, während bei der hier vorausgesetzten Kleinheit von p die Declinationsdifferenz als richtig betrachtet werden kann. Mittelst dieses Ausdrucks wird man in solchen Fällen, wo ein Positionskreis zu genauer Orientirung nicht vorhanden ist, aus Sternen von bekannter gegenseitiger Lage und möglichst grossem Declinationsunterschied den Fehler der Orientirung bestimmen können.

Eigene Bewegung.

Das Objekt $\alpha'\delta'$ habe eine eigene Bewegung von $\Delta\alpha'$ Zeit- und $\Delta\delta'$ Bogensecunden entsprechend einer Secunde Sternzeit; man erhält dann die für $\frac{\vartheta_1' + \vartheta_2'}{2}$ gültigen Coordinaten nach Anbringung der Correctionen:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \mp \frac{\tau' \sec \delta' \Delta\delta'}{225}$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = \mp \tau' \cos \delta' \Delta\alpha'.$$

wo das obere Zeichen für nördliche, das untere für südliche Durchgänge gilt. Uebrigens kann der Einfluss der Bewegung in A. R. auch in derselben Weise wie bei dem Kreismikrometer berücksichtigt werden.

Einwirkung der Strahlenbrechung.

Unter der Annahme, dass das Mikrometer nach dem wahren Parallel orientirt ist, ergeben sich die wegen Strahlenbrechung erforderlichen Verbesserungen:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = -\frac{2\varkappa \operatorname{cotang} n \operatorname{tang} \delta_0 \sec \delta_0}{15 \sin(N + \delta_0)} (\delta' - \delta)$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = \varkappa\left(\operatorname{cotang}^2(N + \delta_0) - \frac{\operatorname{cotang}^2 n}{\sin^2(N + \delta_0)}\right)(\delta' - \delta)$$

oder

$$\Delta(\delta' - \delta) = \varkappa\left(\frac{\cos N \cos(N + \delta_0)}{\sin^2(N + \delta_0)\cos\delta_0} - \frac{\operatorname{cotang}^2 n}{\sin^2(N + \delta_0)}\right)(\delta' - \delta),$$

je nachdem die Declinationsdifferenz mit den wahren oder scheinbaren Declinationen berechnet ist. Ist das Mikrometer nach dem scheinbaren Parallel gerichtet, so wird die Verbesserung des A. R.-Unterschiedes:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{2\varkappa \operatorname{cotang} n \cos(N + \delta_0)}{15 \sin^2(N + \delta_0)\cos\delta_0} (\delta' - \delta).$$

Das folgende Beispiel bezieht sich auf ein Doppelkreuzstabmikrometer, welches zum Unterschiede von dem einfachen Kreuzstabmikrometer aus vier (Stahl-) Lamellen besteht, die je ein Paar kreuzweise und dem anderen parallel angeordnet sind. Das Mikrometer erhält dadurch dasselbe Aussehen, wie das in Fig. 293 dargestellte Square bar-Mikrometer, ist aber nicht an die Voraussetzung gebunden, dass die Lamellen ein genaues Quadrat einschliessen. Die Reduction ist dieselbe, wie für das einfache Mikrometer, wird aber am einfachsten zusammen für beide Kreuze ausgeführt.

Beobachtung des Kometen Gale 1894 Mai 8 am 6-zölligen Refractor der Sternwarte in Karlsruhe. Beobachter RISTENPART.

☄ nördlich von ✱ $8^m{\cdot}7$ B. D. +10° 1954
(Mikrometer nach dem wahren Parallel orientirt).

Die Momente des Verschwindens und Wiedererscheinens an den vier Lamellen waren für den ersten Durchgang:

☄		Mittel	✱		Mittel
$12^h\ 38^m\ 31^s{\cdot}03$	$36^s{\cdot}58$	$38^m\ 33^s{\cdot}80$	$12^h\ 39^m\ 3^s{\cdot}63$	$10^s{\cdot}73$	$39^m\ 7^s{\cdot}18$
38 53·73	59·73	38 56·73	39 24·92	32·52	39 28·72
39 5·26	12·37	39 8·81	39 35·28	42·56	39 38·92
39 27·81	35·28	39 31·54	39 58·31	65·68	40 1·99
	Mittel	39 2·72		Mittel	39 34·20

In derselben Weise wurden noch drei Durchgänge beobachtet und hierauf die Beobachtungen nach Drehung des Mikrometers (mittelst des Positionskreises) um 90° wiederholt.

Diese acht Durchgänge ergaben der Reihe nach

	Durchgangszeit des ☄ durch den Stundenkreis der Mitte	des ✱	$(\alpha' - \alpha)$
Lage I	$12^h\ 39^m\ 2^s{\cdot}72$	$12^h\ 39^m\ 34^s{\cdot}20$	$-0^m\ 31^s{\cdot}48$
	41 12·64	41 43·37	30·73
	43 7·94	43 38·06	30·12
	45 7·05	45 36.37	29·32
Lage II	13 3 39·57	13 4 2·78	23·21
	5 35·24	5 57·42	22·18
	7 37·00	7 58·46	21·46
	9 36·36	9 56·73	20·37
Mittel	12 54 22·3		−0 26·109.

Die Zwischenzeiten zwischen den Durchgängen durch die Lamellen der beiden Kreuze (1. u. 3., bezw. 2. u. 4. Lamelle) sind:

	Lage I		Lage II	
	☄ (nördlich)	✱ (südlich)	☄ (nördlich)	✱ (südlich)
	$35^s{\cdot}01$	$31^s{\cdot}74$	$34^s{\cdot}52$	$57^s{\cdot}28$
	34·81	33·27	35·38	55·82
	38·73	32·28	35·75	57·06
	36·92	33·40	37·46	56·01
	40·26	32·20	37·81	57·32
	38·58	33·97	40·76	55·73
	42·73	32·29	40·55	57·63
	40·71	33·55	42·15	56·07
Mittel	38·469	32·837	38·048	56·815
log	1·58511	1·51636	1·58033	1·75446
$log\ \frac{15}{2}$	0·87506	0·87506	0·87506	0·87506
	$log\ \tau'$ 2·46017	$log\ \tau$ 2·39142	$log\ \tau'$ 2·45539	$log\ \tau$ 2·62952
	$log\ cos\ \delta'$ 9·99270	$log\ cos\ \delta$ 9·99293	$log\ cos\ \delta'$ 9·99270	$log\ cos\ \delta$ 9·99293
	$log\ \tau'\ cos\ \delta'$ 2·45287	$log\ \tau\ cos\ \delta$ 2·38435	$log\ \tau'\ cos\ \delta'$ 2·44809	$log\ \tau\ cos\ \delta$ 2·62245
	$\tau'\ cos\ \delta'$ 283″·71	$\tau\ cos\ \delta$ 242″·30	$\tau'\ cos\ \delta'$ 280″·60	$\tau\ cos\ \delta$ 419·23
$(\delta' - \delta)$		526″·01		699″·83

Mittel 612″·92.

Die Correction für Krümmung des Parallels kann, wie ein Ueberschlag zeigt, übergangen werden, dagegen müssen die gefundenen Unterschiede $(\alpha' - \alpha)$ und $(\delta' - \delta)$ noch für Eigenbewegung und Refraction verbessert werden. Die eigene

Bewegung des Kometen in 1^s Sternzeit betrug nach der Ephemeride $+ 0^s\cdot00586$ bezw. $+ 0''\cdot1214$. Man hat daher

$\log \tau'$	2·4578	
$\log \cos \delta'$	9·9927	
$\log \Delta \delta'$	9·0842	
$\log 225$	2·3522	
$\log \tau' \sec \delta'$	2·4651	$\Delta(\alpha' - \alpha) - 0^s\cdot157$
$\log \dfrac{\Delta\delta'}{225}$	6·7320	
$\log \tau' \cos \delta'$	2·4505	$\Delta(\delta' - \delta) - 1''\cdot65.$
$\log \Delta \alpha'$	7·7679	

Bei der Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung ist der erste pag. 101 gegebene Ausdruck für $\Delta(\delta' - \delta)$ zu benutzen, weil bei der Reduction die wahren Declinationen benutzt worden sind:

Uhrzeit	12^h	54^m	$22^s\cdot3$
Correction der Uhr		− 1	20·5
Sternzeit Karlsruhe	12	53	1·8
St.-Zt. i. m. M.	3	5	6·4
Diff.	9	47	55·4
Red. auf mittl. Zt.		− 1	36·3
	9	46	19·1.

Sternzeit	12^h	53^m	2^s
α'	9	6	30
St. W.	3	46	32

δ'	$+ 10^\circ\ 28'$
δ	$+ 10\ \ 18$
δ_0	$+ 10\ \ 23$
N	$+ 25\ \ 33$
$N + \delta_0$	$+ 35\ \ 56$
$\log tang\, \delta_0$	9·263
$\log \cos \delta_0$	9·993
$\log tang\, \delta_0 \sec \delta_0$	9·270
$\log \frac{15}{2}$	0·875
$\log \sin n$	9·923
$\log \sin (N + \delta_0)$	9·769
$\log cotang\, n$	9·816
$\log cotang\, (N + \delta_0)$	0·140
$\log \cos z$	9·692
z	$60^\circ\ 30'$
$\log \varkappa$	6·440
$\log (\delta' - \delta)$	2·787

$\log \dfrac{cotang\, n}{\sin(N+\delta_0)}$	0·047
$\log \frac{2}{15}\, tang\, \delta_0 \sec \delta_0$	8·395
$\log cotang^2 (N + \delta_0)$	0·280
$\log \dfrac{cotang^2 n}{\sin^2(N + \delta_0)}$	0·094
G. L.	−0·458
	8·442
$\log \varkappa(\delta' - \delta)$	9·227
	9·822
$\Delta(\alpha' - \alpha)$	$-0^s\cdot005$
$\Delta(\delta' - \delta)$	$+0''\cdot11$

Nach den Zonenbeobachtungen der A. G. (Leipzig) ist die Position des ✱:

M. A. 1875·0	$9^h\ 5^m\ 53^s\cdot32$	$+ 10^\circ\ 22'\ 54''\cdot3$
Praec. 1894·0—1875·0	+ 1 1·56	− 4 36·83
M. A. 1894·0	9 6 54·88	+ 10 18 17·47
Red. a. scheinb. Ort	+ 0·89	+ 0 24
Sch. Ort ✱	9 6 55·77	+ 10 18 17·7
☄ − ✱	− 26·109	+ 10 12·92
Corr. f. E. B.	− 0·157	− 1·65
Corr. f. Refr.	− 0·005	+ 0·11

folglich Ort des Kometen

1894 Mai 8 $9^h\ 46^m\ 19^s\,1$ M. Z. Karlsruhe $9^h\ 6^m\ 29^s\cdot50$ $+ 10^\circ\ 28'\ 29''\cdot1$.

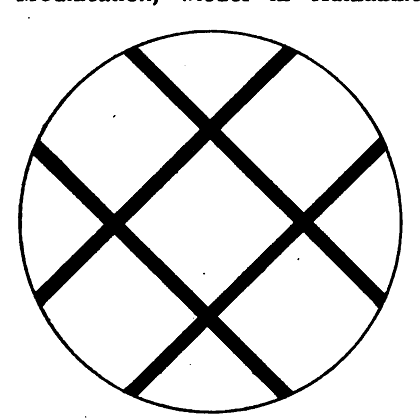
Aus den in beiden Lagen erhaltenen Declinationsunterschieden erhält man einen Werth für den Winkel, den — im Mittel für beide Kreuze — die Lamellen mit einander einschliessen. Auf dieselbe Zeit reducirt, giebt

Lage I 615″·47
Lage II 610·37
folglich $5''\cdot 10 = 2(\delta' - \delta)\, i \sin 1'$ oder $i = 14'\cdot 3$.

Der Winkel beträgt also nach dieser Bestimmung nicht genau 90°, sondern 90° ± 14′·3.

Quadratisches — *Square bar* — Mikrometer.

Auch das von BURKHARDT[1]) im Anfang dieses Jahrhunderts empfohlene »vollkommene Viereck« ist in neuerer Zeit, jedoch in einer zweckmässigen Modification, wieder in Aufnahme gekommen. Während bei BURKHARDT das Quadrat dem Gesichtsfeld eingeschrieben und die eine Diagonale behufs Ermittelung ihrer Abweichung von dem Declinationskreis durch einen dünnen Messingstreifen kenntlich gemacht ist, hat das Mikrometer in neuerer Zeit die in Fig. 293 dargestellte Form erhalten. Die Verlängerungen der Seiten dienen sowohl für solche Fälle, wo die Declinationsdifferenz grösser ist, als die Diagonale, als auch zur Bestimmung des Orientirungsfehlers, wenn ein Positionskreis nicht vorhanden oder das Fernrohr nicht parallaktisch montirt ist.


Quadratisches — *Square bar* — Mikrometer. (A. 293.)

Es werde zunächst angenommen, dass die eine Diagonale mit dem centralen Declinationskreis zusammenfalle, T und D seien der Stundenwinkel und die Declination des Mittelpunkts des Quadrats, ϑ_1 die Sternzeit des Antrittes eines Objects an die im Sinne der Bewegung voraufgehende, ϑ_2 dieselbe für die nachfolgende Seite des Quadrates, g die Länge der Diagonale — dann lauten, wie man leicht findet, die beiden Grundgleichungen:

$$\alpha + T = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$$

$$\delta - D = \pm \frac{g}{2} \mp \frac{\cos\delta}{\sin 1''} \sin \frac{15(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{2} - \frac{2\cos\delta \sin\left(D \pm \frac{g}{2}\right)}{\sin 1''} \sin^2 \frac{15(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{4},$$

wo das obere Zeichen für nördliche, das untere für südliche Durchgänge gilt. Dieselben Beziehungen finden auch dann statt, wenn der Stern ausserhalb des Quadrats die Lamellen passirt, wofern man nach der Bezeichnung, die S. C. CHANDLER in seiner eingehenden Monographie über dieses Mikrometer[2]) eingeführt hat, ϑ_1 durchweg auf die beiden Lamellen, die sich im Positionswinkel 90° schneiden, und ϑ_2 auf diejenigen, die sich in 270° schneiden, bezieht. Bei Durchgängen innerhalb des Quadrats wird dann stets $\vartheta_2 > \vartheta_1$, ausserhalb $\vartheta_2 < \vartheta_1$ sein.

[1]) VON ZACH, Monatliche Correspondenz, 1. Band.

[2]) S. C. CHANDLER jr., On the Square bar Micrometer (Memoirs of the American Academy of arts and sciences, Vol. XI).

Nach Abzug der obigen Gleichungen von den analogen Ausdrücken, welche die Beobachtung des zweiten Objectes giebt, erhält man:

$$\alpha' - \alpha = \frac{\vartheta_1' + \vartheta_2'}{2} - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$$

$$\delta' - \delta = \pm\frac{g'}{2} \mp \frac{g}{2} - \frac{\pm\, sin\,\frac{15(\vartheta_2' - \vartheta_1')}{2}\, cos\,\delta' \mp sin\,\frac{15(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{2}\, cos\,\delta}{sin\,1''}$$

$$- \frac{2\,sin^2\,\frac{15(\vartheta_2' - \vartheta_1')}{4}\, cos\,\delta'\, sin\,(D \pm \frac{g}{2}) - 2\,sin^2\,\frac{15(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{4}\, cos\,\delta\, sin\,(D \pm \frac{g}{2})}{sin\,1''},$$

wofür man auch in den meisten vorkommenden Fällen, bei mässigen Declinationen, schreiben kann

$$\delta' - \delta = \pm\frac{g'}{2} \mp \frac{g}{2} - \frac{15}{2}\, cos\,\delta_0 [\pm(\vartheta_2' - \vartheta_1') \mp (\vartheta_2 - \vartheta_1)]$$

$$- \frac{cos\,\delta_0\, sin\,\delta_0}{sin\,1''}\left[2\,sin^2\,\frac{15(\vartheta_2' - \vartheta_1')}{4} - 2\,sin^2\,\frac{15(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{4}\right].$$

Das letzte Glied kann leicht mittelst der an vielen Orten gegebenen Hülfstafeln für $\frac{2\,sin^2\,\frac{\tau}{2}}{sin\,1''}$ berechnet werden; falls solche nicht vorhanden sind, wird es besser umgeformt in

$$-\frac{225}{8}\, cos\,\delta_0\, sin\,\delta_0\, sin\,1''[(\vartheta_2' - \vartheta_1')^2 - (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2].$$

Einfluss der eigenen Bewegung.

Zur Reduction der Coordinaten α' und δ' des bewegten Objectes auf das Mittel der Zeiten $\frac{\vartheta_2' + \vartheta_1'}{2}$ dienen hier dieselben Ausdrücke, wie für das Kreuzstabmikrometer, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \pm\frac{\vartheta_2' - \vartheta_1'}{2}\,\frac{\Delta\delta'}{15\, cos\,\delta'}$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = \pm\frac{\vartheta_2' - \vartheta_1'}{2}\, 15\, cos\,\delta'\,\Delta\alpha'$$

oberes / unteres Zeichen für nördliche / südliche Durchgänge

wo $\Delta\alpha'$ in Zeit- und $\Delta\delta'$ in Bogensecunden die Veränderungen der Rectascension und Declination in einer Secunde Sternzeit sind.

Einfluss der Strahlenbrechung.

Wenn das Mikrometer nach dem wahren Parallel orientirt ist, die eine Diagonale also mit dem centralen Declinationskreis zusammenfällt, so leitet man auf die oben erörterte Weise sogleich die folgenden Verbesserungen ab:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = -\frac{2\varkappa\, cotang\, n\, sin\,\delta_0}{15\, sin(N + \delta_0) cos^2\delta_0}(\delta' - \delta) + \frac{\varkappa\, cotang\, n\, cos\, N}{15\, sin^2(N + \delta_0) cos^2\delta_0}(\pm\frac{g'}{2} \mp \frac{g}{2})$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = \varkappa\left(cotang^2(N + \delta_0) - \frac{cotang^2\, n}{sin^2(N + \delta_0)}\right)(\delta' - \delta) + \varkappa\left(\frac{cotang^2\, n}{sin^2(N + \delta_0)} + 1\right)(\pm\frac{g'}{2} \mp \frac{g}{2}),$$

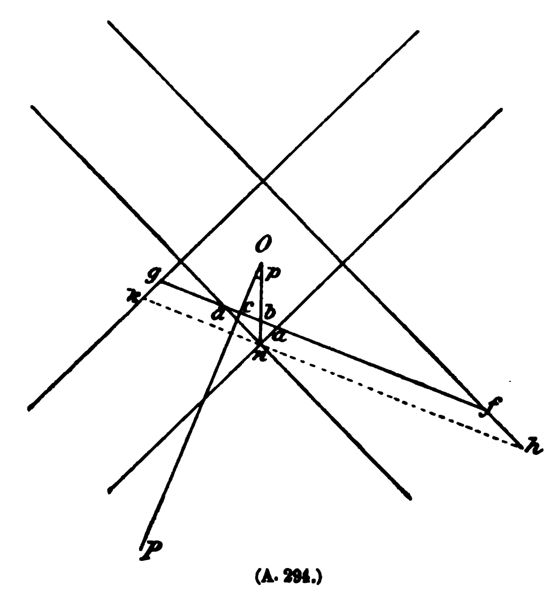
wenn zur Berechnung der Declinationsdifferenz die wahren, und

$$\Delta(\delta' - \delta) = \varkappa\left(\frac{cos\, N\, cos(N + \delta_0)}{sin^2(N + \delta_0) cos\,\delta_0} - \frac{cotang^2\, n}{sin^2(N + \delta_0)}\right)(\delta' - \delta)$$

$$+ \varkappa\left(\frac{cotang^2\, n}{sin^2(N + \delta_0)} + \frac{sin\, N}{sin(N + \delta_0) cos\,\delta_0}\right)(\pm\frac{g'}{2} \mp \frac{g}{2}),$$

wenn die scheinbaren Declinationen angewandt worden sind.

Um den Ausdruck für die Strahlenbrechung bei Orientirung des Mikrometers nach dem scheinbaren Parallel zu erhalten, leiten wir zunächst den Einfluss ab, den ein kleiner Fehler in der Orientirung auf die Messungsresultate ausübt. Sei PO in nebenstehender Fig. 294 der centrale Declinationskreis; der Winkel, den On mit OP einschliesst, sei in Bogenminuten p und so klein, dass sein Sinus dem Bogen und sein Cosinus der Einheit gleich gesetzt werden kann; ein Stern trete bei a ein und bei d aus — dann erhält man sogleich, wenn $Oc = d$ gesetzt wird,



(A. 294.)

$$ab = \left(\frac{g}{2} - d\right)(1 - p \sin 1')$$

$$bd = \left(\frac{g}{2} - d\right)(1 + p \sin 1'),$$

mithin die Zeit des Durchganges durch die Diagonale, im Mittel aus Ein- und Austritt

$$\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - \frac{p \sin 1'}{15 \cos \delta}\left(\frac{g}{2} - d\right)$$

und die Zeit des Durchganges durch den Stundenkreis PO

$$\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - \frac{p \sin 1'}{15 \cos \delta}\frac{g}{2} + \frac{2p \sin 1'}{15 \cos \delta} d.$$

Geht der Stern südlich von der Mitte durch, so ist d negativ zu nehmen und an Stelle von p, $-p$ zu setzen, sodass das letzte Glied ungeändert bleibt; damit wird die Verbesserung, welche zu dem ohne Rücksicht auf den Orientirungsfehler berechneten AR.-Unterschied zweier Sterne hinzugefügt werden muss:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{p \sin 1'}{15 \cos \delta_0}\left(2(d' - d) \mp \frac{g'}{2} \pm \frac{g}{2}\right).$$

Für die Declination erhält man

$$ab + bd = bn \sin 45° \left(\frac{1}{\sin(45 + p)} + \frac{1}{\sin(45 - p)}\right)$$

oder

$$\pm 15 \cos \delta \cos 2p \, \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} = \pm \frac{g}{2} \cos p - d$$

sodass der Declinationsunterschied bei der vorausgesetzten Kleinheit von p keine Aenderung erleidet.

Wird nun $p = \Delta P$ angenommen, wo ΔP die im Sinne der Positionswinkelzählung gerechnete Abweichung des scheinbaren Parallels vom wahren ist,

$$\Delta P = \frac{\varkappa \operatorname{cotang} n \cos N}{\sin^2(N + \delta) \cos \delta},$$

so wird die Correction der A.R.-Differenz:

$$\frac{\varkappa \operatorname{cotang} n \cos N}{15 \sin^2(N + \delta_0) \cos^2 \delta_0}\left\{2(\delta' - \delta) \mp \frac{g'}{2} \pm \frac{g}{2}\right\}$$

und nach Vereinigung dieses Ausdruckes mit der oben gefundenen Verbesserung folgt die gesammte Correction für Strahlenbrechung in Rectascension bei Orientirung des Mikrometers nach dem scheinbaren Parallel:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{2\varkappa \, cotang \, n \cos(N + \delta_0)}{15 \sin^2(N + \delta_0) \cos \delta_0} (\delta' - \delta)$$

Der Ausdruck für die Declination bleibt nach dem Obigen ungeändert.

Orientirung des Mikrometers.

Das Mikrometer wird bei Vorhandensein eines Positionskreises in derselben Weise orientirt, wie es bei der Lamelle unter 45° (pag. 98) auseinander gesetzt worden ist. Wenn aber kein Mittel zur genauen Einstellung vorhanden ist, so muss der übrig gebliebene Orientirungsfehler p (siehe Fig. 294) ermittelt und in Rechnung gezogen werden. Ein bequemes und sicheres Verfahren hierfür ist die Beobachtung eines Sternes ausser an den zwei aneinanderstossenden Seiten des Quadrats an den Verlängerungen der beiden anderen Seiten. Sind $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ die Zeiten, zu welchen der Stern das Mikrometer nacheinander bei f, a, d, g passirt, so hat man, wenn hk durch die Ecke n parallel zu fg gezogen wird,

$$af - gd = nh - kn \text{ oder}$$

$$[(\vartheta_1 - \vartheta_0) - (\vartheta_3 - \vartheta_2)] 15 \cos \delta = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sin(45 - p)} - \frac{1}{\sin(45 + p)} \right) = 2gp \sin 1'$$

oder

$$p = \pm \frac{15 \cos \delta}{g \sin 1'} \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - \frac{\vartheta_0 + \vartheta_3}{2} \right),$$

wo das obere Zeichen den nördlichen, das untere den südlichen Durchgängen angehört. Mit Hülfe dieses Werthes, welcher den Orientirungsfehler in Bezug auf die scheinbare Richtung der täglichen Bewegung darstellt, werden die Beobachtungen nach den vorher abgeleiteten Ausdrücken verbessert, und nach den für den scheinbaren Parallel geltenden Formeln von der Strahlenbrechung befreit.

Die Länge der Diagonale.

Die Länge der Diagonale kann auf zweifache Weise bestimmt werden, entweder durch Beobachtung zweier Sterne von genau bekannter Declinationsdifferenz, von denen der eine nördlich, der andere südlich das Netz passirt, oder — unabhängig von dem Fehler der Declinationen — durch Beobachtung der Antrittszeiten eines Sterns an den vier Lamellen. Verbindet man mit der oben abgeleiteten Gleichung

$$g = \pm \frac{2d}{\cos p} + 15 \cos \delta (\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{\cos 2p}{\cos p}$$

die analoge Gleichung

$$g = \mp \frac{2d}{\cos p} + 15 \cos \delta (\vartheta_3 - \vartheta_0) \frac{\cos 2p}{\cos p},$$

so erhält man im Mittel

$$g = 15 \cos \delta \frac{(\vartheta_3 - \vartheta_0 + \vartheta_2 - \vartheta_1)}{2} \frac{\cos 2p}{\cos p}$$

oder bei genügend kleinen Werthen von p

$$g = 15 \cos \delta \left(\frac{\vartheta_3 - \vartheta_0 + \vartheta_2 - \vartheta_1}{2} \right).$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass bei Bestimmung von g nach dem erstgenannten Verfahren die wahre Declinationsdifferenz nach den mit umge-

kehrten Zeichen genommenen obigen Refractionsausdrücken in scheinbare Differenz verwandelt werden muss; dagegen bedarf es noch der Ableitung des Einflusses, den die Strahlenbrechung auf die Ermittelung von g nach dem zweiten Verfahren ausübt.

Die letzte Gleichung muss mit Rücksicht auf die scheinbaren Oerter des Sternes zur Zeit der Beobachtung offenbar so geschrieben werden:

$$g = \frac{15}{2} \cos(\delta + q)\left(\vartheta_3 - \vartheta_0 + \vartheta_2 - \vartheta_1 - \frac{p_3 - p_0}{15} - \frac{p_2 - p_1}{15}\right)$$

mithin beträgt die Verbesserung wegen Strahlenbrechung:

$$\Delta g = -\frac{\cos\delta}{2}(p_3 - p_0 + p_2 - p_1) - gq \tang\delta$$

Setzt man hierin

$$p_2 - p_1 = \frac{dp}{dt}(t_2 - t_1) = 2\frac{dp}{dt}\left(\frac{g}{2} \mp (\delta - D)\right)\sec\delta$$

$$p_3 - p_0 = \frac{dp}{dt}(t_3 - t_0) = 2\frac{dp}{dt}\left(\frac{g}{2} \pm (\delta - D)\right)\sec\delta$$

ein, so erhält man sogleich

$$\Delta g = -g\left(\frac{dp}{dt} + q \tang\delta\right)$$

$$= -\varkappa g\left(\frac{\cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta)} + 1\right)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die wahre Declination zur Berechnung von g verwandt wird; benutzt man dagegen die scheinbare Declination, so fällt das Glied $q \tang\delta$ weg und die Verbesserung wird

$$\Delta g = -\varkappa g\left(\frac{\cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta)} + \frac{\sin N}{\sin(N+\delta)\cos\delta}\right)$$

Es ist bisher angenommen worden, dass die Form des Mikrometers genau quadratisch ist; ob diese Bedingung strenge erfüllt ist, wird einer genaueren Untersuchung bedürfen, die sich auf die Bestimmung der Längen der Seiten und der Diagonalen, entweder vermittelst directer Ausmessung oder im Allgemeinen leichter durch Sterndurchgänge erstrecken muss. Uebrigens werden bei sorgfältiger Construction merkliche Fehler kaum vorkommen und überdies wird man den Einfluss kleiner Abweichungen dadurch eliminiren, dass man abwechselnd die eine und die andere Diagonale in die Richtung der täglichen Bewegung bringt.

Vergleichen wir schliesslich die im Vorigen besprochenen Mikrometer mit einander, so besteht ein bemerkenswerther Unterschied zwischen dem Kreismikrometer und den übrigen Mikrometern darin, dass bei dem ersteren die Resultate stets auf der Combination von zwei ungleichartigen Momenten, dem Verschwinden an dem einen und dem Wiedererscheinen an dem anderen Rand beruhen, während bei den übrigen geradlinigen Mikrometern auch die gleichartigen Momente für sich, entweder die Zeiten des Verschwindens oder die des Wiedererscheinens oder beide verwendet werden können. Es ist dies insofern von Bedeutung, als die Auffassung besonders des einen dieser Momente, des Wiedererscheinens in merklichem Betrage durch das Aussehen und vor allem durch die Helligkeit der Objecte beeinflusst zu werden scheint und daraus bei der Verbindung ungleich heller Objecte systematische Fehler

hervorgehen können. So hat PIHL[1]) gefunden, dass für ihn ein Stern 2. Grösse und ein Stern 8·5 Grösse gleichzeitig hinter der Lamelle verschwanden, während der Austritt des schwächeren Sterns um etwa 0s·45 später wahrgenommen wurde, als der des hellen. Mag dieser von einem einzelnen Beobachter gefundene Unterschied nun auch keine allgemeine Gültigkeit beanspruchen können und mögen manche Beobachter darin zu weit gehen, dass sie die Momente des Wiedererscheinens ganz von der Beobachtung ausschliessen, so kann es doch als sicher angenommen werden, dass Kreismikrometerbeobachtungen leichter systematischen Fehlern ausgesetzt sind, als Beobachtungen an Mikrometern mit geradlinigen Contouren und dass die systematischen Fehler bei den letzteren ein einfacheres und leichter der Untersuchung zugängliches Gesetz befolgen, als bei dem ersteren. Uebrigens wird der Einfluss eines Fehlers der erwähnten Art bei dem Ringmikrometer wenigstens theilweise in Declination dadurch compensirt, dass bei dem inneren Kreise die Aufeinanderfolge der beiden Momente die entgegengesetzte ist. Ein weiterer Vortheil, den die geradlinigen Mikrometer gegenüber dem gewöhnlichen Kreismikrometer haben, ist die geringere Beschränkung in der Auswahl der Vergleichsterne, indem hier alle dem zu beobachtenden Object in Rectascension genügend nahe stehenden Sterne benutzt werden können, deren Declinationsdifferenz den Durchmesser des nutzbaren Gesichtsfeldes nicht überschreitet[2]). Endlich kommt auch der Umstand in Betracht, dass bei dem Ringmikrometer durch die den Ring tragende Glasplatte ein Lichtverlust, und falls die Flächen nicht ganz eben sind, eine Verschlechterung der Bilder eintritt, die namentlich bei schwachen Objecten in empfindlicher Weise sich bemerkbar machen kann. Auf der anderen Seite bleibt dem Ringmikrometer der grosse Vorzug, dass es, ausser in seiner Stellung zum Objectiv, einer weiteren Orientirung nicht bedarf und mit derselben Leichtigkeit an jedem Instrument zu benutzen ist.

Unter den übrigen Mikrometern dürfte, wenn das Instrument parallaktisch aufgestellt und mit Positionskreis versehen ist, der Lamelle unter 45°, am zweckmässigsten wohl in der früher erwähnten Einrichtung, der erste Platz gebühren; neben dem Vorzuge der ungemein einfachen Berechnungsart gewährt sie den Vortheil, dass das Gesichtsfeld nur zu einem sehr geringen Theil beansprucht wird und schwächere Objecte leichter gesehen werden.

Was die Orientirung der Mikrometer in Bezug auf die Richtung der täglichen Bewegung angeht, so mag hier bemerkt werden, dass dieselbe am besten nach dem scheinbaren Parallel in der bereits beschriebenen Weise und an dem Orte des zu beobachtenden Objectes, am zweckmässigsten meist durch den Vergleichstern selbst ausgeführt wird, wenn die Fehler der Aufstellung und die Winkel der Achsen (siehe »Messungen mit dem Fadenmikrometer«) nicht hinreichend sicher bekannt sind. Kennt man aber diese Grössen, wie es bei einem in stetem Gebrauch befindlichen und fest aufgestellten Instrument in der Regel der Fall sein wird, so ist es einfacher, die Orientirung nach dem wahren Parallel vorzunehmen, indem man einen Aequatorstern in der Nähe des Meridians benutzt. Die so erhaltene Parallelstellung wird, wenn die Instrumentalfehler sehr klein sind, ohne Weiteres auch für alle anderen Lagen des Fernrohrs gelten, im anderen Falle lassen sich nach dem später gegebenen Ausdruck die Abweichungen leicht

---

[1]) O. A. PIHL, On occulting Micrometers and their value as applied to exact astronomical measurements. Christiania 1893.

[2]) Vergl. übrigens pag. 91 Positionsmikrometer.

berechnen und entweder von vornherein vor der jedesmaligen Ortsbestimmung am Positionskreis wegschaffen oder, was meist vorzuziehen sein wird, bei der Reduction in Rechnung ziehen.

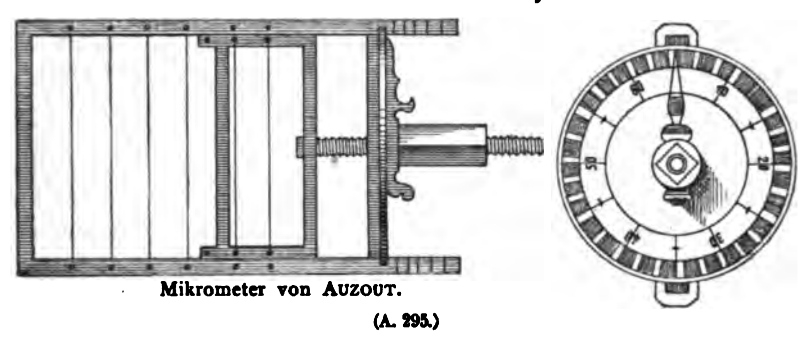
II. Schraubenmikrometer.

Aeltere Constructionen.

Es scheint gegenwärtig als sicher angenommen werden zu dürfen, dass die erste Einführung und Benutzung eines mikrometrischen und speciell auf der Anwendung der Schraube beruhenden Apparates dem jugendlichen, in einem Alter von nur 24 Jahren in der Schlacht bei Marston Moor (1644) gefallenen William Gascoigne zugeschrieben werden muss. Gascoigne brachte in der Focalebene seines Fernrohrs zwei parallele Lamellen an, deren einander zugekehrte scharfe Kanten durch Schrauben einander genähert oder von einander entfernt werden konnten. Wurde das zu messende Object, z. B. eine Planetenscheibe, von den beiden Kanten genau berührt, so ergab sich aus dem linearen Abstand derselben in Verbindung mit der Brennweite des Objectivs unmittelbar der gesuchte scheinbare Durchmesser. Die zwei Schrauben wurden in der Folge in sehr sinnreicher Weise durch eine einzige ersetzt, indem die Spindel mit zwei Gewinden versehen wurde, von denen das eine die doppelte Steighöhe des anderen hatte. Drehte man die Schraube, so bewegte sich die eine mit einem Muttergewinde verbundene Schneide gegen die andere feststehende, zugleich aber verschob sich der ganze Apparat mit dem feineren Gewinde in einer zweiten, am Rohr befestigten Mutter. Der Bewegung der einen Lamelle gegen die andere entsprach folglich eine Bewegung beider von dem halben Betrage in der entgegengesetzten Richtung, so dass die Mittellinie, wenn sie von vornherein in die Achse des Fernrohrs gestellt war, auch darin verblieb, was bei dem damaligen Zustand der Optik von nicht zu unterschätzender Bedeutung war. Die Schraube diente aber Gascoigne nicht nur zur Verschiebung der Schneiden, sondern wurde zugleich vermöge der wichtigen Eigenschaft der Schraubenlinie, dass die Steigung dem Drehungswinkel proportional ist, zur Ausmessung ihres Abstandes benutzt. Sie war zu diesem Zweck mit einer in 100 gleiche Theile getheilten Scheibe (Trommel) versehen, auf welcher mittelst eines Zeigers (Index) der Bruchtheil einer Umdrehung abgelesen werden konnte. Aus der leicht zu ermittelnden Höhe eines Schraubenganges des gröberen Gewindes folgte dann nach Multiplication mit dem in Umdrehungen ausgedrückten Drehungswinkel die lineare Entfernung der beiden Kanten.

Es ist befremdend und wohl nur durch den frühzeitigen Tod Gascoigne's erklärlich, dass die sinnreiche und von ihm selbst nicht veröffentlichte Einrichtung seines Mikrometers mehrere Jahrzehnte den Astronomen besonders des Auslandes unbekannt blieb und erst nach seinem Tode ans Licht gezogen wurde, als von Frankreich aus eine ähnliche mikrometrische Vorrichtung bekannt gegeben wurde. In einem Briefe vom 28. December 1666 (N. St.) theilte Auzout der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in London mit, dass er einen Apparat construirt habe, welcher die scheinbaren Durchmesser der Planeten mit einer bis dahin unerreichten Genauigkeit zu messen erlaube, und dies war die Veranlassung, dass sich innerhalb der Gesellschaft Stimmen für die Priorität des Gascoigne'schen Mikrometers erhoben. Der Apparat, den Auzout in Verbindung mit Picard construirte, ist in seiner 1667 zu Paris erschienenen Abhandlung »Traité du micromètre«, welche in den »Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Tome VII, Partie I« wiedergegeben ist, ausführlich beschrieben. Er besteht (s.

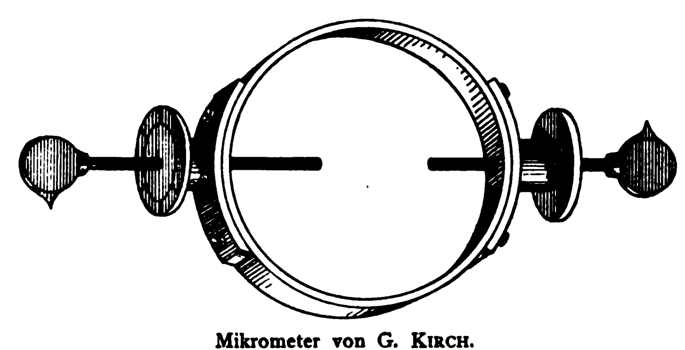
Fig. 295) aus einem viereckigen Rahmen, auf welchem eine Anzahl von parallelen Fäden (oder Haaren) aufgespannt sind und gegen den sich in zwei Nuthen ein kleinerer, ebenfalls mit Fäden versehener Rahmen durch Drehung einer Schraube verschieben lässt. Die ganzen Umdrehungen werden an einer Theilung auf dem äusseren Rahmen, die Bruchtheile auf einer getheilten Scheibe abgelesen. Wenn das Gesichtsfeld nicht durch das auszumessende Object selbst oder durch Mond-



Mikrometer von AUZOUT.

(A. 295.)

schein genügend erhellt ist, um die Fäden deutlich erkennen zu lassen, so werden über den Haaren breitere Metall-Lamellen befestigt, die auch auf dunklem Himmelsgrund gesehen werden können; übrigens kann auch durch eine kleine Oeffnung im Rohr oder durch das Objectiv hindurch Licht in das Gesichtsfeld eingelassen werden. Das AUZOUT'sche Mikrometer hatte gegenüber demjenigen von GASCOIGNE den Vortheil, dass bei der grösseren Anzahl von Fäden, deren Abstand leicht mit grosser Schärfe ermittelt werden konnte, die Schraube stets nur innerhalb eines kleinen Intervalles benutzt zu werden brauchte und daher sowohl ihren Unvollkommenheiten ein geringerer Einfluss eingeräumt, als auch ihrer Abnutzung mehr vorgebeugt war. Dass man sich dieser Fehlerquellen wohl bewusst war, beweist der Umstand, dass PICARD es vorzog, bei jeder einzelnen Messung den mikrometrischen Apparat aus dem Fernrohr herauszunehmen und den Abstand des festen Fadens von dem beweglichen mittelst Mikroskop und Maassstab zu messen, die Schraube aber nur als Mittel für die Fortbewegung des Fadens und die Einstellung auf den Stern zu benutzen. Natürlich wurde dadurch, wie AUZOUT in seiner Abhandlung, welche übrigens eine Fülle von treffenden Bemerkungen enthält, hervorhebt, der Gebrauch des Apparates merklich erschwert. Als drittes Mikrometer aus jener Zeit mag das in Fig. 296 abgebildete Mikrometer von GOTTFRIED KIRCH erwähnt werden, welches besonders in Deutschland angewandt wurde. Ein messingner Ring war an den beiden Enden eines Durchmessers durchbohrt und mit Muttergewinden versehen, in denen sich Schrauben von gleicher Ganghöhe bewegten. Nachdem der Ring in der Focalebene des Objectivs um das Fernrohr gelegt worden war, wurden die Schrauben so weit auseinander ge-



Mikrometer von G. KIRCH.

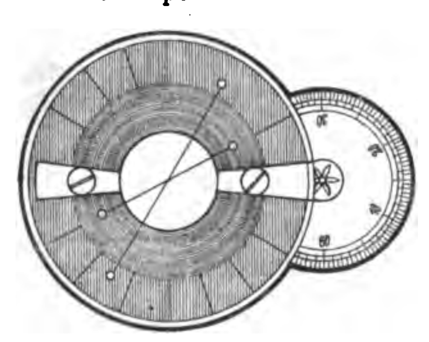
(A. 296.)

schraubt, bis sie das Bild genau einschlossen. Offenbar steht das Mikrometer in seiner ganzen Anlage den vorhererwähnten und namentlich dem AUZOUT-schen nach.

Endlich mag noch zweier älterer Mikrometer gedacht werden, welche, obwohl nicht zu der Gruppe der Schraubenmikrometer gehörig, wegen ihres historischen Interesses am passendsten an dieser Stelle eingeschaltet werden. Das eine ist das Mikrometer, dessen sich CHRISTIAN HUYGENS zur Bestimmung der scheinbaren Planetendurchmesser bediente. Nach der in seinem »Systema Saturnium« gegebenen Beschreibung befestigte HUYGENS in der Bildebene des Fernrohres einen Ring von genau kreisrunder Gestalt und schob durch eine passende Oeffnung im Rohre eine keilförmige Lamelle soweit darin ein, bis sie das gesuchte Intervall genau deckte. Indem er hierauf mittelst Zirkel und Maassstab die Breite der Lamelle an der Deckungsstelle maass und mit der linearen Oeffnung des Ringes verglich, erhielt er aus dem aus Sterndurchgängen ermittelten Winkeldurchmesser des letzteren den gesuchten scheinbaren Durchmesser des Planeten.

Das andere Mikrometer rührt von OLAF RÖMER her und diente zu Messungen auf der Mond- und Sonnenscheibe und zur Bestimmung der Grösse von Finsternissen[1]). Das Fernrohr enthielt zwei Objective, welche in der Richtung der gemeinschaftlichen Achse gegen einander und gegen die Ocularröhre verschoben werden konnten; im Focus des Oculars befand sich ein grosses quadratisches Netz, welches durch Seidenfäden in 12×12 kleinere Quadrate getheilt war. Durch Verschiebung der Objective wurde das Bild von Sonne oder Mond so lange variirt, bis es dem in das grosse Quadrat eingeschriebenen Kreise gleich war und die Lage irgend eines Punktes mit Hülfe der kleinen Quadrate bestimmt. Dieselbe Idee, mittelst eines zweiten eingeschalteten Objectives dem Bilde stets dieselbe lineare Grösse zu geben, wurde noch in diesem Jahrhundert von BREWSTER zur Construction eines ähnlichen Mikrometers benutzt. Aus leicht begreiflichen Gründen ist ein Erfolg damit nicht erreicht worden.

Einen neuen Impuls erhielt die Technik der astronomischen Instrumente durch die epochemachenden Arbeiten und Entdeckungen WILHELM HERSCHEL's. Das neue und unabsehbare Gebiet der doppelten und mehrfachen Sterne, welches er der Astronomie aufschloss, erforderte zu seiner Bearbeitung vollkommenere Hülfsmittel, als sie bis dahin den Beobachtern zu Gebote gestanden hatten. Vor allem bedurfte es eines Apparates, welcher auch die Richtung der Verbindungslinie zweier Sterne zu messen erlaubte, und in Verbindung mit der Distanz die relative Lage der einen Componente eines Doppelsternes gegen die andere vollständig kennen lehrte.

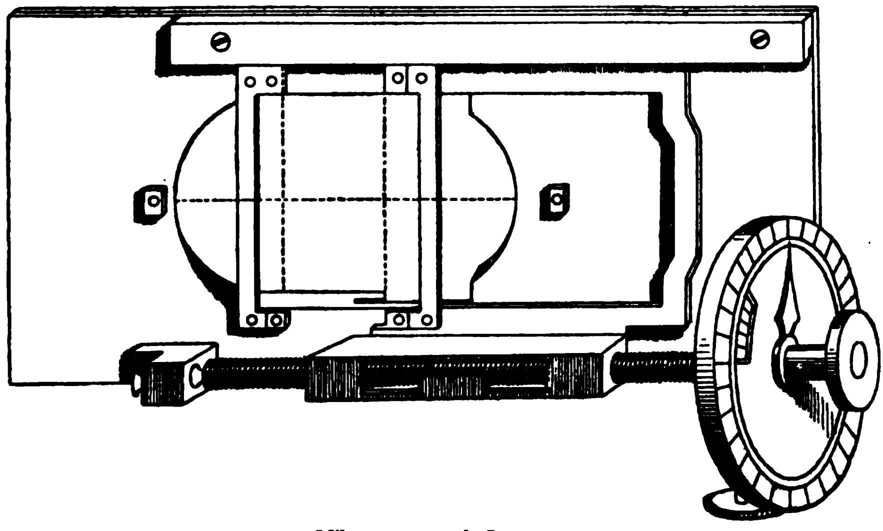


Cross-hair-Mikrometer von W. HERSCHEL. (A. 297.)

WILHELM HERSCHEL construirte zu diesem Zweck eine Vorrichtung, der er zur Unterscheidung von dem *parallel-wire micrometer* den Namen *cross-hair micrometer* gab. Dieselbe ist in Fig. 297 abgebildet und besteht in ihren wesentlichsten Theilen aus einer ringförmigen gezahnten Scheibe,

[1]) Siehe: PETRI HORREBOWII Operum mathematico-physicorum tomus tertius Caput undecimum: De tubo cancellato Roemeri.

welche in den verbreiterten Rand einer cylindrischen Röhre eingelassen ist und mittelst eines Triebes um dieselbe gedreht werden kann. Scheibe und Träger sind mit je einem centralen Faden versehen, und eine auf der Achse des Triebes befindliche getheilte Scheibe erlaubt den jedesmaligen Winkel, welchen die beiden Fäden miteinander einschliessen, zu messen. Wurde hierdurch einem dringenden Bedürfniss abgeholfen, so konnte andererseits das Schraubenmikrometer in seiner bisherigen Form den Anforderungen der neuen Zeit nicht mehr genügen. (Fig. 298 stellt ein von LALANDE in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts benutztes Mikrometer dar.) Die Absehenslinien, Haare und Seidenfäden,



Mikrometer nach LALANDE.

(A 298.)

deren AUZOUT und PICARD sich bedient hatten, die feinen Silberdrähte nach MALVASIA's oder die Glasfäden nach LA HIRE's Vorschlag, auch die von HERSCHEL selbst benutzten Fäden aus dem Cocon der Seidenraupe waren wegen ihrer relativen Dicke nicht geeignet, um feine Sternscheibchen zu biseciren; die Sichtbarmachung derselben bei Nacht durch Beleuchtung des Gesichtsfeldes verhinderte die Beobachtung schwächerer Sterne und gab zugleich zu Fehlern Anlass, die von W. HERSCHEL schon bemerkt, in ihrem eigentlichen Wesen aber erst geraume Zeit später erkannt worden sind; vollends war es noch nicht gelungen, der Schraube als dem wichtigsten Theile des ganzen Apparates diejenige Regelmässigkeit der Windungen zu geben, welche die unerlässliche Bedingung genauer Messungen ist. Auch HERSCHEL gelang es nicht, diese Schwierigkeiten zu überwinden, vielmehr sah er sich veranlasst, das Schraubenmikrometer ganz aufzugeben und — in nicht gerade glücklicher Weise — durch das Lampenmikrometer zu ersetzen.

Das Lampenmikrometer HERSCHEL's bestand aus einer vertikalen Säule, an welcher eine halbkreisförmige Scheibe auf- und niederbewegt werden konnte. Die Scheibe trug einen Arm, welcher um einen in der Mitte befindlichen Zapfen drehbar war und sich durch Schlüssel und Schnurlauf in alle Lagen zwischen der aufrechten und der niedrigsten Stellung bringen liess; auf dem Arm selbst war mittelst eines zweiten Schlüssels ein Schlitten verschiebbar. Im Centrum der Scheibe und auf dem Schlitten waren zwei kleine Lampen in Gehäusen angebracht, welche mittelst Durchbohrungen in der vorderen Platte einem entfernt stehenden Beobachter den Anblick von zwei leuchtenden Punkten gewährten. Während nun der Beob-

achter mit dem einen (rechten) Auge das natürliche Sternpaar im Gesichtsfeld seines NEWTON-schen Reflectors sah, brachte er mittelst der Schlüssel die beiden künstlichen Sterne des in einer Entfernung von 10 Fuss aufgestellten Apparates in eine solche relative Entfernung und Richtung, dass die mit dem anderen (linken) Auge empfangenen Eindrücke sich mit den Bildern der natürlichen Sterne deckten. Durch Ausmessung der linearen Entfernung der beiden leuchtenden Punkte von einander und von dem Auge folgte dann unter Berücksichtigung der Vergrösserung des Fernrohrs die scheinbare Distanz der Componenten des natürlichen Doppelsterns. Während HERSCHEL's Apparat nur auf Distanzmessungen eingerichtet war, liess SCHRÖTER (vergl. J. H. SCHRÖTER, Beiträge zu den neuesten astronomischen Entdeckungen, herausgegeben von J. E. BODE, Berlin 1788) ein ähnliches Mikrometer anfertigen, welches auch die Richtung der Verbindungslinie der beiden Componenten auf dem Umfang der halbkreisförmigen Scheibe in Graden und Minuten abzulesen gestattete.

Die neueren Faden- und Positionsmikrometer.

Indem wir mit Uebergehung einiger weniger wichtigen Apparate zu den neueren Mikrometern uns wenden, fassen wir hier alle diejenigen zusammen, welche seit der Zeit FRAUNHOFER's bis auf die Gegenwart construirt worden sind. Zu jener Zeit und vornehmlich durch die Meisterhand dieses genialen Künstlers erhielt das Fadenmikrometer fast mit einem Schlage den Charakter eines Messapparates ersten Ranges, und die damit angestellten Beobachtungen erlangten einen Grad von Genauigkeit, der auch heute nicht wesentlich übertroffen ist. Es ist nicht zu viel behauptet, wenn man sagt, dass die neueren mikrometrischen Einrichtungen die der HERSCHELianischen Zeit gewiss um ebensoviel übertreffen, als letztere die primitiven Mikrometer des 17. Jahrhunderts. Hierzu kommt, dass seit dem Beginne des neuen Jahrhunderts auch die Fernröhre selbst und insbesondere die Refractoren durch die parallaktische Aufstellung und ihre Ausrüstung mit Uhrwerken, welche sie dem Lauf der Gestirne folgen macht, eine Ueberlegenheit vor den schwerfälligen Reflectoren W. HERSCHEL's erhielten, die vor Allem den mikrometrischen Messungen zu Gute kommen musste.

Das moderne Fadenmikrometer ist im Princip nichts anderes, als eine sinnreiche Verbindung des *parallel-wire micrometer* mit dem *cross-wire micrometer*, ein jedes in seiner Weise höchst vervollkommnet. Man pflegt es aus diesem Grunde auch als Positionsmikrometer zu bezeichnen, zum Unterschied von dem Fadenmikrometer im engeren Sinne, welches keine Drehung um die Fernrohrachse gestattet und wesentlich bei der Beobachtung der Antrittszeiten der Gestirne an die Fäden und zur Messung kleiner rechtwinkliger Coordinatenunterschiede (bei dem Meridianinstrument, dem Aequatoreal u. a. und für letztere auch bei den Ablesemikroskopen) in Anwendung kommt. Wir betrachten zuerst den Theil des Mikrometers, welcher für die Messungen mittelst der Schraube dient und schicken dafür folgende Bemerkungen voraus. Der Vortheil, den die Anwendung der Schraube bei mikrometrischen Messungen bietet, besteht darin, dass man durch sie kleine lineare Bewegungen durch grosse Drehungsbewegungen hervorbringen und messen kann. Soll dieser Vortheil ein wirklich reeller, und nicht bloss scheinbarer sein, so muss zwischen beiden Bewegungen eine vollkommene Proportionalität herrschen, und dies wird nur dann der Fall sein, wenn einerseits die Schraube mathematisch genau hergestellt ist, und wenn zweitens der bewegliche Schlitten ausschliesslich durch die Drehung der Schraube bewegt wird oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Schraube bei der Drehung keine Verschiebung in der Richtung ihrer Achse erleidet. Im Allgemeinen werden beide Bedingungen in aller Strenge nicht erfüllt sein; es werden Fehler übrig sein, welche theils periodischer Natur sind, insofern sie innerhalb je einer Um-

drehung in gleicher Weise verlaufen und nach einer vollständigen Umdrehung in demselben Sinne und Betrage wiederkehren, theils einen fortschreitenden Charakter tragen, indem die einer ganzen Anzahl von Umdrehungen entsprechende lineare Fortrückung des Schlittens an verschiedenen Stellen der Schraube ungleich ist. Die ersteren Fehler haben ihren Grund in der ungenauen Form der Schraubenlinie, welche abgewickelt nicht eine gerade Linie, sondern mehr oder weniger gekrümmt oder gewellt ist, und — zuweilen in beträchtlichem Maasse — in einer fehlerhaften Lagerung der Schraube; die fortschreitenden Fehler entspringen aus einer ungleichen Höhe der Schraubengänge an verschiedenen Stellen der Spindel. Es ist nun leicht ersichtlich und wird später nachgewiesen werden, dass der Einfluss der periodischen Fehler zum grösseren oder geringeren Betrage aufgehoben wird, wenn die Messungen an verschiedenen gleichmässig über den Umkreis eines Schraubenganges vertheilten Stellen der Schraube angestellt werden. Um dies ausführen zu können, muss das Mikrometer in der Weise eingerichtet sein, dass die Stellung des durch die Schraube bewegten Schlittens oder Fadens zum festen Rahmen unabhängig von der Schraube und um beliebige Beträge innerhalb einer oder einiger weniger Umdrehungen geändert werden kann; das Maass dieser Aenderungen wird durch die Ablesungen der Trommel gegeben, welche den Coincidenzstellungen des beweglichen und des festen Fadens zukommen. Wir können in Berücksichtigung dieser Einrichtung folgende sieben Typen unterscheiden:

1) Innerhalb eines im Mikrometergehäuse befestigten Rahmens ist mittelst einer fein geschnittenen Schraube ein Schlitten geradlinig verschiebbar. Die Grösse der Bewegung wird, was die Bruchtheile einer Schraubenganghöhe angeht, auf der auf der Schraube aufsitzenden und in (meist 100) gleiche Theile getheilten Trommel an einem festen Index gemessen; zur Zählung der ganzen Umdrehungen dient eine am Gehäuse angebrachte Scale oder eine mit der ersteren Trommel durch Zahnräder in Verbindung stehende Zähltrommel. (A. CLARK and Sons).

2) Das Mikrometer ist dem vorigen gleich, besitzt aber noch eine zweite Schraube, mittelst welcher der ganze Mikrometerkasten in der Richtung der Messschraube auf einer Grundplatte verschoben werden kann.

3) Der feste Rahmen ist durch einen zweiten Schlitten ersetzt, welcher unabhängig von dem ersten Schlitten durch eine gleich feine und mit getheilter Trommel versehene Schraube bewegt werden kann. (TROUGHTON; PISTOR und MARTINS).

4) Die Einrichtung ist im wesentlichen dieselbe, wie die vorhergehende; die zweite Schraube trägt aber keine Trommel und kann daher nicht zur Messung verwendet werden; sie wird zur Aenderung der Coincidenzstellung benutzt. (FRAUNHOFER).

5) Ausser den beiden Schrauben in 3) ist eine dritte Schraube zur Verschiebung des ganzen Mikrometers in derselben Richtung vorhanden. (C. BAMBERG).

6) Das Mikrometer hat, wie der 1. Typus, einen festen Rahmen und einen beweglichen Schlitten; der letztere kann, indem die Stützfläche oder das Widerlager der Messschraube mittelst einer besonderen Schraube verschiebbar ist, innerhalb gewisser Grenzen gegen den festen Rahmen verstellt werden. Die Widerlagschraube hat dieselbe Ganghöhe wie die Mikrometerschraube, und ihr Kopf ist in eine Anzahl (10) gleicher Theile getheilt. (A. REPSOLD und Söhne).

7) Die Einrichtung unterscheidet sich von der vorhergehenden durch die Verschiebbarkeit des ganzen Gehäuses mittelst einer dritten Schraube. (A. REPSOLD und Söhne).

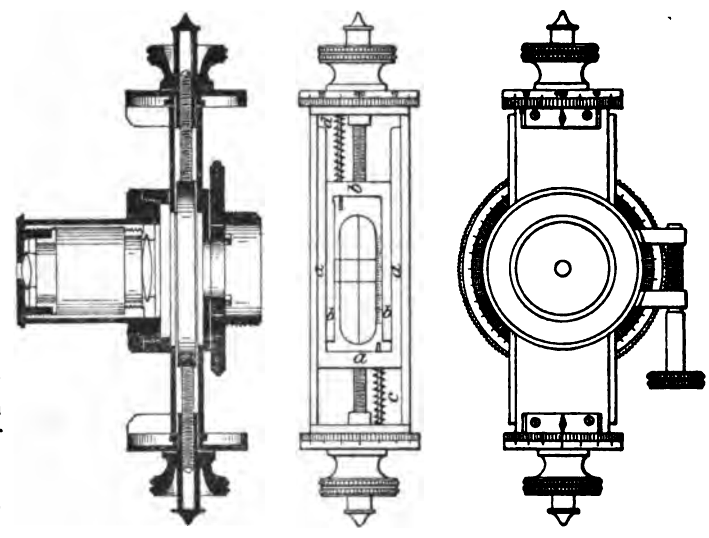
Bei allen diesen verschiedenen Typen tragen der feste Rahmen und der bewegliche Schlitten, bezw. beide Schlitten einen oder auch mehrere feine Spinnenfäden, welche senkrecht zur Bewegungsrichtung stehen, und ausserdem der erstere oder der ihn ersetzende Schlitten einen oder mehrere Querfäden. Die mittleren Fäden eines jeden Systems sind in der Regel so angeordnet, dass sie sehr nahe durch die Rohrachse gehen oder bei einer gewissen Stellung des Schlittens oder des ganzen Gehäuses in sie gelangen.

Die Fäden, mit denen seit Anfang des Jahrhunderts und nach einem zuerst von FONTANA (1775) gemachten Vorschlag die Mikrometer versehen werden, sind die Fäden unserer gewöhnlichen Kreuzspinne und werden dem Cocon entnommen, mit welchen sie ihre Eier umspinnt. Sie haben vor allen anderen Fäden den grossen Vorzug, dass sie innerhalb desselben Cocons von genau gleicher Dicke sind, dagegen von Cocon zu Cocon innerhalb so weiter Grenzen variiren, als es für den jeweiligen Zweck erwünscht sein kann. O. STRUVE benutzte in dem 15zölligen Refractor der Pulkowaer Sternwarte Fäden von nur 5·3 μ Dicke, welche aber im Laufe der Zeit durch Ansetzen von feinen Staubtheilchen bis auf das doppelte anwuchs; die Fäden im Mikrometer des 18zölligen Strassburger Refractors haben eine Dicke von rund 10 μ. Sehr feine Fäden erhält man aus dem Spinnengewebe selbst oder wenn man das vom Spinnen müde Insect längs eines Stäbchens laufen lässt und es durch kleine Erschütterungen nöthigt, sich an einem Faden herabzulassen. Diese Fäden sind aber nicht cylinderförmig, sondern eben oder auch gedreht und überhaupt unregelmässig, und stehen daher für den Gebrauch der Astronomen den Coconfäden nach. Der praktische Astronom thut daher gut, um für alle Fälle versorgt zu sein, eine Anzahl derartiger Cocons, welche man in hölzernen Schuppen, unter Eisendächern u. s. w. findet, sorgfältig aufzubewahren, nachdem die Eier durch sanftes Klopfen daraus entfernt worden sind. Die Spinnenfäden sind stark hygroskopisch, ein Umstand, welcher für ihre Anwendung nicht hinderlich wird, wenn man beim Aufspannen auf den Rahmen darauf Rücksicht nimmt. Es möge hier kurz das Verfahren angegeben werden, unter der Voraussetzung, dass auf den einander gegenüberstehenden Rändern des Rahmens oder Schlittens bereits Striche vorgezogen sind, welche die Lage der Fäden bestimmen und zugleich als Rillen dienen, um sie aufzunehmen. Man befestigt den Rahmen auf einem passenden Holz- oder Drahtgestell derart, dass die Ränder frei vorstehen. Hierauf zupft man aus dem Cocon einen Faden von geeigneter Länge und befestigt, nachdem man sich durch eine Lupe überzeugt hat, dass er keine Verdickungen oder Knoten hat, an dem einen freien Ende (mittelst Wachs) ein kleines Bleistückchen, und ein ebensolches an dem zweiten Ende, worauf man den Faden vom Cocon abtrennt. Indem man ihn nunmehr an dem einen Bleistückchen hält, lässt man das andere langsam herunter, bis es frei hängt, taucht den Faden in seiner ganzen Länge in ein mit Wasser gefülltes Gefäss und legt ihn darauf behutsam an der betreffenden Stelle über den Rahmen, wobei man, wenn nöthig, mit einer Nadel nachhilft, damit er genau in die Rillen zu liegen kommt. In diesem Zustand hoher Spannung wird der Faden durch Schellack, den man mittelst eines zugespitzten Hölzchens aufträgt, befestigt; nachdem der Schellack vollständig getrocknet ist, werden die Enden abgeschnitten. Ist die Operation gut ausgeführt, so darf man sicher sein, dass der Faden auch bei dem höchsten Feuchtigkeitsgrade der Luft straff bleibt. Das mehrfach angewandte Verfahren, den Faden an den Schenkeln eines Zirkels zu befestigen und mittelst derselben zu spannen, muss durchaus verworfen werden. Damit die beweglichen Fäden frei an den festen Fäden vorübergehen, müssen die Ebenen, in denen die beiden Systeme liegen, einen gewissen Abstand von einander haben, welcher jedoch auf ein Minimum beschränkt werden muss, damit keine merkliche Focaldifferenz entsteht. Diese Regulirung geschieht meist mittelst einer Correctionsschraube, welche den beweglichen Schlitten höher oder niedriger zu stellen erlaubt; ist derselbe einmal in die richtige Lage gebracht, so wird man selten Veranlassung haben, etwas daran zu ändern. Dagegen kann es bei dem sehr geringen Abstand beider Fadenebenen (von nur einigen Hunderttheilen eines Millimeter) vorkommen, dass der ungestörte Vorübergang der Fäden durch feine Staubkörnchen, die an dem einen oder anderen Faden haften, verhindert wird. Solche Verunreinigungen können leicht durch Blasen mit dem Mund oder mittelst eines Gummiballons, oder falls dieses nicht ausreicht, durch sanftes Herabfahren an dem Faden mit einer ganz weichen Flaumfeder beseitigt werden. Natürlich ist hier-

bei grosse Umsicht erforderlich, doch ist bei der bedeutenden Elasticität der Fäden die Gefahr des Zerstörens nicht so gross, als man nach ihrer Feinheit annehmen möchte[1]).

Vergleicht man die verschiedenen Typen mit einander, so sieht man, dass eine Elimination der periodischen Fehler auf die oben angegebene Weise bei dem 1. und 2. Typus nicht herbeigeführt werden kann, weil bei derselben Lage des beweglichen Fadensystems zum festen auch die Schraube dieselbe Lage im Muttergewinde hat; dagegen können bei der 3., 4. und 5. Constructionsart die beiden Fadensysteme mittelst der zweiten Schraube und unabhängig von der Messschraube in eine beliebige Lage gebracht werden, und dasselbe wird bei dem 6. und 7. Typus, zwar innerhalb engerer, aber für den Zweck vollständig ausreichender Grenzen durch die Widerlagschraube erreicht. Eine für genaue Messungen ungemein vortheilhafte und bequeme Einrichtung ist die seit einigen Jahrzehnten eingeführte Schraube, welche das ganze System auf einer Grundplatte in der Richtung der Messschraube verschiebt. (Typus 2, 5 und 7.) Sie dient zur Pointirung des einen der beiden zu vergleichenden Objecte und ersetzt dadurch die meist nur ruckweise und grob wirkenden Schlüssel für die Feinbewegung des Fernrohres. Uebrigens kann man bei dem 3. und 4. Typus die zweite Schraube für denselben Zweck benutzen, wenn man sie anders nicht zur Elimination der periodischen Fehler der Messschraube gebraucht; sind die letzteren, wie bei fast allen gut gearbeiteten Mikrometern der Neuzeit, klein, so kann man beide Zwecke gleichzeitig erreichen, indem man nach Einstellung der zweiten Schraube auf den bestimmten Bruchtheil der Umdrehung das eine Object mittelst der Feinbewegung angenähert zur Bisection mit dem Faden bringt und hierauf die Einstellung mittelst der Schraube wiederholt.

Auch in der Lagerung der beweglichen Schlitten und der Verbindung der Schrauben mit denselben gehen die Constructionen auseinander. Bei der in Fig. 299 dargestellten Form, welche [nach PEARSON][2]) einem TROUGHTON-schen Mikrometer angehört, bildet das Gehäuse das Gleitlager für die gabelförmigen beweglichen Schlitten, in deren Querstücken (*a* bezw. *b*) die Enden der Mikrometerschrauben befestigt sind. Auf das andere Ende jeder Schraube ist ein innen mit einem Muttergewinde versehener Kopf auf-



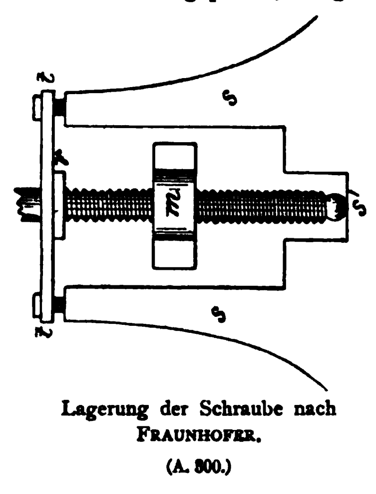
Mikrometer von TROUGHTON.

(A. 299.)

[1]) Siehe auch den Artikel »Ueber Fadennetze und deren Herstellung«. Von Dr. HUGO SCHRÖDER, Central-Zeitung für Optik und Mechanik XVIII. Jahrgang.

[2]) PEARSON, Plates belonging to the second volume of an introduction to practical astronomy.

geschraubt, welcher mit einem cylinderförmigen Ansatz durch die Querseite des Gehäuses geht. Neben jeder Schraube ist ein frei durch den Schlitten hindurchgehender Stift angebracht, auf welchen zwischen Gehäuse und Schlitten eine Spiralfeder (c, d) aufgesteckt ist. Sobald nun der Kopf soweit geschraubt ist, dass er sich gegen das Gehäuse anlegt, so hat jede weitere Drehung eine Bewegung des Schlittens in der Richtung nach dem Kopf zur Folge und die Feder wird zusammengepresst; umgekehrt ertheilt die Rückwärtsdrehung vermöge der elastischen Ausdehnung der letzteren dem Schlitten die entgegengesetzte Bewegung.

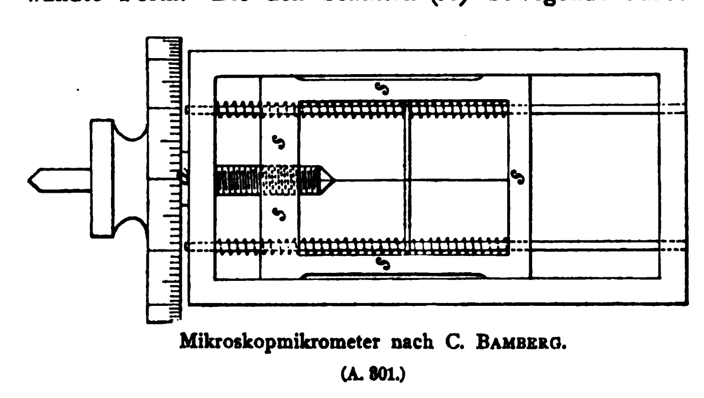


Lagerung der Schraube nach FRAUNHOFER.

(A. 300.)

Bei der FRAUNHOFER'schen Construction (Fig. 300) ist die Schraube mit dem Schlitten (ss), das Muttergewinde (m) dagegen mit dem Gehäuse verbunden. Die Schraube ist an ihrem Ende kugelförmig abgerundet und drückt damit bei der Rechtsdrehung gegen eine sehr genau gearbeitete ebene Fläche aus Stein (s'), wobei sie den Schlitten in der Richtung von m nach s' bewegt. Damit derselbe auch bei der Links- oder Rückwärtsdrehung mitgenommen wird, trägt die Schraube an ihrem vorderen Ende eine ringförmige Erhöhung r, mit welcher sie sich gegen den Steg tt anlegt. Der Abstand des Steges von dem Schlitten ist durch zwei Schrauben regulirbar. Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass bei dieser Construction Spiralfedern nicht zur Anwendung kommen.

Fig. 301 zeigt eine von C. BAMBERG bei den Mikroskopmikrometern angewandte Form. Die den Schlitten (ss) bewegende Mikrometerschraube hat ihr Muttergewinde in diesem selbst, während sie sich mit einem vorspringenden cylindrischen oder sphärischen Ansatz (a) gegen das Mikrometergehäuse oder ein an diesem befestigtes Lager anlegt. Symmetrisch zu der Schraube sind auf zwei im Gehäuse befestigten und durch den Schlitten hindurchgehenden Stiften Spiralfedern angeordnet, die sich gegen die Innenfläche des Schlittens stützen und, wie oben, bei der Rechtsdrehung der Schraube zusammengedrückt werden, bei der Linksdrehung die Bewegung des Schlittens in dem entgegengesetzten Sinne bewirken.

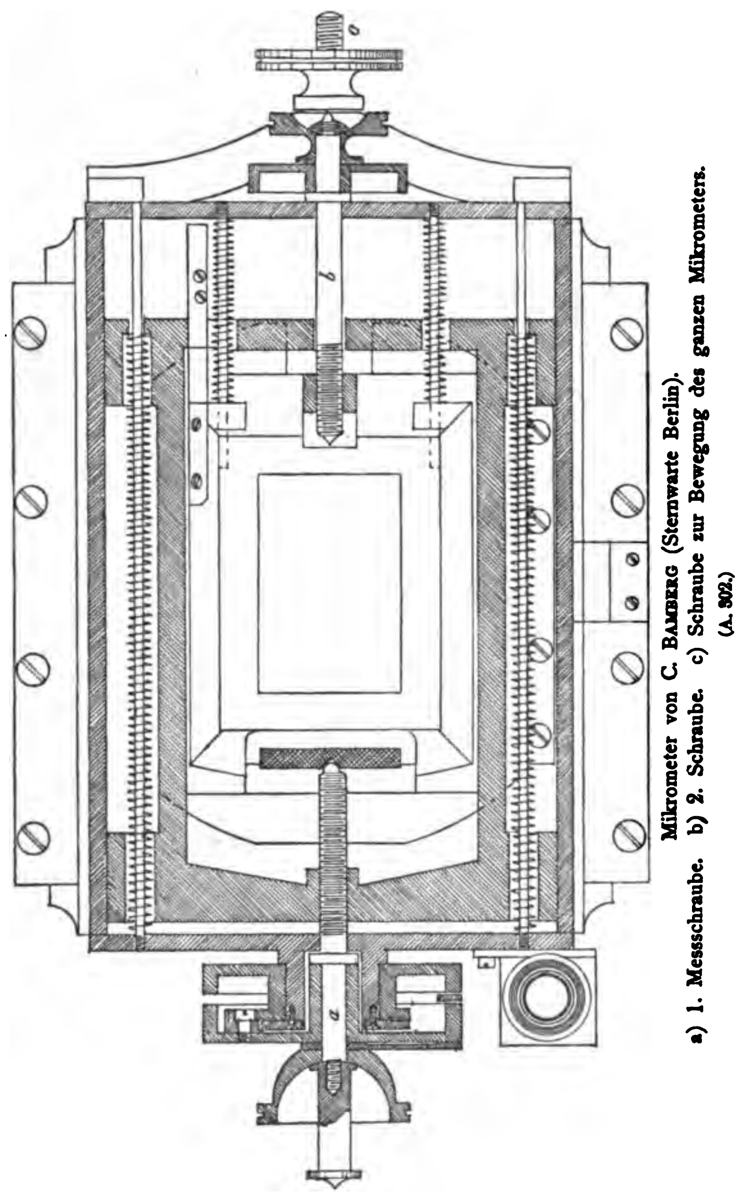


Mikroskopmikrometer nach C. BAMBERG.

(A. 301.)

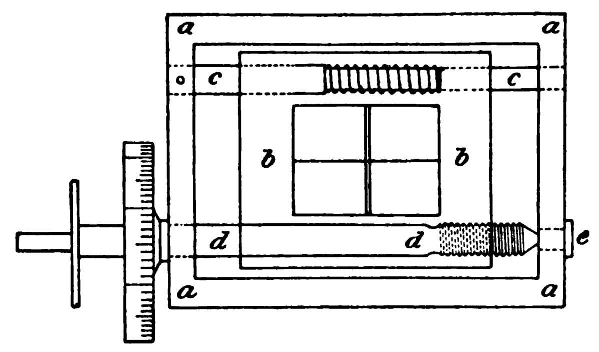
In Fig. 302 ist die Einrichtung eines von C. BAMBERG für die Berliner Sternwarte hergestellten Positionsmikrometers abgebildet; von den in der Zeichnung sichtbaren Schrauben a, b und (nur mit dem Kopf vorstehend) c ist a die eigentliche Messschraube, und ihr Widerlager ist ein Block aus hartem Stahl mit einer conischen Vertiefung, in welcher das kugelige Ende der Schraube ruht. Die Spiralfedern sind auch hier symmetrisch gelegen.

A. Repsold und Söhne legen bei ihren Mikrometern — wie aus Fig. 303 und Fig. 304 ersichtlich ist — die Schraube, welche nur die Function der Fortbewegung hat, seitlich; die Führung des Schlittens ist einem im Gehäuse befestigten Cylinder übertragen, auf dessen verjüngten Theil eine Spiralfeder aufgepasst ist, welche die Schraube durch Vermittelung des Schlittens stets gegen das Endwiderlager hält.



Mikrometer von C. Bamberg (Sternwarte Berlin).
a) 1. Messschraube. b) 2. Schraube. c) Schraube zur Bewegung des ganzen Mikrometers.
(A. 302.)

Man sieht nun leicht, dass ausser der ungenauen Form der Schraubenflächen auch die Beschaffenheit der Anlage- oder Stützflächen der Schraube Fehler erzeugen kann, die in allen Fällen periodischer Natur sind, aber je nach der Fehlerursache einen einfacheren oder zusammengesetzteren Verlauf haben. Sind z. B. bei der Constructionsart (Fig. 299 und 301) die Ansatzfläche der Schraube und das Lager an der Aussenfläche der Büchse statt genau eben mit kleinen Vorsprüngen behaftet, so werden bei jedem Umgang die Erhebungen des Schraubenansatzes auf diejenigen des Lagers treffen und Schraube und Schlitten werden sich in der Richtung der Achse periodisch verschieben. Dasselbe trifft ein, wenn bei der Construction von Fraunhofer oder derjenigen von Repsold der Stützpunkt der Schraube ausserhalb ihrer Achse liegt und zugleich das Widerlager nicht senkrecht dazu steht; aber der Fehler wird in diesem Falle einen einfacheren Verlauf haben, er wird dem Sinus der Ablesung proportional sein. Es folgt hieraus eine



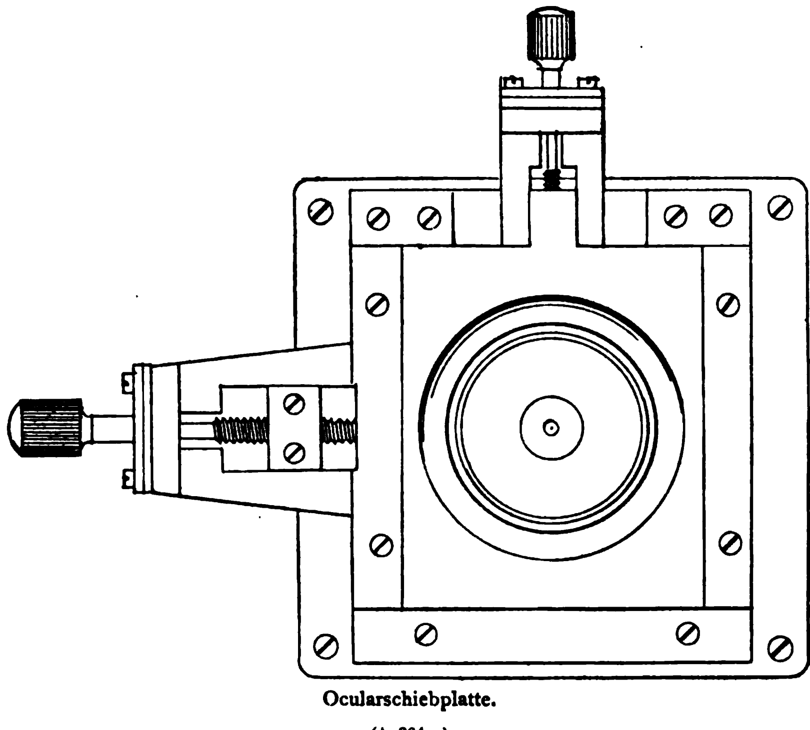
Mikroskopmikrometer nach A. Repsold & Söhne.
(A. 803.)

nicht unwichtige Bemerkung. Die periodischen Fehler werden durch Wiederholung der Messung von verschiedenen äquidistanten Punkten der Trommel aus nur dann eliminirt, wenn sie einen constanten Werth haben; benutzt man daher zur Aenderung des Coincidenzpunktes die Verschiebung der Schraube mittelst der Coincidenzschraube, so darf das Wider-

Positionsmikrometer von A. Repsold & Söhne (Sternwarte Strassburg). Bem. Die Theilung des Kreises geht in Wirklichkeit von 10 zu 10 Minuten und jede zweite Gradzahl ist numerirt.
(A. 804.)

lager seine Lage in Bezug auf die Schraube in keiner Weise ändern, es muss eine Parallelverschiebung ohne jede Drehung erfahren, wie es u. a. bei den Mikrometern von Repsold thatsächlich der Fall ist.

Fehler anderer und meist mehr verwickelter Art werden entstehen, wenn die Schraubenachse nicht genau geradlinig, sondern gekrümmt ist, und es ist an-



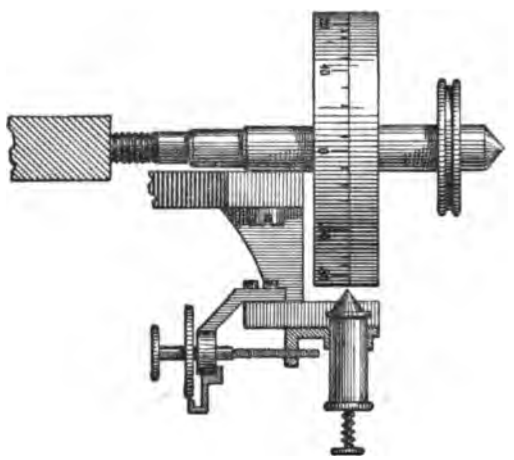
Ocularschiebplatte.

(A. 304 a.)

zunehmen, dass diese Fehler in stärkerem Betrage bei der seitlichen Anbringung der Schraube auftreten, als wenn diese in die Mitte gelegt wird.

Bei allen Mikrometerschrauben ist ein sogen. todter Gang vorhanden, welcher sich darin äussert, dass bei dem Wechsel der Drehungsrichtung die Schraube um einen grösseren oder geringeren Betrag gedreht werden kann, ohne dass der Schlitten mitgenommen wird. Die Ursache hiervon liegt darin, dass zwischen den Flächen der Schraube und denen der Mutter ein kleiner Spielraum gelassen ist, welcher zur Vermeidung der starken Reibung und der damit verbundenen Abnutzung mit einer Oelschicht ausgefüllt wird; bei der Einrichtung von Fraunhofer wird der todte Gang ausserdem vergrössert, wenn die Schraube nicht gleichzeitig an beiden Enden anliegt; übrigens bieten hier die beiden den Steg mit dem Schlitten verbindenden Schrauben ein leichtes Mittel zur Justirung. Bei den übrigen Constructionsarten wirken die Spiralfedern dem todten Gang entgegen; da sie ihn aber, auch wegen der Veränderlichkeit der Oelschicht, nicht ganz aufzuheben vermögen, so ist man darauf angewiesen, diese Fehlerquelle dadurch zu eliminiren, dass man bei Einstellung des beweglichen Fadens auf die beiden Endpunkte der zu messenden Distanz die letzte kleine Drehung in demselben Sinne macht. Dabei pflegt man, um der Gefahr von elastischen Nachwirkungen und Reibungen am Federstift und an der Anlagestelle mehr zu entgehen, die Schraube meist in der Richtung zu drehen, welche

(s. Fig. 306) trägt einen breiten silbernen Ring, auf welchem in der Mitte die Theilung eingravirt ist. Seitlich ist ein Farbebehälter angebracht, dessen zugespitztes, mit einer feinen Oeffnung versehenes Ende sich in geringem Abstand von der Trommel befindet. Aus dem anderen Ende desselben ragt ein feiner Stift mit Kopf hervor, der durch einen leisen Druck auf letzteren gegen die Trommel gedrückt wird und dort einen farbigen Punkt macht, und durch eine aufgesteckte Spiralfeder von selbst wieder zurückgeht. Um zu verhüten, dass bei mehrfachen Wiederholungen der Messungen die verzeichneten Punkte zu dicht aneinander fallen oder gar ineinander fliessen, ist die Farbenbüchse verstellbar. Eine auf einer Schraube befestigte Scheibe, in deren regelmässig über den Umfang vertheilte Einkerbungen eine Feder eingreift, ermöglicht es, die Schraube und damit zugleich die Farbenbüchse zu verschieben, und je nach den Dimensionen mehrere — bei dem von Vogel benutzten Apparat, dessen Trommel 12 *mm* hoch ist, 15 — Beobachtungen übereinander aufzuzeichnen, ohne über die Reihenfolge in Zweifel zu sein. Nachdem die Stellung der Punkte an der Theilung abgelesen ist, werden dieselben wieder durch leichtes Ueberwischen entfernt, zu welchem Zweck es rathsam ist, eine Farbe anzuwenden, die sich lange feucht erhält. Uebrigens könnte, wie Vogel bemerkt, die Vorrichtung leicht dahin verbessert werden, dass der Druck auf den Stift auf pneumatischem Wege erfolgt und dass bei dem jedesmaligen Zurückgehen des Stiftes der Farbebehälter automatisch sich versetzt.

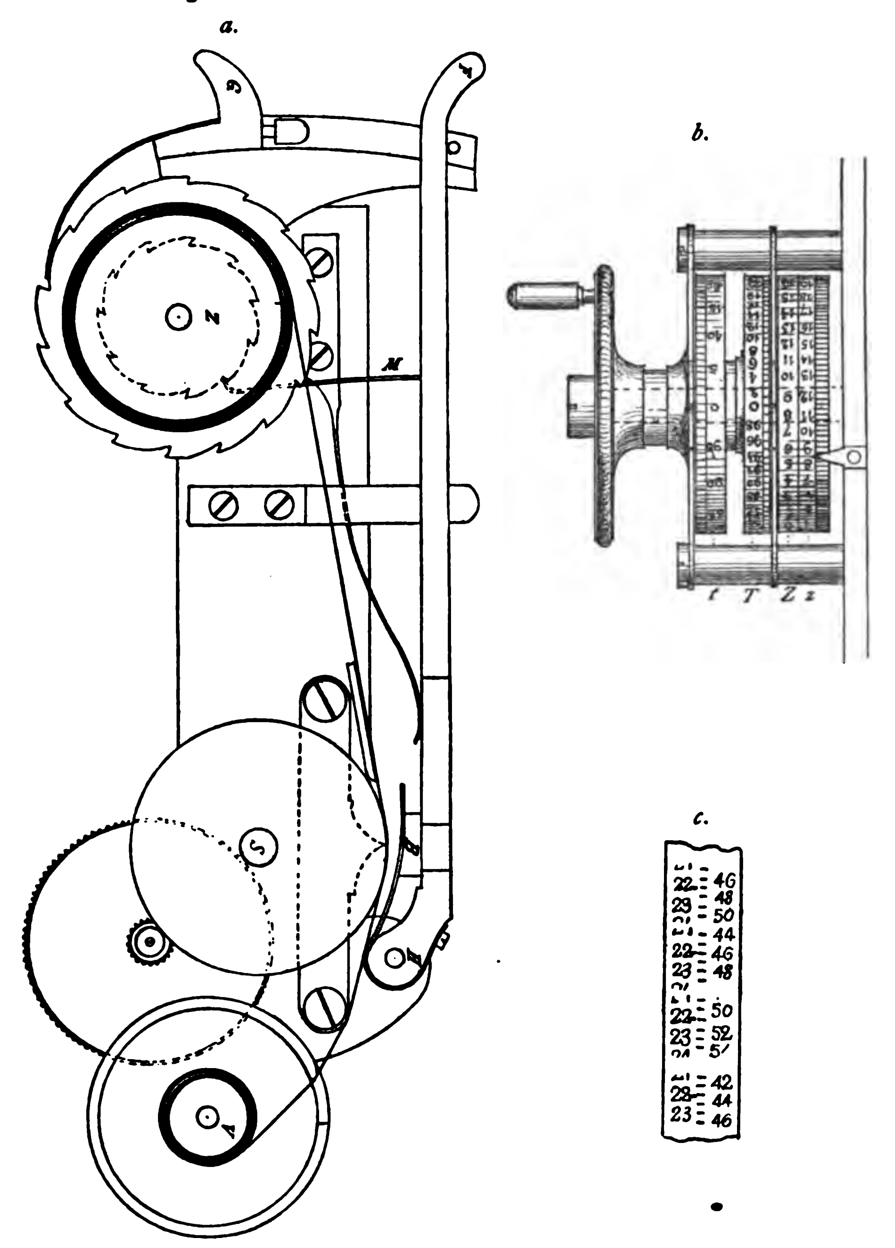


Registrirvorrichtung nach HC. Vogel.
(A. 306.)

Eine der vollkommensten und in ausgedehntester Weise brauchbaren Registrirvorrichtungen ist der von A. Repsold und Söhne in Hamburg[1]) hergestellte Registrirapparat mit Typendruck. Derselbe ist in Fig. 307a, b, c nach dem Muster der am Fadenmikrometer des 18zölligen Strassburger Refractors befindlichen Einrichtung dargestellt. Zwischen der gewöhnlichen 100theiligen Trommel *t* und der Zählscheibe *s* (Fig. 307 b), welche mit eingravirten Strichen und Zahlen versehen sind und im Falle der Nichtbenutzung der Registrirvorrichtung zur Ablesung dienen, sind zwei gleichartige Scheiben *T* und *Z* angeordnet, auf welchen Zahlen und Striche, ebenso wie der zwischen beiden befindliche Index, erhaben ausgearbeitet sind, die Striche als scharfkantig vortretende Zähne, so dass ein mittelst einer weichen Backe dagegen gedrückter Papierstreifen deutliche Abdrücke annimmt. Zur Schonung der Schraube sind die Scheiben nicht direct auf diese selbst, sondern auf einen am Mikrometergehäuse befestigten durchbohrten Zapfen aufgesetzt und werden von der frei hindurchgehenden Schraube durch einen Mitnehmer herumgeführt. Die Druckbacke *B* (Fig. 307a) besteht aus einem kleinen Tuch- oder Gummikissen und befindet sich an dem einen Ende des um den Zapfen *H* drehbaren Hebels, welcher an seinem freien Ende *F* mittelst

[1]) Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrgang I.

Daumen oder Zeigefinger niedergedrückt wird, während der andere Finger an einem gegenüberliegenden Vorsprung *G* des Mikrometergehäuses seinen Halt findet. Um farbige Abdrücke zu erhalten, wird zwischen der Druckbacke und



Registrirvorrichtung mit Typendruck von A. Repsold & Söhne (Sternwarte Strassburg).
(A. 307.)

einer kleinen, am Hebel befestigten Feder ein Stückchen Blaudruckpapier eingefügt; indessen lassen auch die farblosen Abdrücke an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig (Fig. 307 c). Der Papierstreifen ist auf der Vorrathsrolle *V* aufgewickelt und geht unter dem Hebel und über die beiden Scheiben der Mikrometerschraube *S* hinweg zu der Zugrolle *Z*, auf welcher er in einem Schlitz be-

festigt wird. Diese Rolle ist mit einem Zahnkranz versehen und wird jedesmal, wenn der Hebel nach dem Abdruck wieder hinaufgeht, durch eine an ihm befestigte Feder ein Stück gedreht, so dass der Papierstreifen sich auf ihr aufrollt und für die folgende Registrirung eine freie Stelle in Bereitschaft ist. Die Anwendung des Apparates unterliegt keinem Bedenken, wenn die Registrirung am Schlusse der Beobachtung erfolgt, wie es wohl in den meisten Fällen zutrifft; will man mehrere Pointirungen desselben Objectes oder der beiden zu vergleichenden Objecte bei demselben Stand des Fernrohrs machen, so dürfte es, namentlich bei leichter gebauten Instrumenten, rathsam sein, sich zu vergewissern, dass durch den Druck, welcher bei der Registrirung auch bei der grössten Vorsicht auf das Fernrohr ausgeübt wird, keine Verstellung eintritt.

Es mag hier weiter auf das von J. Repsold construirte und Astr. Nachr. Nr. 3377 beschriebene Mikrometer hingewiesen werden, welches vorzugsweise für Meridianinstrumente bestimmt ist und neben einer bereits früher vorgeschlagenen und mehrfach ausgeführten Einrichtung zur Registrirung der Durchgänge von Sternen mittelst des mitbewegten Fadens auch mit Registrirvorrichtung für Declinationseinstellungen versehen ist.

Endlich hat G. Bigourdan in Paris ein Verfahren angegeben, um die Bewegungen der Trommel der Messschraube auf elektrischem Wege auf eine beliebig anderwärts befindliche und mit Uhrwerk versehene Trommel zu übertragen; in Betreff der Einzelheiten dieser Vorrichtung, welche an Einfachheit jedenfalls den anderen nachsteht, mag auf die Arbeit selbst verwiesen werden[1]).

Der Positionskreis und seine Verbindung mit dem Schraubenmikrometer.

Durch die Verbindung des Schraubenmikrometers mit einem Positionskreis entsteht das Positionsmikrometer. Fig. 308 b veranschaulicht den Zusammenhang des beweglichen und des festen Theiles bei einem Fraunhofer'schen Mikrometer[2]). Der Positionskreis *kk* ist auf das Ende eines cylindrischen Rohres aufgesetzt, welches mit seinem anderen mit Schraubenwindungen versehenen Ende an die Ocularauszugsröhre befestigt wird. Ueber dem Kreise ist eine kürzere Büchse *rr* aufgeschraubt, um welche sich ein stählerner, etwas vorspringender Ring dreht. An diesen legt sich von unten ein breiter, stählerner Federring *vv* an, welcher durch drei Schrauben *s*, von denen zwei in der Zeichnung sichtbar sind, mit dem beweglichen Theil des Mikrometers verbunden ist. Durch passendes Anziehen der Schrauben lässt es sich erreichen, dass die Drehung sanft und in allen Lagen des Instruments gleichförmig von Statten geht. Um das Mikrometer gegen den Kreis und das Fernrohr festzustellen, dient die Klemme *K* (Fig. 308 a), bestehend aus zwei Metallbacken, welche den Limbus des Kreises zwischen sich fassen und durch eine Schraube zusammengezogen werden; die Feinbewegung wird durch die Sehnenschraube *S* bewirkt, welche mit einem kugelförmigen Ansatz in entsprechenden Vertiefungen der Alhidade bei *A* gehalten wird und mit ihren Windungen in eine kugelförmige, mit der Klemme verbundene Mutter eingreift.

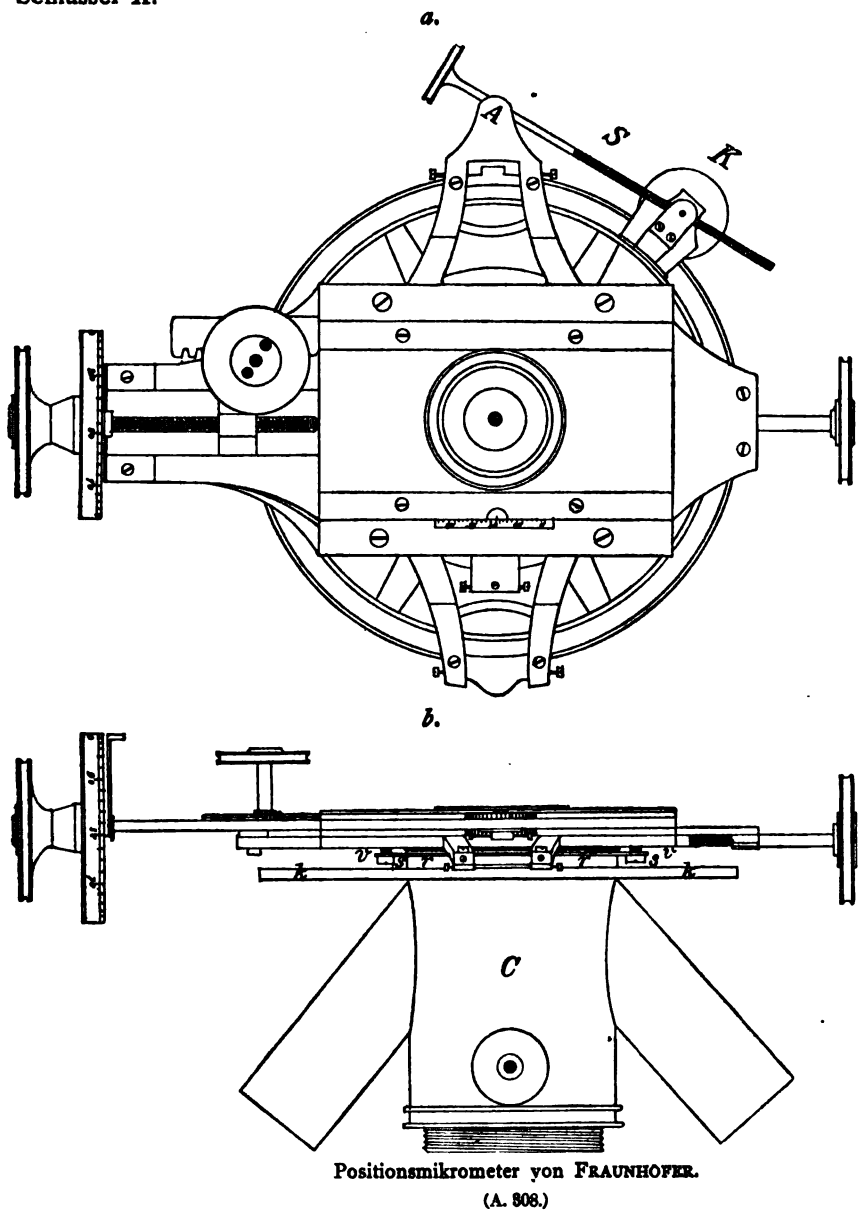
Bei dem Repsold'schen Mikrometer, welches in Fig. 304 abgebildet ist, geschieht die Feinstellung mittelst der in der Zeichnung sichtbaren Schraube ohne

---

[1]) Bulletin astronomique, Juin 1896.

[2]) Vergl. Ph. Carl, Die Principien der Instrumentenkunde. Leipzig 1863, und F. Kaiser, Eerste metingen met den micrometer. Leiden 1840.

Ende S; dieselbe ist auf einem Rohrzapfen, welcher sich in der den Kreis tragenden Büchse dreht, montirt und greift in einen gezahnten Sector ein, welcher mit der Grundplatte des Mikrometerkastens verbunden ist. Zur Klemmung dient der Schlüssel K.

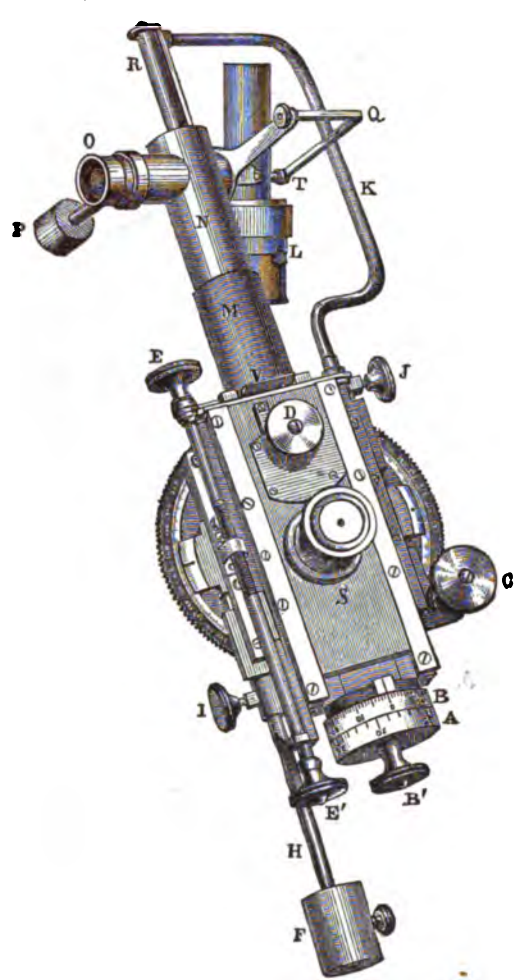


Positionsmikrometer von FRAUNHOFER.
(A. 308.)

Amerikanische Astronomen rühmen die Bewegung des Positionskreises mittelst eines oder bei grösseren Instrumenten mittelst zweier Triebe, welche in eine am Rande des Kreises angebrachte Zahnung eingreifen; man sieht diese Vorrichtung bei dem CLARK'schen Mikrometer in Fig. 309.

Während bei den kleinen und mittleren Instrumenten das Positionsmikrometer ein Ganzes bildet und entweder an den Ocularauszug angeschraubt oder, in sehr viel zweckmässigerer Weise, mittelst dreier Schrauben angesetzt wird, ist bei den

grossen Refractoren der Neuzeit, namentlich denen REPSOLD'schen Ursprunges, der Positionskreis mit allen zugehörigen Theilen an dem Auszugsrohr angebracht und das Mikrometergehäuse wird mit der Kopfplatte, welche zugleich eine parallele Schiebung gestattet, durch zwei Schrauben verbunden. Diese Einrichtung ist äusserst bequem, zumal dann, wenn man verschiedene Apparate gegen einander austauschen will. Zur Positionsdrehung aus freier Hand sind die grösseren Mikrometer mit einem besonderen Anfassringe versehen. (Vergl. Fig. 310 Tafel I.)



Positionsmikrometer von A. CLARK & Sons (Lick Sternwarte). (Beleuchtungsvorrichtung nach BURNHAM.)

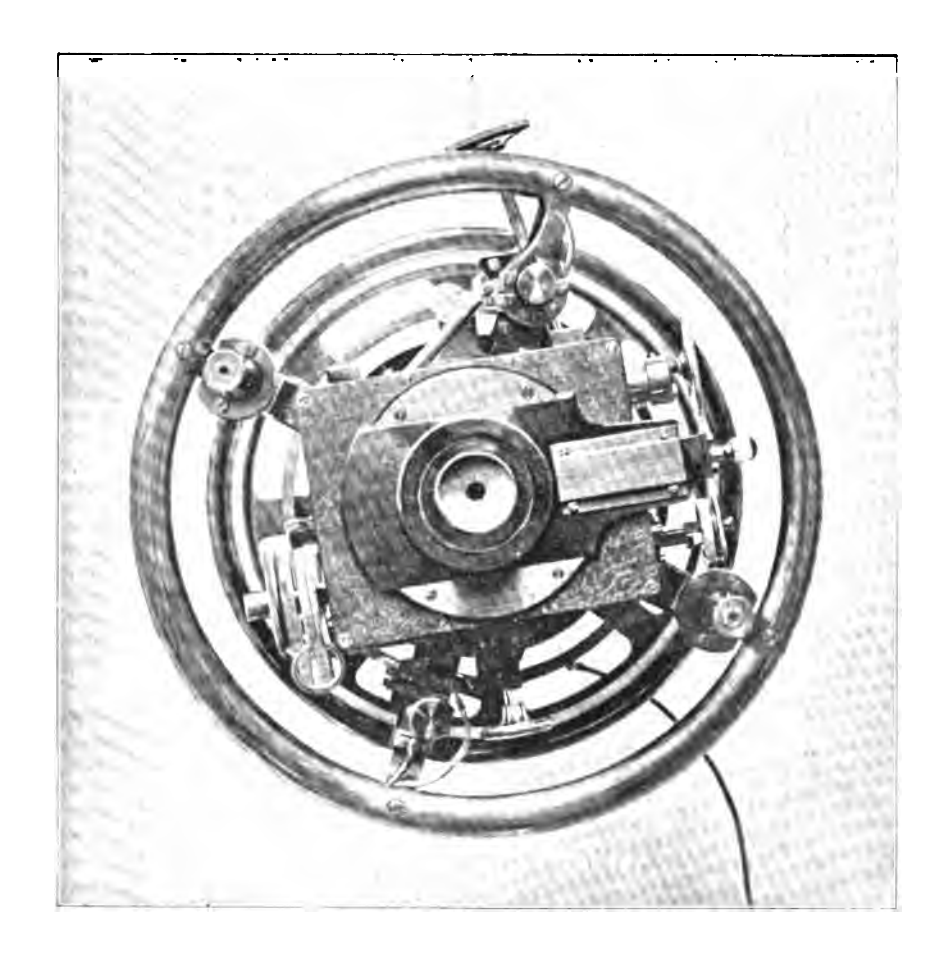
(A. 309.)

Der Positionskreis ist in der Regel von 15 zu 15 oder auch 10 zu 10 Minuten getheilt und kann mittelst Nonien auf ganze oder halbe Minuten abgelesen werden. Die Nonien sind entweder in der üblichen Weise hergestellt und schleifen auf dem Kreise, oder liegen mit ihm in derselben Ebene, oder sie sind auf Glas photographirt und befinden sich in kleinen Mikroskopen im gemeinschaftlichen Focus von Ocular und Objectiv (REPSOLD).

Beleuchtungsvorrichtungen.

Bei den neueren Mikrometern können die Fäden in doppelter Weise sichtbar gemacht werden, positiv oder negativ; die erstere Beleuchtung findet statt, wenn das von der künstlichen Lichtquelle in das Fernrohr geworfene Licht nicht anders als durch Reflexion oder Brechung an den Fäden in das Auge des Beobachters gelangt, die Fäden folglich als leuchtende Linien auf dunklem Grunde gesehen werden -- Fadenbeleuchtung; die Fäden werden negativ sichtbar, wenn (sogen. falsches) Licht von der Objectivseite in das Ocular geworfen wird, so dass sie, nur in der Mitte etwas durchscheinend, gleichsam als Unterbrechungen des hellen Gesichtsfeldes oder als dunkle Linien auf hellem Grund erscheinen, — Feldbeleuchtung. Es mögen im Nachfolgenden einige der gebräuchlichen Beleuchtungs-Vorrichtungen beschrieben werden, wobei auch der älteren FRAUNHOFER'schen Einrichtung gedacht werden möge, weil sie, wenn auch durch die Verbesserungen der neueren Zeit überholt, als Vorbild gedient hat. Bei dem FRAUNHOFER'schen Mikrometer (Fig. 308 b), ist die Büchse, welche an das Fernrohr angeschraubt wird, auf ihrer Mantelfläche mit einer Reihe ovaler Oeffnungen versehen; um sie dreht sich eine andere cylindrische Röhre *C*, welche an zwei einander gegenüberliegenden

Tafel I



Positions-Mikrometer
(A. REPSOLD & Söhne in Hamburg)
(A. 310)

Verlag von EDUARD TREWENDT.

Stellen durchbohrt ist und um 45° geneigte Röhren trägt, in welche eine kleine Lampe eingeschoben werden kann. Correspondirt die Stellung der Röhre mit einer Oeffnung der inneren Büchse, so fällt das Licht der Lampe auf die Fäden und macht sie als lichte Linien sichtbar; ein vor die Flamme gesetzter papierner Schirm mit stufenweiser Absorption dient zur Regulirung der Helligkeit. Es ist hierbei auf zweierlei zu achten. Zunächst muss, damit die Fäden gleichmässig erleuchtet werden, die Ebene, welche durch die Achse des Oculars und die Lichtquelle geht, senkrecht auf der Richtung der Fäden stehen, und es ist daher nothwendig, bei einer Drehung des Mikrometers auch mit dem lampentragenden Cylinder nachzurücken, was natürlich den Gebrauch erschwert. Hierzu kommt, dass in Folge der cylinderförmigen Gestalt des Fadens die von seinem Mantel reflectirte Lichtlinie keine constante Lage beibehält, sondern sich mit der Stellung des Fadens gegen Ocular und Lichtquelle ändert; der bei Einstellung des Fadens auf zwei verschiedene Objecte durchlaufene Weg entspricht daher nicht den Angaben der Schraubentrommel. Aber auch bei der Messung sehr kleiner Distanzen kann aus derselben Quelle ein merklicher Fehler entspringen, wenn das eine der beiden zu vergleichenden Objecte sehr hell, das andere dagegen schwach ist; denn auf dem hellen Sternscheibchen verschwindet die Beleuchtung des Fadens und die Pointirung wird mit dem »negativen« Fadenbilde ausgeführt, während der schwächere Stern mit der einseitig gelegenen Lichtlinie eingestellt wird. Uebrigens werden diese Fehler, auf welche zuerst W. Struve[1]) aufmerksam gemacht hat, vermieden, wenn man die Fäden in der auch in der Einrichtung vorgesehenen Weise von zwei entgegengesetzten Seiten beleuchtet und die dadurch entstehende Doppellinie zur Messung benutzt. Was die Feldbeleuchtung angeht, so sind die älteren Münchener Instrumente von vornherein nicht darauf eingerichtet worden, sie konnte aber meist nachträglich leicht eingeführt werden, indem im Innern des Rohres, und nicht weit vom Ocular, ein versilberter elliptischer Spiegelring befestigt wurde, welcher das Licht einer in eine Büchse an der Aussenwand des Rohres eingesetzten Lampe in das Ocular und das Auge des Beobachters zurückwarf.

Von den Unbequemlichkeiten und den Mängeln der älteren Fraunhofer-schen Beleuchtung sind die neueren Vorrichtungen, bei denen meist dieselbe Lampe sowohl die Beleuchtung des Feldes als der Fäden erzeugt, mehr oder weniger frei. Bei dem 6zölligen Repsold'schen Refractor der Strassburger Sternwarte befindet sich die Lichtquelle am Ende eines 23 *cm* langen Rohres, welches in 48 *cm* Abstand vom Ocular in das Fernrohr eingeschraubt ist. Aus dem Lampenrohr fällt das Licht auf einen ausserhalb des Strahlenkegels befindlichen versilberten Spiegel und wird von da auf einen kleinen Spiegel in der Nähe der Objectivmitte geworfen, von welchem es durch Reflexion nahe centrisch in das Auge gelangt und die Fäden negativ sichtbar macht. Dieselbe Lampe wirft das Licht auf zwei Prismen, von deren Hypothenusenflächen es reflectirt wird und auf einen im Mikrometerkasten nahe der Fadenebene angebrachten conischen weissen Ring fällt. Das von diesem wieder ausgehende Licht bricht sich an den Fäden und macht sie leuchtend. Der Uebergang von der einen Beleuchtung zur anderen wird durch die Drehung des Spiegels bewirkt, durch welche zugleich je nach der Lichtmenge, die auf den kleinen Objectivspiegel oder auf die Prismen fällt, die Helligkeit regulirt wird

[1]) W. Struve, Mensurae micrometricae, pag. X; daselbst wird als Abstand der Mitten der beiden Lichtlinien im 9zölligen Dorpater Refractor 0''46 angegeben.

Statt der zwei getrennten Strahlenbüschel dient bei den grösseren Positionsmikrometern von REPSOLD ein einziger von einem Spiegel unter 45° erzeugter Lichtconus, welcher den Vorzug einer noch gleichförmigeren Lichtvertheilung hat.

Bei den mittleren und grossen Refractoren der Neuzeit wird die Beleuchtungslampe nicht nur zur Sichtbarmachung der Fäden, sondern in sehr sinnreicher und ökonomischer Weise auch zur Beleuchtung aller derjenigen Theile des Instruments, welche während der Beobachtung zeitweise sichtbar sein müssen, als Positionskreis, Schraubentrommeln, Fokalscale, Kreistheilungen u. s. w. verwendet. Wir lassen hier im Auszug eine auch ohne Zeichnung verständliche Beschreibung der Beleuchtungsvorrichtungen am 30zölligen REPSOLD'schen Refractor zu Pulkowa folgen, welche von den Künstlern selbst herrührt[1]); die Einrichtung ist derjenigen am 18zölligen Refractor in Strassburg ähnlich, aber noch umfassender.

»Hinter dem Positions-Mikrometer trägt das grosse Auszugs-Rohr an seinem cylindrisch vorgezogenen Kopfe noch ein rechtwinklig abgehendes Rohr, an dessen Ende die Lampe zur Beleuchtung aller in der Nähe des Oculars sichtbar zu machenden Theile hängt. Dieses Beleuchtungsrohr trägt zugleich ein elektrisches Zifferblatt (von HIPP in Neuchâtel), dessen Fläche parallel zum Positionskreise liegt. Die Lampe hat die Form einer gewöhnlichen cylindrischen Blendlaterne; sie ist mit einer guten Linse versehen, durch welche das Licht, nachdem es an einem durch die doppeldrehende Aufhängung bedingten Planspiegel in 90° reflectirt worden ist, auf die grosse plan-convexe Linse am Ende des Beleuchtungsrohres geworfen wird. Diese Linse lässt die Lichtstrahlen parallel austreten, welche nun den ganzen Querschnitt des Rohres ausfüllen. Sie werden in folgender Weise verwandt: der äusserste Reif trifft am anderen Ende des Beleuchtungsrohres einen Glas-Linsenring, durch den seine Strahlen zu einem hohlen Lichtconus zusammengezogen und nach Reflexion an einem elliptischen Spiegelring zu einem hinter der Fadenplatte liegenden, in 45° conischen, weissen Ring gelangen. Das von dem weissen Ring wieder ausgehende Licht bricht sich an den Fäden und lässt sie weiss erscheinen. Der weisse Ring ist an vier um 90° von einander liegenden Theilen seines Umkreises unterbrochen; da er aber mit dem Mikrometer herumgeht und der von der Lampe kommende Lichtbüschel ringsum gleichmässig ist, so ist die Beleuchtung der Fäden unabhängig von dem Positionswinkel. Von den vier für die Fadenbeleuchtung nicht benutzten Theilen des Lichtbüschels werden zwei (durch zwei Prismen in 180° Abstand) für die Beleuchtung der zwei Mikroskope des Positionskreises und ein dritter Theil des Lichtbüschels znr Beleuchtung der beiden Schraubentrommeln für ganze Umgänge und Hunderttheile ausgenutzt. Dienen so die äussersten Strahlen des Lichtcylinders zur Fadenbeleuchtung, so werden die mittelsten Strahlen für die Feldbeleuchtung benutzt, während das noch dazwischen übrig bleibende Licht für die Kreise etc. verwendbar ist. Die mittelsten Strahlen treten ungebrochen durch den Linsenring, durchkreuzen den Strahlenkegel des Fernrohrs und treffen jenseits desselben auf einen Planspiegel in 45°, welcher sie auf einen anderen, in der Fernrohrtrommel angebrachten Spiegel hinwirft; von dort gelangen sie unter sehr spitzem Winkel zur optischen Achse ins Ocular. Für diese beiden Beleuchtungen ist eine gemeinschaftliche Dämpfungs-Vorrichtung in der Nähe des Linsenringes angebracht. Sie besteht aus sechs Blechschirmen, welche in der Fläche des Linsenringes liegen und sich durch eine davor drehende Scheibe mit spiralförmigen Einschnitten je an einem Führungsstift radial ver-

[1]) Zum 50jährigen Bestehen der Nicolai-Hauptsternwarte. Petersburg 1889.

schieben lassen. Die Schirme sind an der äusseren Kante nach einem Bogen abgearbeitet, welcher beim Vorrücken der Schirme nach aussen einen allmählich schmäler werdenden und doch annähernd in sich gleich breiten Reif übrig lässt, der endlich ganz verschwindet; die inneren Kanten der Schirme dagegen sind tangential geschnitten und so bemessen, dass sie gerade bei Abschluss des äusseren Lichtreifes für Fadenbeleuchtung die für die Mittelstrahlen gegebene Oeffnung ebenfalls noch verschlossen halten. In dieser Stellung hat man also weder helles Feld, noch helle Fäden, und dies ist die Mittelstellung der Spiralscheibe. Dreht man sie nach der einen Seite weiter, so öffnet sich der äussere Reif, die Fäden treten allmählich hervor und erreichen bei grösster Oeffnung des Reifes ihre grösste Helligkeit. Wird in der anderen Richtung gedreht, so lassen die Schirme eine kleine, sechseckige Oeffnung entstehen, und das Feld wird allmählich beleuchtet. Die Drehung der Scheibe wird durch einen aussen vortretenden Arm bewirkt; derselbe bewegt sich neben einem Bogen mit einem verstellbaren Anschlag, der den Zweck hat, nach jedesmaliger Ablesung der Mikroskope wieder denselben Grad der Beleuchtung herzustellen.«

Auf die Beleuchtung des Declinations- und des Stundenkreises, sowie des elektrischen Zifferblattes vermittelst zweier im Beleuchtungsrohr befindlichen elliptischen Spiegelringe braucht hier nicht weiter eingegangen zu werden; dagegen mag nicht unerwähnt bleiben, dass auch die Scale zur Focussirung am Auszugs-Rohr durch einen Theil des für die Feldbeleuchtung dienenden Lichtbüschels beleuchtet wird, und dass die Farbe der Feld- oder Fadenbeleuchtung durch einen vor der Lampe angebrachten Drehschirm mit farbigen Gläsern geändert werden kann.

Eine so ausgiebige und zweckmässige Ausnutzung einer einzelnen Lampe, wie die hier geschilderte, ist im Allgemeinen nur bei Instrumenten von grösseren Dimensionen ausführbar; bei kleineren und mittleren Instrumenten, bei welchen übrigens auch ohne grosse Opfer an Bequemlichkeit auf manche bei den grossen Fernröhren fast unumgänglich nothwendige Einrichtungen, wie die Ablesung der Kreise vom Ocularende aus u. a. verzichtet werden kann, benutzt man in neuerer Zeit vielfach kleine elektrische Glühlampen, welche sich überall leicht anbringen lassen und keinen schädlichen Wärmeeinfluss ausüben. Beispielsweise werden durch das in dem Gehäuse *G* Fig. 304 eingeschlossene elektrische Licht von 4 Volt die Trommeln der Schraube und der Positionskreis an den unter den Mikroskopen liegenden Stellen beleuchtet, während die Beleuchtung des Feldes und der Fäden durch ein zweites Licht erfolgt, welches sich in dem Lampenrohr (s. pag. 129) befindet und mittelst eines dem Beobachter bequem gelegenen Umschalters abwechselnd mit dem ersteren in die Leitung eingeschaltet wird. Zur Dämpfung des Lichtes ist ein Widerstand aus Kohlenscheibchen vorhanden. Von anderen Vorrichtungen zur Sichtbarmachung der Fäden mögen hier noch folgende erwähnt werden. Bei den Refractoren von J. Merz in München werden Feld und Fäden durch vier Glühlampen beleuchtet, welche sich in einem Holzring am Mikrometer befinden. Der Holzring ist auf einer Hülse drehbar, welche acht Oeffnungen hat, denen eine gleiche Anzahl von Beleuchtungsspiegeln gegenüberstehen. Vier derselben dienen für die Feld-, die vier übrigen zur Fadenbeleuchtung. Der Uebergang von der einen Beleuchtung zur anderen wird durch eine Drehung des Ringes um $\frac{1}{8}$« bewirkt. Zur Dämpfung dienen farbige Gläser, welche auf einem zweiten, zwischen den Spiegeln und den Glühlampen befindlichen Ringe angebracht sind. Dieselben Lampen beleuchten auch den Positionskreis und die Trommeln der Mikrometerschraube. An dem 12- und an dem 36zölligen Refractor der Lick-Sternwarte ist die Beleuchtungs-

vorrichtung von A. CLARK & Sons nach einem Plane von BURNHAM ausgeführt[1]. Der Arm *K* (Fig. 309) mit dem Lampenträger und die Stange *H* mit dem Gegengewicht *F* sind an einer Platte unter dem Mikrometergehäuse befestigt, während das Rohr *M*, welches leicht über *N* hinweggeht, mit diesem selbst verbunden ist. Das Licht der Lampe, die in allen Lagen durch das Gegengewicht *P* vertikal erhalten wird, fällt auf einen im Rohr *N* angebrachten und zur Moderirung von *O* aus drehbaren Spiegel und gelangt nach Concentration mittelst einer Linse in das Gehäuse und auf die Fäden. Um eine einseitige Beleuchtung zu vermeiden, ist am anderen Ende des Mikrometerkastens ein kleiner Reflector angebracht, welcher das Licht von der entgegengesetzten Seite auf die Fäden wirft. In dem Rohre *M* befindet sich bei *V* ein Spalt zur Aufnahme farbiger Gläser.

Bei dem grossen Refractor der Wiener Sternwarte ist die Fadenbeleuchtung von HOWARD GRUBB in der Weise hergestellt, dass das Licht der Lampe zuerst auf vier Prismen oder Reflectoren fällt, welche gegenüber der Declinationsachse im Rohre angeordnet sind. Von hier gelangt das Licht durch Röhren zu vier kleineren Reflectoren, welche die Fadenplatte umgeben und es unter einem solchen Winkel auf die Fäden werfen, dass die Möglichkeit einer Beleuchtung des Feldes durch falsches Licht ausgeschlossen ist. Ueber andere Constructionen von GRUBB ist auf eine Abhandlung in »The scientific proceedings oft the Royal Dublin Society 1880 Nov. 15« zu verweisen.

Zum Schlusse mag hier noch der sehr sinnreichen Methode, die Fäden als helle Linien auf dunklem Grunde sichtbar zu machen, gedacht werden, welche E. ABBE angegeben und S. CZAPSKI in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, V. Jahrgang, beschrieben hat. Die Methode beruht auf dem bekannten Satze, dass alle Strahlen, welche vom Objectiv und vom Ocular regelmässig gebrochen werden und in das Auge gelangen, durch den Augenkreis hindurchgehen, dagegen irgend welche andere in das Fernrohr hineingelassene Lichtstrahlen ohne weiteres nicht durch denselben hindurch treten können. Begegnen diese letzteren aber den Spinnenfäden des Mikrometers, so werden sie durch Brechung, wobei die Fäden als Cylinderlinsen wirken, und durch Beugung von ihrem Wege abgelenkt und treten zum Theil durch den Augenkreis aus. Hat man also im Fernrohr eine lichtaussendende Fläche, welche ausserhalb des vom Objectiv zum Ocular gelangenden Strahlencomplexes liegt, z. B. einen ringförmigen Spiegel, welcher den letzteren völlig frei lässt, so braucht man nur in der Ebene des Augenkreises ein Diaphragma von genau gleicher Grösse vor das Ocular zu setzen, um die Fäden als helle Linien auf dunklem Grunde zu sehen, und dasselbe wieder zu entfernen, um helles Feld zu erhalten. Das Verfahren ist besonders bei kleineren Instrumenten, die von vornherein nicht auf Fadenbeleuchtung eingerichtet sind[2], leicht anwendbar[3].

REPSOLD'S Balkenmikrometer.

Um bei äusserst lichtschwachen Objecten, insbesondere Kometen und Nebelflecken, welche auch nicht die geringste Beleuchtung der Fäden ertragen, genaue

---

[1]) Publications of the Lick Observatory, Vol. I.

[2]) Vergl. O. KNOPF, Jahresbericht der Sternwarte in Jena V. J. S. d. Astr. Ges. 1892 ff.

[3]) Bei der grossen Bedeutung, welche die Beleuchtung der Mikrometervorrichtungen für exacte Messungen hat, möge hier auf den lehrreichen Aufsatz von W. FOERSTER, »Ueber die Beleuchtung der Mikrometer-Einrichtungen in Teleskopen und Mikroskopen und einige damit verwandte Fragen. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrgang I.« hingewiesen werden.

Messungen ausführen zu können, bedient man sich mit Vortheil des Balkenmikrometers. Dasselbe unterscheidet sich von dem Fadenmikrometer nur darin, dass an Stelle der Spinnenfäden flache Metallfäden eingezogen sind, die sich auf dem durch das Sternenlicht immer noch ausreichend erleuchteten Himmelsgrund deutlich erkennen lassen. Da es wegen der Focaldifferenz nicht thunlich ist, die Balkenebenen soweit auseinander zu legen, dass die beweglichen Balken an den festen vorübergehen können, so ist zur Bestimmung der Coincidenzstellung folgende einfache Vorrichtung getroffen. Auf dem festen Rahmen und dem beweglichen Schlitten sind ausser den Balken auch etliche Spinnenfäden in der Weise angeordnet, dass einerseits die Coincidenz der beweglichen Balken mit den festen Fäden, und andererseits die Coincidenz der beweglichen Fäden mit den festen Balken gemessen werden kann. Es ist klar, dass aus der Combination dieser beiden Coincidenzen die Schraubenstellung abgeleitet werden kann, welche einer Deckung eines beweglichen Balkens mit einem festen entsprechen würde. Die hierzu erforderlichen Beobachtungen werden bei Feldbeleuchtung ausgeführt.

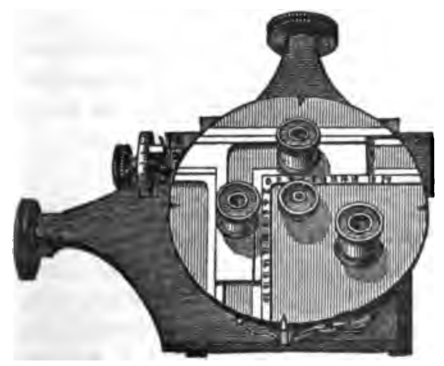
A. CLARK's New Mikrometer for measuring large distances.

A. Clark hat im Jahre 1859 ein Mikrometer construirt, welches relative Positionsbestimmungen zweier Objecte bis zu Distanzen von einem Grad zu liefern bestimmt ist. Um dies zu erreichen, sind zwei Oculare (kleine Einzellinsen) vorhanden, welche soweit auseinander gerückt werden, bis die beiden Sterne nahe in der Mitte ihres Gesichtsfeldes erscheinen. In die Bildebene wird hierauf ein Rahmen eingeschoben, in welchem zwei mit je einem Faden versehene Schlitten parallel und unabhängig von einander bewegt werden können. Nachdem die Fäden durch Drehung des ganzen Mikrometers senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Objecte gestellt sind, wird jeder Faden auf das betreffende Object eingestellt, wobei das Auge in rascher Aufeinanderfolge abwechselnd durch das eine Ocular und durch das andere sieht. Ist die gleichzeitige Bisection gelungen, so wird der Rahmen entfernt und die Entfernung der beiden Fäden unter einem achromatischen Mikroskop durch eine Mikrometerschraube ausgemessen.

Einen ähnlichen Zweck, nämlich Messung von Winkeln, welche grösser sind als das Gesichtsfeld eines einzelnen Oculars, verfolgt das

Duplex-Mikrometer von HOWARD GRUBB.

In der Focalebene des Fernrohrs befindet sich eine planparallele Glasplatte von etwa 2½ engl. Zoll im Quadrat, auf welcher 21 feine parallele Linien in einem Abstand von je 0·1 Zoll und 2 dazu senkrechte in 2 Zoll Entfernung mit Diamant gezogen sind. Die äussersten Linien bilden daher ein vollständiges Quadrat von 2 Zoll. Längs der einen Seite dieses Quadrats und äusserst nahe der Glasplatte ist ein Mikrometerschlitten verschiebbar, welcher ein System von 11 unter sich und mit den 21 Glaslinien parallelen Spinnenfäden trägt, die je um ⅕ Zoll von einander abstehen. Zur Beobachtung der beiden Objecte trägt die Deckplatte zwei Oculare, (Fig. 311), die sich parallel und senkrecht



Duplex-Mikrometer von Howard Grubb.
(A. 311.)

zu den Fäden in passenden Nuthen bewegen. In denselben Richtungen kann das Mikrometer als Ganzes mittelst der beiden in der Zeichnung sichtbaren Schraubenköpfe verschoben werden. Man kann demnach, je nach der Stellung, welche man den Linien durch Drehung des Apparates um die Rohrachse giebt, Reactascensions- und Declinationsdifferenzen oder Abstände messen, und zwar durch Anschluss an das Strichsystem bis zu 2 Zoll, ohne dass die Messschraube über $\frac{1}{8}$ Zoll in Anspruch genommen wird. Natürlich muss das Strichsystem einer genauen Prüfung unterworfen werden, zu welchem Zweck auch noch ein drittes, festes Ocular in die Deckplatte eingesetzt ist. Beobachtungen mit diesem Mikrometer sind von PRITCHARD in Oxford gemacht worden und in Band XLVII der Memoirs of the Royal Astronomical Society mitgetheilt. Der benutzte Apparat ist eingehend untersucht worden und die Resultate können durchaus als befriedigend angesehen werden. Allerdings überschreitet das Maximum des gemessenen Bogens nicht 26 Minuten, und es ist anzunehmen, dass mit zunehmender Entfernung der Bilder von der optischen Achse des Objectivs auch die Fehler wachsen. In jedem Falle werden die beiden letztgenannten Mikrometer und besonders das erstere nicht den Grad von Leistungsfähigkeit beanspruchen können, welcher dem gewöhnlichen Faden- oder Positionsmikrometer innerhalb der Grenzen seiner Anwendbarkeit zukommt; für Präcisionsmessungen, welche ausserhalb dieser Grenzen liegen und bis zu Abständen von 2°, ist das auf dem Princip der Doppelbilder beruhende Objectiv-Mikrometer (Heliometer) zweifellos das geeignetste Instrument.

Declinograph von V. KNORRE.

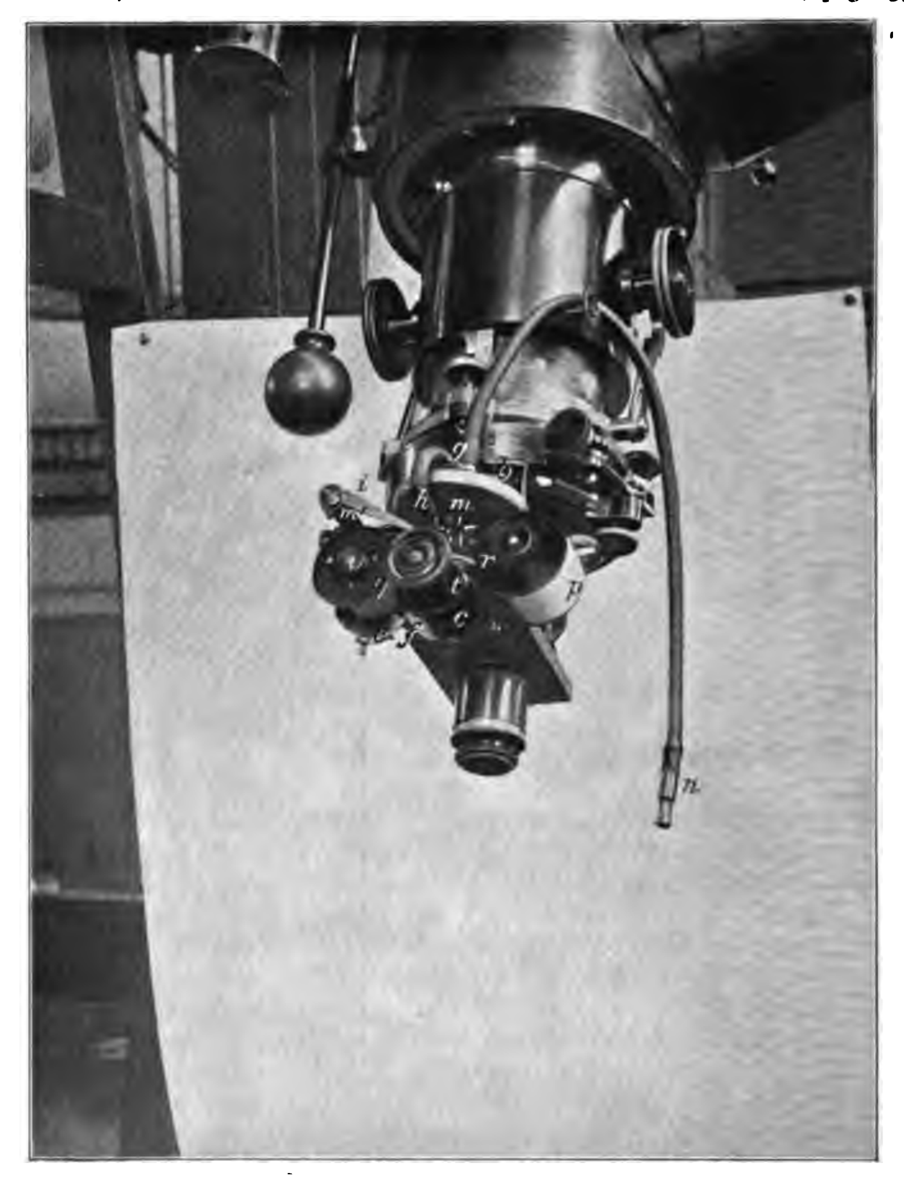
Der nach einer Idee von F. TIETJEN und einem Entwurf von V. KNORRE von R. FUESS in Steglitz construirte Declinograph[1]) ist ein mit einer besonderen Registrirvorrichtung für Declination versehenes Fadenmikrometer. Der Zweck, welcher bei der ursprünglichen Herstellung verfolgt wurde, ging dahin, unter gleichzeitiger Anwendung eines Chronographen nach Rectascension und Declination die Oerter zahlreicher Sterne gewisser Himmelsflächen, in welchen z. B. ein Planet aufgesucht werden sollte, wenn auch nicht mit äusserster Schärfe, so doch mit einer für viele Zwecke ausreichenden Genauigkeit und jedenfalls mit weniger Aufwand an Mühe und Zeit als nach bisherigen Methoden zu verzeichnen. Dass dieser Zweck gleich von vornherein in vollem Maasse erreicht worden ist, darüber ist nach den vielen tausend von KNORRE an diesem Apparat gemachten relativen Ortsbestimmungen kein Zweifel übrig. Nach mehrfachen, auf Grund der gesammelten Erfahrungen vorgenommenen Verbesserungen hat sich aber weiter das günstige Resultat ergeben, dass, wenn es sich nicht um eigentliche Mappirungsarbeiten, sondern um Anschlussbeobachtungen von nur zwei Himmelskörpern, also die Ortsbestimmung eines Planeten oder Kometen handelt, die Genauigkeit der Beobachtungen derjenigen gleich kommt, welche den Messungen an einem Fadenmikrometer der üblichen Construction im Allgemeinen eigen ist.

---

[1]) Vergl. W. FOERSTER, Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbeausstellung 1879. — V. KNORRE, Ueber ein neues Mikrometer zum Registriren von Declinationsdifferenzen. Astr. Nachr., Bd. 93. — V. KNORRE, Ueber die Genauigkeit der mittelst des Declinographen beobachteten Declinationen. Astr. Nachr. Bd. 100. — V. KNORRE, Ueber die Genauigkeit der Zonenbeobachtungen, welche mit Anwendung des sogen. Declinographen am Berliner Aequatoreal ausgeführt werden. Astr. Nachr. Bd. 114. Ferner V. J. S. der Astr. Gesellschaft, Berlin Jahresberichte 1881, 1882.



Tafel II



Declinograph nach V. KNORRE,
construirt von R. FUESS (Sternwarte Berlin)
(A. 312)

Verlag von EDUARD TREWENDT.

Von der dem Apparat ursprünglich gegebenen Form giebt KNORRE a. a. O. folgende Beschreibung. Das Mikrometer ist ein Fadenmikrometer, mit dessen beweglichem Faden die Declinationen und an dessen darauf senkrechtem festen Faden die Durchgangszeiten der Sterne beobachtet werden. Die jedesmalige Lage des zur Declinations-Einstellung dienenden beweglichen Fadens gegen die optische Achse des Fernrohrs wird nicht mit einer Mikrometerschraube gemessen, sondern dadurch messbar gemacht, dass man im Augenblick der Einstellung eines Sterns einen Papierstreifen gegen eine Stahlspitze, welche, wie das Ocular auf dem Schlitten des beweglichen Fadens befestigt ist und sonach seine Bewegungen genau mitmacht, andrückt und dadurch eine punktartige Marke auf dem Streifen macht. Zugleich mit dieser beweglichen Spitze wird aber durch denselben Handgriff der Papierstreifen gegen eine an den festen Theilen des Ocularstückes angebrachte Stahlspitze, deren Verbindungslinie mit der beweglichen Spitze parallel zu der Richtung der Declinationsbewegung des Schlittens ist, angedrückt, und der Abstand zwischen der von der beweglichen und der von der festen Spitze gemachten Marke auf dem Streifen stellt die Fixirung der jedesmaligen Declinationseinstellung dar.

Die Schraube, mittelst welcher der den beweglichen Faden und die eine Stahlspitze tragende Schlitten bewegt wird, ist eine Schraube mit sogen. vierfachem Gewinde, sie hat daher eine Steigung, welche einen sehr schnellen Uebergang von einem Stern zum andern und dennoch eine hinreichende Feinheit der Einstellung gestattet. Bei jeder Drehung rückt auch der Papierstreifen weiter, und durch eine Combination von Zahn- und Sperrrädern ist dafür gesorgt, dass dieses Fortrücken, wie auch die Schraube gedreht wird, stets in demselben Sinne, von der Vorrathsrolle nach der Walze, auf der sich das Papier aufrollt erfolgt.

Obwohl bereits die einzelnen Theile von vornherein so angeordnet sind, dass das Andrücken des Streifens gegen die Stahlspitze in der Richtung der Fernrohrachse geschieht, so ist, um jedwede durch die Hand zu verursachende Druckcomponente senkrecht auf das Rohr auszuschliessen, der Apparat auch mit einer pneumatischen Druckvorrichtung versehen worden, welche durch Zusammendrücken und Loslassen eines Gummiballs in Thätigkeit gesetzt wird.

Hat, wie schon erwähnt wurde, der Declinograph in der eben beschriebenen Form ganz den Ansprüchen, die an ihn gestellt wurden, genügt, so gilt dies in noch erheblich grösserem Maasse von der verbesserten Construction, welche in Fig. 312, Tafel II, wiedergegeben ist. Der wesentliche Unterschied dieser neuen Form von der alten besteht darin, dass früher die Schraube nur zur Fortbewegung des Schlittens, jetzt aber auch als Messschraube benutzt wird. Zu diesem Zwecke trägt die Schraube eine Trommel *t*, auf welcher sich eine Reihe von Stiften befindet, die stufenförmig in gleichen Abständen angeordnet und mit feinen Spitzen versehen sind. Die Trommel ist nach dem Ocular zu von einem halbcylinderförmigen Blechstück *c* verdeckt. Zwei andere Spitzen sind, in demselben Abstand von der Schraubenachse und mit ihr in einer Ebene liegend, die eine fest am Gehäuse, die andere an dem beweglichen Schlitten angebracht; die erstere dient als Index, die zweite zum Zählen der ganzen Revolutionen. Wird nun nach der Pointirung eines Sternes mit dem Faden der Papierstreifen gegen die Schraubentrommel angedrückt, so werden die beiden letztgenannten Spitzen und eine oder zwei nahe in derselben Richtung liegende Trommelspitzen einen Eindruck in das Papier machen, und man kann mittelst einer mit geeigneten Linien versehenen Glasscale ausser der ganzen Revolution die jedesmalige

Drehungsphase, welche der Stellung des beweglichen Fadens entspricht, mit Leichtigkeit ablesen.

Das Andrücken des Streifens geschieht auch hier durch eine pneumatische, aber gegen früher verbesserte Vorrichtung. An das hohle Messingstück *n* wird ein weiteres Stück Gummischlauch angesetzt, an dessen anderem Ende ein Gummiballon befestigt ist, welcher am zweckmässigsten in einer Tretvorrichtung untergebracht wird. Durch ein kurzes, derbes Auftreten bläht sich die Blechbüchse *b* auf und treibt den durch den Rahmen *r* gehenden Papierstreifen gegen die Spitzen der Trommel. Während aber bei dem ersten Apparat die Mikrometerschraube selbst mit der Fortbewegung des Streifens belastet war, wird derselbe Zweck hier in der folgenden sinnreichen Weise erreicht. Die dem Gummiballon entströmende Luft zertheilt sich nach zwei Richtungen; ein Theil nimmt den vorhin beschriebenen Weg, der andere tritt durch den über die Büchse gebogenen Gummischlauch *g* in die Röhre *mm'* und treibt in dieser einen Kolben von *m* nach *m'*. Der Kolben steht mit einer schmalen Messingplatte in Verbindung, die unter der Rolle *q* sitzt, um die Achse dieser Rolle drehbar ist und an ihrem anderen Ende *e* eine kleine gekrümmte Feder *f* trägt, welche an ihrem rechten Ende in einen Haken ausläuft. Wird nun der Kolben in der Richtung von *m* nach *m'* geschleudert, so gleitet der Haken der kleinen Feder *f* von links nach rechts über den Umfang der gezahnten Scheibe hinweg und hakt im Augenblick des Stillstandes bei dem zuletzt erreichten Zahne fest. In demselben Moment tritt eine durch den Kolben in der Röhre zusammengepresste Spiralfeder in Wirksamkeit und treibt ihn und die drehbare Messingplatte mit der Feder *f* zurück und bewirkt dadurch eine kleine Drehung der Rolle *q* von rechts nach links, wodurch zugleich die Vorrathsrolle um ein weniges gedreht und eine frische Stelle des Streifens für die folgende Registrirung bereit wird. Um dem Uebelstande zu entgehen, dass durch die gleichzeitig vor sich gehende Registrirung und Vorwärtsbewegung des Papieres anstatt Punkte Striche eingerissen werden, treibt die Blechbüchse zu derselben Zeit mit dem Papierstreifen den um *i* drehbaren Haken *h* in den gezahnten Umfang der oberen Scheibe der Zugrolle *q* und hält diese so lange fest, bis der Papierstreifen die Spitzen wieder verlassen hat.

Das Fadennetz des Declinographen besteht nur aus wenigen Fäden, einem festen Stundenfaden für Durchgangsbeobachtungen und zwei dazu senkrechten festen Fäden, welche einen Anhalt für die Breite der aufzunehmenden Zonen geben sollen; auf dem beweglichen Schlitten, welcher auch das Ocular trägt, ist nur ein Faden für die Declinations-Einstellungen aufgespannt.

Wie oben angeführt worden ist und auch aus der vorstehenden Beschreibung hervorgeht, kann der Declinograph, namentlich in seiner verbesserten Form, bei Anschlussbeobachtungen, die in Ruhe ausgeführt werden können, trotz der grösseren Ganghöhe der Schraube mit dem gewöhnlichen Fadenmikrometer concurriren; sein eigentliches Arbeitsgebiet wird aber die rasche und zugleich genaue Aufnahme von kleineren Theilen des Himmels sein, und voraussichtlich wird er hier noch lange Zeit neben der photographischen Abbildung mit Vortheil verwandt werden können. Bei der Wiederaufsuchung eines nicht allzu erheblich von der Vorausberechnung abweichenden kleinen Planeten wird er sogar vor der photographischen Aufnahme den Vorzug gewähren, dass der Ort des Himmelskörpers zugleich mit einer Genauigkeit bestimmt wird, welche der Ausmessung des auf der Platte (strichförmig) abgebildeten Objectes in vielen Fällen merklich überlegen ist.

Lichtbildmikrometer.

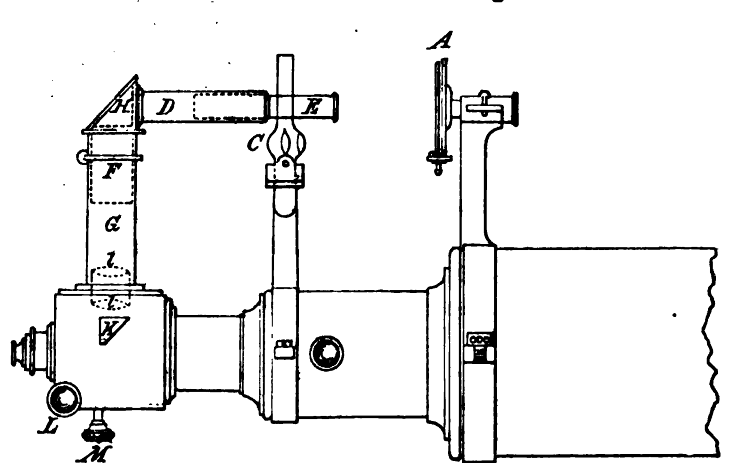
Mit diesem Namen werden die Mikrometer bezeichnet, bei welchen die Messvorrichtung ausserhalb der Bildebene des Objectivs liegt und nur ein Bild derselben in der Focalebene erzeugt wird. Es ist eine in der Beugung des Lichtes begründete Erscheinung, dass, wenn man einen materiellen Faden mit dem Rande des Bildes einer erleuchteten Scheibe in Berührung zu bringen versucht, das Licht an den Fäden gleichsam abfliesst und der Faden, statt den Rand zu berühren, ihn bedeckt; die scheinbare Berührung findet schon statt, wenn in Wirklichkeit der Faden noch einen gewissen Abstand von der Scheibe hat Eine ähnliche störende Erscheinung tritt auch bei Fixsternen auf, indem das Bildchen bei der Bisection durch den materiellen Faden deformirt und in der Richtung senkrecht zum Faden verlängert wird. Es wird so bisweilen unmöglich, die Distanzen enger, aber sonst noch deutlich trennbarer Doppelsterne mit Sicherheit zu messen, weil der Raum zwischen den beiden Componenten mit gebeugtem Licht angefüllt wird. Man würde diesen Uebelständen begegnen können, wenn sich in der Bildebene statt des eigentlichen Mikrometers nur ein Bild desselben befände, denn es würden damit die Bedingungen für das Auftreten von Beugungserscheinungen wegfallen und das Bild des Fadens könnte ungestört mit dem Bilde des Objectes in Berührung gebracht werden. Der erste Versuch, ein Lichtbildmikrometer zu construiren, rührt von C. A. STEINHEIL aus dem Jahre 1827 her; zwar verfolgte STEINHEIL dabei noch nicht den Zweck, den er bei seinen späteren Vorschlägen im Auge hatte, die störenden Diffractionserscheinungen zu vermeiden, vielmehr sollte jenes Mikrometer nur dazu dienen, den Astronomen, welche auf Veranlassung der Berliner Akademie der Wissenschaften mit der Herstellung neuer Sternkarten beschäftigt waren, ein bequemes Hülfsmittel für die angenäherte Ortsbestimmung von schwächeren Sternen an die Hand zu geben. STEINHEIL[1]) befestigte auf das Objectiv seines Fernrohrs ein zweites kleineres Objectiv und brachte in seine Focalebene ein rechtwinkliges Netz, welches aus einem Silber- oder Elfenbeinplättchen ausgeschnitten war und durch ein seitlich befindliches Licht erleuchtet wurde. Auf diese Weise erhielt man zugleich mit den Bildern der Sterne ein leuchtendes Bild des Netzes und konnte die relative Lage zweier Sterne mit der hier erforderlichen Genauigkeit abschätzen. Die Mängel dieser Vorrichtung, deren grösster darin bestand, dass ein nicht unbedeutender und gerade der centrale Theil des Hauptobjectivs verloren ging, wenn das zweite Objectiv ein hinreichend helles Bild des Netzes entwerfen sollte, waren nicht zu verkennen und sie veranlassten STEINHEIL zu einer Reihe von Abänderungsvorschlägen, welche zugleich den Zweck verfolgten, das Lichtbildmikrometer auch für Präcisionsmessungen geeignet zu machen. Diese Aenderungen laufen im Wesentlichen auf eine andere Anordnung der einzelnen Theile hinaus So wurde das kleine Objectiv nicht mehr vor das Hauptobjectiv gesetzt, sondern zwischen diesem und dem Ocular, jedoch ausserhalb des Strahlenkegels und mit der Achse senkrecht zur Achse des Beobachtungsfernrohrs angebracht; vor ihm wurde ein unter 45° geneigter kleiner Metallspiegel oder ein kleines Glasprisma befestigt, welches in den Lichtconus des Hauptobjectivs eingriff und das Bild des Netzes in die Bildebene des Fernrohrs brachte. Wurde das Mikrometerobjectiv mit einem Ocular versehen, so konnte die Messvorrichtung sich in beliebigem Abstand von demselben befinden und daher auch in grösserem Maassstab hergestellt werden. Man war so im Stande, hell leuchtende gerade Linien

[1]) Astr. Nachr. Bd. 5.

oder Kreise auf dunklem Grunde oder auch dunkle Linien in dem (schwach) erleuchteten Gesichtsfeld zu erzeugen, ja es hätte selbst keine Schwierigkeit gehabt, nach den STEINHEIL'schen Plänen ein vollständiges Positions-Mikrometer mit Fadenbildern herzustellen.

Noch bevor STEINHEIL die Verbesserungen seiner ursprünglichen Einrichtung in dem SCHUMACHER'schen Jahrbuch für 1844 veröffentlichte, hatte VON LAMONT für denselben Zweck eine ähnliche Vorrichtung ersonnen und in dem Jahrbuch der Königl. Sternwarte bei München für 1840 beschrieben. Die Mikrometervorrichtung VON LAMONT's wird durch eine Glasplatte gebildet, auf deren vorderer, mit einer Lackschicht geschwärzten Seite feine Linien eingerissen sind, welche das Licht einer hinter der Platte befindlichen Lampe durchlassen. Die Strichebene befindet sich im Focus eines Objectivs, aus welchem die Strahlen parallel austreten und nach Reflexion in einem total reflektirenden Prisma auf ein zweites Objectiv fallen; die aus diesem Objectiv austretenden Strahlen werden an einer in den Strahlenkegel des Fernrohrs eingeschalteten planparallelen Glasplatte reflectirt und in der Bildebene vereinigt. Die Einrichtung ist hiernach von der STEINHEIL'schen im Princip nicht wesentlich verschieden.

Von den späteren Versuchen, Bilder der Messvorrichtungen in der Bildebene des Hauptfernrohrs zu erzeugen, mögen hier nur kurz die Vorschläge und Ausführungen von STAMPFER und von K. VON LITTROW genannt werden, welche hauptsächlich den Zweck verfolgten, die mit Fadenbeleuchtung nicht versehenen Instrumente auf möglichst einfache Weise für die Beobachtung von schwachen Sternen geeignet zu machen. Sie gleichen sich alle darin, dass die von beleuchteten Linien oder von einer leuchtenden feinen Oeffnung ausgehenden Strahlen nach Reflexion an einem geneigten Planspiegel oder an spiegelnden kleinen Kugeln durch eine Linse in der Hauptbrennebene des Fernrohrs zu einem Bilde vereinigt werden; im Gegensatz zu den früheren Einrichtungen liegen aber alle Theile ausserhalb des Lichtconus des Fernrohrs. Es mag noch erwähnt werden, dass VON LITTROW für die Beobachtung der lichtschwächsten Sterne unterbrochene leuchtende Linien =|=|=|= verwandte.



Lichtbild-Mikrometer nach G. P. BIDDER von J. BROWNING.
(A. 313.)

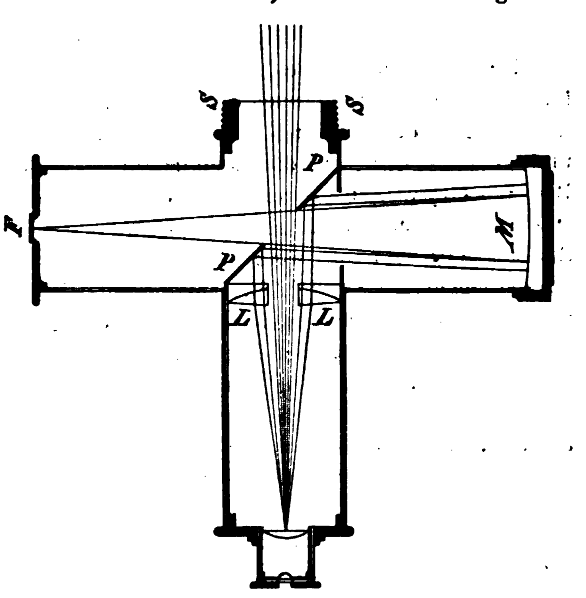
Ein eigentliches Positionsmikrometer mit lichten Fadenbildern scheint zuerst von J. BROWNING nach dem Plane von G. P. BIDDER hergestellt worden zu sein[1]. Dasselbe ist in Fig. 313 dargestellt. *A* ist das Mikrometer, welches sich von einem Positionsmikrometer nur

[1]) Monthly Notices, Vol. XXXIV, 1874.

darin unterscheidet, dass es kein Ocular enthält. Die Fäden werden durch die Lampe *C* beleuchtet; die von ihnen ausgehenden Strahlen fallen durch das Rohr *DE* auf das Prisma *H*, werden hier in das Rohr *FG* reflectirt und durch die beiden achromatischen Convexlinsen *II* nach abermaliger Reflexion durch das Prisma *K* in der Focalebene des Fernrohrs wieder zur Vereinigung gebracht.

Das Prisma *K* liegt ausserhalb des vom Objectiv kommenden Lichtkegels, ist aber — sicherlich nicht zum Vortheil des Apparates — durch die Schrauben *L* und *M* verstellbar, so dass das bei den gewählten Verhältnissen der Abstände der Linsen von den Fäden und der Bildebene stark ($\frac{1}{3}$) verkleinerte Bild nach allen Seiten des Gesichtsfeldes geworfen werden kann. Zur Herstellung von unterbrochenen Linien wird in das Rohr *E* eine Blende eingefügt, welche den mittleren Theil der Fäden verdeckt.

Vielleicht die beste und am wenigsten Bedenken ausgesetzte Construction eines Lichtbildmikrometers rührt von HOWARD GRUBB[1]) her und ist in Fig. 314 wiedergegeben. Der Apparat besteht äusserlich aus zwei senkrecht zu einander stehenden Röhren, von denen die eine bei *S* an den Ocularauszug des Fernrohrs angeschraubt wird. Das Querrohr trägt bei *F* das Mikrometer, welches entweder ein einfaches Netz bezw. ein Kreis oder auch ein Fadenmikrometer sein kann, und am anderen Ende einen versilberten Concavspiegel *M*, dessen Radius etwas grösser ist als die Distanz zwischen *F* und *M*. *PP* ist ein versilberter Planspiegel, dessen elliptische Oeffnung gross genug ist, um den ganzen, vom Objectiv kommenden Strahlenkegel durchzulassen. Zwischen diesem Spiegel und dem Ocular ist



Lichtbild-Mikrometer von HOWARD GRUBB.

(A. 314.)

eine entsprechend weit durchbohrte achromatische Linse *L* eingeschaltet, welche die Convergenz der von *M* kommenden Strahlen noch vergrössert und dadurch ein kleineres Ocularrohr anzuwenden gestattet.

Die Lichtbildmikrometer haben im Ganzen wenig Anwendung gefunden; denn so gross auf der einen Seite der Vortheil ist, der für gewisse Messungen in dem Fortfallen aller Beugungserscheinungen liegt, so stehen ihm — auch abgesehen von einer gewissen Beschränkung des Gebrauches, die man vielleicht zu gross anzuschlagen geneigt ist, da bei dem GRUBB'schen Mikrometer die Bilder auch auf den hellsten Theilen der Mondscheibe sichtbar sein sollen — andere schwerwiegende Nachtheile gegenüber. Insbesondere kommt hier die Abhängigkeit der Lage der Fadenbilder auf der Netzhaut von der Ocularstellung in Betracht, welche im

---

[1]) CH. E. BURTON and HOWARD GRUBB, On a new form of ghost micrometer for use with astronomical telescopes. Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society 1880 Nov. 15.

Allgemeinen um so grösser ist, je schmaler die Lichtbündel und je grösser ihre Neigung gegen die Achse des Hauptstrahlenkegels sind. Gerade in dieser Hinsicht dürfte das zuletzt beschriebene Mikrometer den Vorzug vor den übrigen verdienen. In jedem Falle wird man aber bei diesen Apparaten mehr als bei den anderen mikrometrischen Einrichtungen peinlich darauf zu achten haben, dass die Bildebene des Objectivs mit der Ebene der Fadenbilder zusammenfällt und das Ocular für das Auge scharf eingestellt ist. Zwar wird ein Theil der aus der Nichterfüllung dieser Bedingungen entspringenden Fehler bei relativen Messungen aus dem Resultate herausfallen, so lange die Ocularstellung und die Einstellung und Accommodation des Auges unverändert bleiben; aber auch dann können grosse Verschiedenheiten in der Auffassung eintreten, wenn die mit einander zu verbindenden Sterne ungleich hell sind[1].

Messungen mit dem Fadenmikrometer.

Berichtigung des Focus; Wahl der Beleuchtung.

Eine mikrometrische Messung wird nur dann in zuverlässiger Weise ausgeführt werden können, wenn die Bildebene und die Mikrometerebene zusammenfallen. Um dies zu erreichen, stelle man das Ocular scharf auf die Fäden ein und verschiebe hierauf die Ocularzugröhre, welche das Mikrometer trägt, bis das Bild des Objects, am besten ein an der Grenze der Trennbarkeit gelegener Doppelstern, die grösste Schärfe zeigt. Da man bekanntlich in derartigen Fällen die richtige Stellung erst erkennt, wenn man darüber hinausgelangt ist, so macht man die Einstellungen der Ocularröhre in doppelter Weise, einmal von innen nach aussen und zweitens von aussen nach innen; das Mittel der Ablesungen der für diese Berichtigungen dienenden Focalscale entspricht dann der normalen Stellung, auf welche der Ocularauszug eingestellt werden muss. Da die Focalberichtigung hiernach wesentlich von der genauen Einstellung des Oculars auf die Fäden abhängt, so ist es rathsam, auch schon hier ein ähnliches Verfahren eines abwechselnden Nähern und Entfernen zu befolgen. Bei Feldbeleuchtung ist noch besonders darauf zu achten, dass, wenn man bei vorläufiger Focalberichtigung den Faden auf einen helleren Stern stellt, das mit der künstlichen Beleuchtung erzeugte Schattenbild des Fadens gegen das auf das Sternscheibchen projicirte Stück keine Ausbiegung zeigt; wenn eine solche vorhanden, wie es bei nicht centraler Beleuchtung und ungenügender Einstellung des Oculars der Fall ist, so bringt man dieselbe durch Aenderung der Ocularstellung zum Verschwinden und wiederholt hierauf die Einstellung auf den Stern.

Was die Wahl der Beleuchtung angeht, so verdient, so lange die Helligkeit der Objecte es zulässt, die Feldbeleuchtung, vorausgesetzt, dass sie nach richtigen Principien hergestellt ist und dass insbesondere die Achsen der dazu verwandten Lichtkegel mit der Achse des bilderzeugenden Strahlenkegels nahe zusammenfallen, vor der Beleuchtung der Fäden entschieden den Vorzug. Denn nicht nur nähert sie sich mehr als die andere der vollkommensten Art der Beleuchtung, als welche man diejenige betrachten muss, bei welcher sich das Object und das Fadenelement durch Strahlen von genau identischem Verlauf auf der Netzhaut abbilden [2], wie es bei der Erleuchtung des Fadens durch das Object selbst, ferner bei Tagbeobachtungen und bei hellem Mondschein der Fall

[1] Vergl. auch hierüber den oben citirten Aufsatz von W. Foerster, Ueber die Beleuchtung der Mikrometervorrichtungen u. s. w.

[2] W. Foerster, a. a. O.

ist, sondern es scheint auch, dass die Auffassungsweise bei Benutzung dunkler Fäden eine gleichförmigere ist, als bei hellen Fäden[1]). Uebrigens lässt sich die Sichtbarkeit schwächerer Sterne in hellem Feld durch Contrastwirkung erhöhen, indem man dem zur Beleuchtung des Feldes dienenden Licht durch Einschaltung eines farbigen Glases einen rothen Ton verleiht. Die Wirkung ist, abgesehen von den Sternen, welche selbst überwiegend rothes Licht enthalten, überraschend, da bei Auswahl der richtigen Nüance beinahe eine ganze Grössenklasse gewonnen wird. Dasselbe Mittel wird zuweilen auch bei der Beleuchtung der Fäden angewandt; indessen ist hierbei grosse Vorsicht geboten, da, wenn die Einstellungen nicht in der Mitte des Gesichtsfeldes erfolgen, eine ungenügende Achromasie des Oculars oder des Auges merkliche Fehler erzeugen kann[2]).

Die Fehler des Instruments und der Aufstellung.

Die Beobachtungen mittelst des Faden-(Positions-)Mikrometers und ihre Berechnung werden merklich erleichtert, wenn die Fehler des parallaktisch montirten Instruments gewisse Grenzen nicht übersteigen. Es sind hierbei zwei Arten von Fehlern zu unterscheiden, einmal diejenigen, welche von der nicht genauen Aufstellung des Instrumentes herrühren, und zweitens die Fehler, welche dem Instrument als solchem anhaften; erstere lassen sich in allen Fällen corrigiren, letztere können entweder auch weggeschafft werden oder sie sind vom Künstler von vornherein auf einen Betrag reducirt, der entweder ganz vernachlässigt werden kann oder wenigstens als eine kleine Grösse betrachtet werden darf, dessen höhere Potenzen übergangen werden können. Es wird nützlich sein, hier die hauptsächlich in Betracht kommenden Formeln zusammenzustellen und das Verfahren kurz zu erläutern, welches zur Bestimmung der Instrumental- und Aufstellungsfehler dient.

Die Bezifferung der Kreise werde so angenommen, dass, wenn das Fernrohr im Meridian und nach dem Aequator gerichtet ist, bei Declinationsachse (Kreisende) voraufgehend die Ablesung beider Kreise nahe 0 zeigt und die Angaben des Stundenkreises mit dem Stundenwinkel, des Declinationskreises mit der Declination wachsen. Ferner seien

x und y die Coordinaten des Poles der Stundenachse in Bezug auf den Weltpol, x in der Richtung des Meridians und positiv nach Süden, y senkrecht zum Meridian und positiv nach Westen gezählt,

$90 - i$ der Winkel zwischen der Stundenachse und der Declinationsachse, erstere positiv nach Norden, letztere positiv nach dem Kreisende zu gerechnet,

$90 - k$ der Winkel zwischen der Declinationsachse und der positiv nach dem Objectiv zu gerechneten optischen Achse

a der Coëfficient der Biegung der Declinationsachse, positiv, wenn ihr Pol durch die Biegung dem Zenit genähert wird,

b der Coëfficient der Biegung des Rohres, positiv, wenn das Ocularende sich stärker durchbiegt,

T und D die Ablesungen von Stunden- und Declinationskreis bei A. v. (I)
T' und D' „ „ „ „ „ „ „ A. f. (II)
γ und ε die Indexfehler „ „ „ „

t und d der Stundenwinkel und die Declination eines Objectes zur Zeit der Einstellung — dann ist, wenn $i' = i + a \sin \varphi$ (φ = Polhöhe) gesetzt wird und

[1]) H. Struve, Beobachtungen des Neptunstrabanten am 30 zölligen Pulkowaer Refractor 1894.
[2]) S. Newcomb, The Uranian and Neptunian Systems. Washington Observations 1873. App. I.

die zweiten und höheren Potenzen der Fehler und ihre Producte übergangen werden:

$$\text{A. v.}\left\{\begin{aligned} t &= T + \gamma - x \sin t \tan d + y \cos t \tan d - i' \tan d + k \sec d \\ &\quad - a \cos\varphi \cos t - b \cos\varphi \sin t \sec d \\ d &= D + c - x \cos t - y \sin t + b(\sin\varphi \cos d - \cos\varphi \sin d \cos t) \end{aligned}\right.$$

$$\text{A. f.}\left\{\begin{aligned} t &= T' + \gamma - 180^\circ - x \sin t \tan d + y \cos t \tan d + i' \tan d - k \sec d \\ &\quad + a \cos\varphi \cos t - b \cos\varphi \sin t \sec d \\ d &= 180^\circ - D' - c - x \cos t - y \sin t + b(\sin\varphi \cos d - \cos\varphi \sin d \cos t). \end{aligned}\right.$$

Es geht hieraus zunächst hervor, dass die Coordinate x zugleich mit dem Biegungscoëfficienten b am einfachsten und sichersten bestimmt wird, wenn man die Declinationen einer Anzahl von passend gelegenen Sternen in der Nähe des Meridians beobachtet und mit den bekannten Werthen vergleicht. Dabei wird es zweckmässig sein, die Beobachtungen in beiden Achsenlagen und symmetrisch zum Meridian anzustellen. Nimmt man dann aus den Ablesungen des Declinationskreises in jeder Lage das Mittel und vereinigt diese Mittel wiederum zu einem Mittelwerth, so giebt, wenn δ die Declination der Ephemeride und q der Betrag der Strahlenbrechung ist, jeder Stern eine Gleichung von der Form

$$\text{O. C.}\quad x - b \sin(\varphi - \delta) = 90^\circ - \frac{D' - D}{2} - \delta - q - y \sin t$$

$$\text{U. C.}\quad x + b \sin(\varphi + \delta) = \delta + q - 90^\circ + \frac{D' - D}{2} + y \sin t$$

wo bei der Kleinheit von t ein ganz beiläufiger Werth von y zur Berechnung des letzten Gliedes ausreicht.

Die Coordinate y und die Winkel der Achsen werden am leichtesten erhalten, wenn man die Durchgänge von Sternen verschiedener Declination in der Nähe des Meridians in beiden Lagen der Achse beobachtet. Für die Bestimmung von y genügt es, einen Aequatorstern mit einem Polstern oder zwei Polsterne, deren einer sich nahe in oberer, der andere in unterer Culmination befindet, zu combiniren. Bezeichnen ϑ die Uhrzeit und ΔU die Reduction derselben auf Sternzeit, α die wahre und $\alpha + p$ die durch Strahlenbrechung afficirte Rectascension des Sternes, so folgt aus dem Mittel der Beobachtungen in den beiden Achsenlagen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{1. Stern}\ \pm y \tan d_1 = \vartheta_1 + \Delta U_1 - (\alpha_1 + p_1) - T_1 - \gamma + 90^\circ + x \sin t_1 \tan d_1 \\ &\text{2. Stern}\ \pm y \tan d_2 = \vartheta_2 + \Delta U_2 - (\alpha_2 + p_2) - T_2 - \gamma + 90^\circ + x \sin t_2 \tan d_2 \end{aligned}\right\} \pm \begin{matrix}\text{O. C.}\\ \text{U. C.}\end{matrix}$$

mithin aus der Subtraction beider Gleichungen:

$$y(\pm \tan d_2 \mp \tan d_1) = \vartheta_2 - \vartheta_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) - (T_2 - T_1) + \Delta U_2 - \Delta U_1 - (p_2 - p_1) + x(\sin t_2 \tan d_2 - \sin t_1 \tan d_1),$$

wo auf der rechten Seite, wenn die Beobachtungen rasch aufeinander folgen, die Grössen $\Delta U_2 - \Delta U_1$ und meist auch $p_2 - p_1$ übergangen werden können und zur Berechnung des letzten Gliedes, wenn es überhaupt merklich wird, ein genäherter Werth von x genügt. Bildet man ferner die Unterschiede der Beobachtungszeiten und Ablesungen des Stundenkreises in den beiden Lagen der Achse und setzt zur Abkürzung:

$$\left. n = \frac{\vartheta' - \vartheta}{2} - \frac{T' - T}{2} - \frac{p' - p}{2} + 90^\circ \pm x \tan d \sin\frac{t' - t}{2} \pm b \cos\varphi \sec d \sin\frac{t' - t}{2} \right\} \pm \begin{matrix}\text{O. C.}\\ \text{U. C.}\end{matrix}$$

so giebt jeder Stern eine Gleichung von der Form

$$\left. i' \tan d - k \sec d \pm a \cos\varphi = n \right\} \pm \begin{matrix}\text{O. C.}\\ \text{U. C.}\end{matrix}$$

Hat man ein System derartiger Gleichungen, in denen die Declinationen innerhalb weiter Grenzen variiren, so wird ihre Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate, wobei wegen der verschiedenen Genauigkeit, die der Grösse n je nach der Declination der Sterne zukommt, die Gewichte der einzelnen Gleichungen berücksichtigt werden müssen, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten i', k und $a\cos\varphi$ ergeben. Dabei entspricht der gefundene Werth von k der Stellung des Stundenfadens in derjenigen Lage des Positionskreises, in der er sich bei der Beobachtung befunden hat; wegen der meist excentrischen Lage wird es aber zweckmässiger sein, den Collimationsfehler auf den Drehungsmittelpunkt zu beziehen, was am einfachsten dadurch geschieht, dass man die Beobachtungen in den beiden entgegengesetzten Lagen des Positionskreises ausführt.

Ein zweites Verfahren zur Bestimmung der Grössen i', k und a ist das folgende:

Die vorhergehende Gleichung, angewandt auf Sterne von so hoher Declination, dass mit Rücksicht auf die Kleinheit der hier zu bestimmenden Grössen *tang* und *sec* gleich gesetzt werden können, giebt für

$$\text{O. C.} \quad (i'-k)\sin d = n\cos d - a\cos\varphi\cos d,$$

und ebenso erhält man aus der Beobachtung desselben oder eines anderen Polsterns von nahe gleicher Declination für

$$\text{U. C.} \quad (i'-k)\sin d' = n\cos d' + a\cos\varphi\cos d',$$

woraus mit genügender Genauigkeit, wenn $d_0 = \frac{d+d'}{2}$ gesetzt wird,

$$(i'-k)\sin d_0 = n\cos d_0. \tag{a}$$

Ferner giebt die Beobachtung von Aequatorsternen in der Nähe des Meridians, wie oben:

$$i'\sin d - k + a\cos\varphi\cos d = n\cos d. \tag{b}$$

Beobachtet man endlich noch die Durchgänge von Sternen in der Nähe von $t = 6^h$ oder $t = 18^h$ in beiden Lagen, so gewinnt man eine dritte Relation

$$i'\sin d - k + a\cos\varphi\cos d\cos\frac{t'+t}{2} = n'\cos d \tag{c}$$

wo

$$n' = \frac{\vartheta'-\vartheta}{2} - \frac{T'-T}{2} - \frac{p'-p}{2} + 90 \pm y\,tang\,d\sin\frac{t'-t}{2}\Big\} \pm \frac{6^h}{18^h},$$

aus welcher in Verbindung mit den beiden vorhergehenden i', k und a bestimmt werden können. Aus i' und a folgt dann $i = i' - a\sin\varphi$.

Was die Indexfehler γ und c angeht, deren genäherte Kenntniss das schnellere Auffinden der zu beobachtenden Objecte unterstützt, so geht aus den obigen Gleichungen hervor, dass γ frei von Biegung und Refraction erhalten wird, wenn man einen Aequatorstern (d nahe $= 0$) in zwei zum Meridiandurchgang symmetrischen Lagen der Achse beobachtet:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\vartheta - T + \vartheta' - T') - \alpha + \Delta U + 90°,$$

während der Indexfehler des Declinationskreises c frei von allen übrigen Fehlern sich durch Einstellung einer terrestrischen Marke in beiden Lagen gemäss der Gleichung ergiebt:

$$c = 90° - \frac{(D+D')}{2}.$$

ein Ausdruck, welcher auch bei coelestischen Objecten angewandt werden kann, wenn die Einstellungen rasch aufeinander folgen oder symmetrisch auf beide Lagen vertheilt werden. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass bei den Mikrometern, die eine Verschiebung des ganzen Fadennetzes zulassen, der Werth von c mit der Stellung des Mikrometerkastens veränderlich ist und am zweckmässigsten auf die leicht zu ermittelnde Stellung bezogen wird, bei welcher der δ-Faden durch das Rotationscentrum des Positionskreises hindurchgeht.

Bei den Instrumenten von kleineren Dimensionen sind die Biegung des Rohres und der Declinationsachse meist so gering, dass sie ganz übergangen werden dürfen, und in diesem Falle werden beide Coordinaten des Poles des Instrumentes zugleich mit dem Indexfehler des δ-Kreises mit genügender Sicherheit aus den Einstellungen zweier bekannten Sterne in Declination gefunden. Vorzüglich geeignet für diesen Zweck sind die bei klarem Himmel schon mit Objectiven von 4^z an zu jeder Zeit sichtbaren Sterne α *Ursae minoris* und δ *Ursae minoris*, die zugleich wegen ihres Unterschiedes in Rectascension den Vortheil haben, dass stets einer derselben in beiden Lagen der Declinationsachse beobachtet werden kann.

Bei den grösseren und entsprechend massiver gebauten Instrumenten erreichen dagegen die Durchbiegungen nicht selten Beträge, welche auch bei mikrometrischen Beobachtungen nicht mehr übergangen werden dürfen und die daher nach den oben erläuterten Methoden bestimmt werden müssen. Um hier nur einige Zahlenwerthe anzuführen, so ist bei dem 9zölligen FRAUNHOFER'schen Refractor der Berliner Sternwarte die Durchbiegung des Rohres (Holztubus) zwar klein[1]), dagegen erleidet die Declinationsachse eine Durchbiegung von dem ansehnlichen Maximalbetrag von 47 Secunden. Bei dem 18zölligen Refractor der Strassburger Sternwarte sind die entsprechenden Beträge 19″ und 111″, bei dem 30-Zöller in Pulkowa steigt die Rohrbiegung auf 40″, die Biegung der Declinationsachse beträgt dagegen nur 68″ und ist daher verhältnissmässig klein. Uebrigens stellen alle diese Zahlen die relativen Biegungen dar, deren grösserer oder geringerer Betrag, so lange er überhaupt in angemessenen Grenzen bleibt, nur die Rechnung mehr oder minder erschwert; bedenklicher dagegen ist die absolute Durchbiegung der einzelnen Rohrhälften, die bei den Rieseninstrumenten der Neuzeit bereits so grosse Beträge erreicht, dass die Centrirung des Objectivs nicht mehr für alle Lagen des Fernrohrs erreicht werden kann und die Bilder in Abständen von der optischen Achse, die bei vollkommener Centrirung noch durchaus zulässig sind, an Präcision verlieren.

Bestimmung des Parallels.

Bei allen Messungen mittelst des Positionsmikrometers bedarf es der Kenntniss der Richtung der täglichen Bewegung. Man gelangt dazu am leichtesten dadurch, dass man das Mikrometer so lange dreht, bis ein Aequatorstern, der beim Eintritt in das Gesichtsfeld auf den Faden gestellt wird, denselben bei seinem Durchgang durch das Fernrohr nicht mehr verlässt. Befindet sich der Stern nicht im Aequator, so beschreibt er einen je nach der Grösse seiner Decli-

---

[1]) FOERSTER ist bei seinen eingehenden Untersuchungen über dieses Instrument (Astronomische Beobachtungen auf der Königlichen Sternwarte zu Berlin, Bd. V) zu dem Schlusse gekommen, dass die Differenz zwischen der Durchbiegung des Objectivendes und derjenigen des Ocularendes des Fernrohrs innerhalb einer zur Declinationsachse normalen Ebene eine andere ist, als innerhalb einer durch die Declinationsachse und die Fernrohrachse gelegten Ebene, und dass die erstere verschwindend klein, die andere dagegen einen Betrag von 17″ erreicht.

nation mehr oder minder gekrümmten Weg, und die Bedingung, dass der Faden die Richtung der täglichen Bewegung angebe, ist darin enthalten, dass das Sternscheibchen in gleichen Abständen auf beiden Seiten der optischen Achse durch den Faden bisecirt wird. Praktisch verfährt man dabei so, dass man, nachdem der Stern beim Eintritt in das Feld oder in einem durch einen Stundenfaden markirten Abstand von der Achse mittelst der Feinbewegung des Fernrohrs oder des Mikrometerkastens auf den Faden gestellt und der Positionskreis abgelesen worden ist, den Stern beim Austritt in derselben Entfernung vom centralen Stundenfaden durch die Schraube des Positionskreises wieder auf den Faden bringt und den Kreis von neuem abliest. Hierauf stellt man das Mittel der beiden Ablesungen an den Nonien ein und wiederholt dieselbe Operation so lange, bis es keiner Verbesserung mehr bedarf. Der geübtere Beobachter wird sich von diesen wiederholten Ablesungen dispensiren können, indem er beim Austritt des Sternes den Faden nach dem Augenmaass um die Hälfte der Abweichung dem Stern nähert. Als Faden zur Bestimmung des Parallels benutzt man in der Regel den senkrecht zu dem beweglichen Faden stehenden mittleren Transversalfaden, welcher wegen der in dieser Richtung stets vorhandenen Ocularschiebung länger ist und daher eine grössere Genauigkeit gewährt. Die so bestimmte Richtung der täglichen Bewegung pflegt als »scheinbarer Parallel« bezeichnet zu werden, zum Unterschied von dem wahren Parallel, welcher der Richtung der täglichen Bewegung entspricht, wie solche ohne Vorhandensein einer Strahlenbrechung geschehen würde. Der Unterschied des scheinbaren und wahren Parallels ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Seien in Fig. 315 P der Pol, Z das Zenith, σ' und σ'' die scheinbaren, s' und s'' die wahren Oerter eines Sternes zu den einander naheliegenden Zeitmomenten ϑ' und ϑ'', α, $\alpha + p'$ und $\alpha + p''$ die wahre und die scheinbare Geradeaufsteigung δ, $\delta + q'$ und $\delta + q''$ die wahre und die scheinbare Declination; man verbinde σ'' mit σ' durch einen Bogen grössten Kreises $\sigma''\sigma'\sigma$ und bezeichne den Winkel $P\sigma''\sigma$ mit π'', $P\sigma'\sigma$ mit π', so folgt:

(A. 315.)

$$\cotang \frac{\pi'' + \pi'}{2} = \frac{-\sin \frac{q'' - q'}{2}}{\cos\left(\delta + \frac{q'' + q'}{2}\right) \tang \left(\frac{\vartheta'' - \vartheta'}{2} - \frac{p'' - p'}{2}\right)}.$$

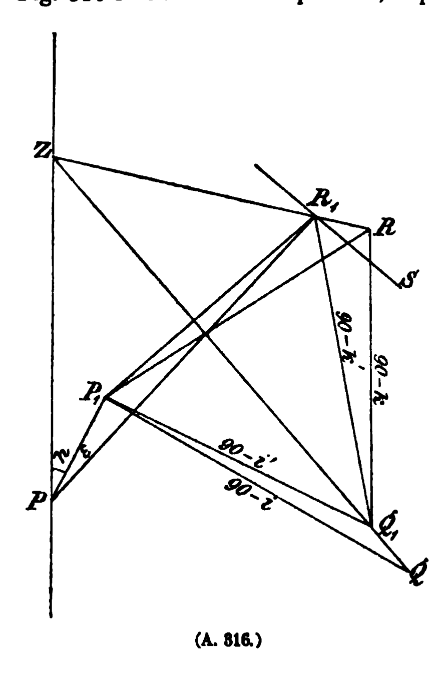
Nun ist $\frac{\pi'' + \pi'}{2}$ (s. u.) sehr nahe gleich $P\sigma_0\sigma$, wenn σ_0 die Mitte des Bogens $\sigma''\sigma'$ bezeichnet und folglich, wenn ein Faden so gestellt wird, dass der Stern in σ' und σ'' von ihm halbirt wird, gleich dem Positionswinkel des scheinbaren Parallels. Setzt man $\frac{\pi'' + \pi'}{2} = 90° + \Delta P$ und substituirt $q'' - q' = \frac{dq}{dt}(\vartheta'' - \vartheta')$ und $p'' - p' = \frac{dp}{dt}(\vartheta'' - \vartheta')$, so wird (ausgedrückt in Bogenminuten)

$$\Delta P = \frac{\frac{dq}{dt} \frac{1}{\sin 1'}}{\left(1 - \frac{dp}{dt}\right) \cos(\delta + q)}$$

und mit Vernachlässigung der Quadrate und höheren Potenzen der Strahlenbrechung

$$\Delta P = \frac{dq}{dt}\frac{sec\,\delta}{sin\,1'} = \frac{\varkappa\,cotang\,n\,cos\,N}{sin\,1'\,sin^2(N+\delta)\,cos\,\delta}.$$

Da, wenn N stets $< 90°$ genommen wird, $cotang\,n$ das Zeichen von $sin\,t$ hat, so folgt, dass ΔP positiv oder der von Nord durch Ost herum gezählte Positionswinkel des scheinbaren Parallels $> 90°$ ist auf der Westseite, und ΔP negativ oder der Positionswinkel $< 90°$ auf der Ostseite des Meridians. Geht die Ablesung auf dem Positionskreis im Sinne der Positionswinkelzählung, so wird demnach, wenn P' die Ablesung für die Richtung des scheinbaren Parallels bezeichnet, die Ablesung für den wahren Parallel $P = P' - \Delta P$ sein. Ist das Instrument fehlerfrei und fällt der Pol seiner Stundenachse mit dem Himmelspol zusammen, so wird in allen Lagen des Fernrohrs der Werth P gleich gefunden werden; sind diese Bedingungen aber nicht erfüllt, so wird die der Richtung des wahren Parallels zukommende Ablesung veränderlich und eine Function der Abweichungen des Standes des Instruments und der Winkel der Achsen sein. Um den Ausdruck hierfür zu erhalten, stelle in nebenstehender Fig. 316 P den Himmelspol dar, P_1 den Pol der Stundenachse, Z das Zenit des Ortes, R den Pol der biegungsfrei gedachten Absehenslinie, Q den Pol der Declinationsachse (in der Richtung vom Fernrohr nach dem Kreisende), wenn keine Durchbiegung stattfände; in Wirklichkeit falle dieser nach Q_1, jener nach R_1, sodass nach den angenommenen Bezeichnungen $P_1Q = 90 - i$, $Q_1R = 90 - k$, $RR_1 = b\,sin\,ZR$, $QQ_1 = a\,sin\,ZQ$; ist dann R_1S ein senkrecht auf PR_1 gezogener Bogen grössten Kreises, so stellt der Winkel Q_1R_1S den Einfluss der Instrumentalfehler auf die Nullrichtung des Positionskreises dar. Setzt man $P_1R_1Q_1 = 90 - u$, $P_1R_1P = v$, so ist $Q_1R_1S = u + v$. Man findet aber leicht mit ausreichender Annäherung aus den sphärischen Dreiecken ZQ_1R und ZQ_1R_1, wenn $Q_1R_1 = 90 - k'$ gesetzt wird,



(A. 316.)

$$k' = k - b\,cos\,\varphi\,sin\,t_1,$$

und aus dem Dreieck $P_1R_1Q_1$, worin $P_1Q_1 = 90 - i'$ ist

$$u = i'\,sec\,d_1 - k'\,tang\,d_1$$
$$= (i + a\,sin\,\varphi)\,sec\,d_1 - k\,tang\,d_1 + b\,cos\,\varphi\,sin\,t_1\,tang\,d_1.$$

Dieser Ausdruck gilt für »Achse voraufgehend«; erwägt man, dass für die entgegengesetzte Lage der Achse an Stelle von d_1 und t_1 $180 - d_1$ und $180 + t_1$ zu treten haben, so erhält man für »Achse folgend«

$$u = -(i + a\,sin\,\varphi)\,sec\,d_1 + k\,tang\,d_1 + b\,cos\,\varphi\,sin\,t_1\,tang\,d_1,$$

in welchen beiden Gleichungen statt der Instrumentalcoordinaten d_1 und t_1 auch die auf den Himmelspol bezogenen Coordinaten δ und t gesetzt werden dürfen. Ferner ist

$$cos\,d_1\,sin\,v = sin\,\varepsilon\,sin(t - h)$$

oder

$$v = (x\,sin\,t - y\,cos\,t)\,sec\,\delta.$$

Bezeichnet jetzt P_0 die Ablesung des Positionskreises, welche der Richtung der täglichen Bewegung bei fehlerfreiem Instrument und ohne Stattfinden einer Strahlenbrechung entsprechen würde, P' die wirkliche Ablesung, so wird:

$$P_0 = P' + (x \sin t - y \cos t) \sec \delta \pm (i + a \sin \varphi) \sec \delta \mp k \tang \delta + b \cos \varphi \sin t \tang \delta - \frac{\varkappa \cos N \cotang n}{\sin^2 (N + \delta) \cos \delta},$$

wo die Grösse $\varkappa$ in Bogenmaass angenommen ist.

Man sollte nun erwarten, dass die nach diesem Ausdruck berechneten Werthe von P_0, so lange am Positionskreis selbst und seiner Verbindung mit dem Fernrohr Aenderungen nicht vorgenommen werden, innerhalb der Grenzen der Unsicherheit in der Beobachtung der P' übereinstimmen würden. Bessel hat aber zuerst an dem Heliometer der Königsberger Sternwarte — und nach ihm Andere — die Erfahrung gemacht, dass zwischen den in entgegengesetzten Lagen der δ-Achse gemachten Bestimmungen Unterschiede auftreten, die mit den obigen Einflüssen der Instrumentalfehler nichts zu thun haben, vielmehr als die Folge einer Drehung oder Torsion des Rohres um seine Achse anzusehen sind. Da diese Torsion als eine Wirkung der Schwere auf das meist an dem einen Ende der Declinationsachse und an einer Seite gehaltene Fernrohr aufgefass werden muss, so lässt sich ihr Einfluss leicht in die Rechnung einführen. Bessel nimmt die Drehung proportional demjenigen Theil der Schwere an, welcher senkrecht auf die durch die δ-Achse und die Rohrachse gelegte Ebene wirkt und setzt sie demnach gleich $\mu \cos \zeta$, wo μ das Maximum der Drehung bezeichnet und ζ die Zenithdistanz des Punktes ist, dessen Stundenwinkel derselbe, den der in der Absehenslinie befindliche Punkt besitzt, dessen Declination aber 90° nördlicher ist. Zu dem obigen Ausdruck von P_0 würde hiernach auf der rechten Seite noch hinzukommen $\pm \mu (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t)$, wo μ aus Beobachtungen des Parallels in beiden Lagen der Achse bestimmt werden muss.

Der Ausdruck von P_0 kann dazu dienen, um innerhalb einer längeren Beobachtungsreihe aus den beobachteten Werthen des Parallels einen genauen Mittelwerth abzuleiten und hieraus umgekehrt wieder die jedesmal anzunehmenden Werthe für den wahren oder scheinbaren Parallel zurückzurechnen und die beobachteten Coordinatenunterschiede in der nachher anzugebenden Weise für die Abweichungen des eingestellten Parallels von seinem wahrscheinlichsten Werthe zu verbessern. Es wird hierbei aber vorausgesetzt, dass die Fehler des Instruments und seiner Aufstellung genügend sicher bekannt sind; ist dies nicht der Fall, so muss bei jeder Ortsbestimmung der scheinbare Parallel bestimmt und der Beobachtung zu Grunde gelegt werden.

Statt die Orientirung nach der Richtung der täglichen Bewegung vorzunehmen kann man auch von dem Parallel des Instrumentes ausgehen, indem man den Faden so stellt, dass ein Stern beim Drehen des Fernrohrs um die Stundenachse ihn nicht verlässt. Der Unterschied zwischen dieser Richtung und der Richtung der täglichen Bewegung wird dann bei der Berechnung der Beobachtungen berücksichtigt werden müssen. Das Verfahren gewährt indess vor dem früheren in keiner Weise Vortheile und steht ihm in Genauigkeit zweifellos erheblich nach [1]).

---

[1]) O. Struve spricht (Observations de Poulkovo, Vol. X) die Vermuthung aus, dass der Zuwachs der w. F. bei den von W. Struve gemessenen Richtungen gegenüber denjenigen der Distanzen (Cl. V H.) durch die geringere Genauigkeit der in Dorpat befolgten Methode zur Bestimmung des Parallels (Drehung um die Stundenachse) veranlasst sei.

Messungen von Rectascensions- und Declinationsdifferenzen bei ruhendem Fernrohr.

Die Messungen können entweder für beide Coordinaten gleichzeitig d. i. bei demselben Durchgang oder getrennt vorgenommen werden; im letzteren Falle, der namentlich bei sehr schwachen Objecten zu bevorzugen ist, empfiehlt es sich, die Messungen der einen Coordinate symmetrisch zu denen der anderen zu machen. Nachdem an dem (mittleren) Transversalfaden die Richtung der scheinbaren täglichen Bewegung (P') bestimmt und hierauf der Positionskreis auf die Ablesung $P' + 90$ eingestellt ist, werden bei ruhendem Fernrohr die Antritte der beiden zu vergleichenden Objecte, entweder nach der Auge- und Ohr-Methode, oder meist besser nach der Registrirmethode beobachtet, wobei es sich empfiehlt, die Signale stets in dem Moment zu geben, in welchem man sich bewusst wird, dass das Object genau unter dem Faden ist oder von demselben bisecirt wird. Für die Messung der Declination wird das voraufgehende und schon vorher in die Nähe des festen Declinationsfadens gebrachte Object mittelst der Feinbewegung des Fernrohres oder besser mittels der Verschiebung des ganzen Mikrometerkastens in der Nähe des Transversalfadens scharf auf den Faden eingestellt, und hierauf das nachfolgende Object in demselben Stundenwinkel mittels des beweglichen Fadens pointirt. Sind T der Stundenwinkel des Stunden- (Transversal-) Fadens, D die Declination des darauf senkrechten Fadens, von dem aus die Declinationsdifferenzen gezählt werden, ϑ und ϑ' die Sternzeiten des Durchganges des voraufgehenden und des nachfolgenden Sterns, Δ und Δ' die gemessenen Unterschiede in Declination, so ist

$$T = \vartheta - \alpha \qquad \Delta = \delta - D$$
$$T = \vartheta' - \alpha' \qquad \Delta' = \delta' - D,$$

mithin

$$\alpha' - \alpha = \vartheta' - \vartheta \qquad \delta' - \delta = \Delta' - \Delta$$

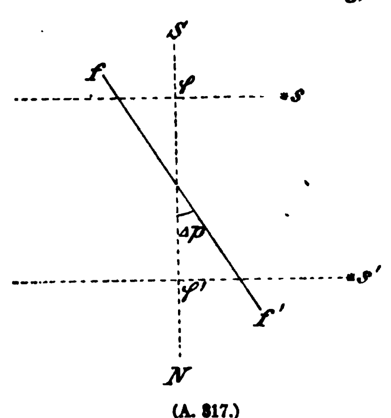
oder da

$$\Delta = 0 \qquad \Delta' = (\pm s' \mp s_0)r,$$

wenn s' die Ablesung der Schraube bei Einstellung auf den folgenden Stern, s_0 die Ablesung für die Coincidenz des festen und des beweglichen Fadens und r den in Bogensecunden ausgedrückten Winkelwerth eines Umgangs der Schraube bezeichnen,

$$\delta' - \delta = (\pm s' \mp s_0)r.$$

Zur Bestimmung der Coincidenz bringt man den beweglichen Faden dem festen Faden abwechselnd von der einen und der anderen Seite bis auf ein Minimum visibile der Trennung, oder bei Feldbeleuchtung bis auf eine äusserst feine lichte Linie nahe und nimmt aus den je zwei Ablesungen das Mittel.



(A. 317.)

Man thut gut, die Beobachtungen auf die zwei um 180° verschiedenen Lagen des Mikrometers zu vertheilen, muss dann aber, wie hier ausdrücklich hervorgehoben werden mag, die Coincidenzstellung für jede Lage besonders ermitteln. Auch empfiehlt es sich, namentlich bei grösseren Declinationsunterschieden den Objecten eine möglichst symmetrische Lage zur Fernrohrachse zu geben.

Was den Einfluss angeht, den ein Fehler in der Einstellung des Stundenfadens in den Declinationskreis ausübt, so ersieht man aus beistehender Fig. 317, dass, wenn der Faden ff' um einen Winkel Δp (in

Bogenminuten) von der Senkrechten $\varphi\varphi'$ zur Richtung der täglichen Bewegung (gezählt in der Richtung von Nord gegen Ost) abweicht, die beobachtete Rectascensionsdifferenz die Correction

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{\delta' - \delta}{15} \sec \delta_0 \Delta p \sin 1',$$

und die Declinationsdifferenz die Correction

$$\Delta(\delta' - \delta) = -\frac{\delta' - \delta}{2} \Delta p^2 \sin^2 1'$$

erfahren muss.

Bei einem Unterschied $\delta' - \delta = 600''$ und einem Fehler $\Delta p = 1'$ erreicht die Verbesserung in Rectascension bereits einen Betrag von $0^s\cdot012 \sec \delta_0$, während für denselben Werth von $\delta' - \delta$ erst ein Fehler $\Delta p = 44'$ eine Unrichtigkeit von $0''\cdot05$ in Declination erzeugt.

Sind daher, wie es gewöhnlich der Fall ist, mehrere Transversalfäden zur Beobachtung der Durchgänge vorhanden, so wird man sie auf ihre Parallelität prüfen und die etwa erforderliche Correction entweder direct aus den Winkeln, welche die Seitenfäden mit dem mittleren Faden einschliessen, oder aus den Abweichungen des Rectascensionsunterschieds von Sternpaaren von grosser Declinationsdifferenz, wenn derselbe allein aus dem Mittelfaden oder aus dem Mittel aller Fäden berechnet wird, ableiten müssen. Auf der anderen Seite ersieht man, dass eine kleine Abweichung von der senkrechten Stellung der Stunden- und der Declinationsfäden zu einander von keiner Bedeutung ist, wenn nur der Parallel an den ersteren bestimmt und der Positionskreis durch Drehung um 90° darnach eingestellt wird.

Wenn die Declinationsdifferenz nicht übermässig gross ist und das Fernrohr genügend fest steht, so kann die Einstellung sowohl des voraufgehenden als des folgenden Objects mittelst des beweglichen Fadens gemacht werden; auch wird man, wenn das Mikrometer mit einer Registrirvorrichtung versehen ist, sich nicht auf eine Einstellung bei jedem Durchgang zu beschränken brauchen, sondern deren zwei oder mehrere machen können. Indess darf man hiervon keinen zu grossen Gewinn an Genauigkeit erwarten, und muss vor allem sich versichern, dass der durch die Registrirung ausgeübte Druck das Fernrohr nicht verstellt. Es sei noch bemerkt, dass es für die Messung von grösseren Unterschieden zweckdienlich ist, sowohl den festen Rahmen als den beweglichen Schlitten mit mehreren Fäden in geeigneten Abständen zu versehen. Sind die Werthe der letzteren aus Durchgangsbeobachtungen scharf ermittelt, so kann man die auszumessende Strecke auf den Abstand zweier festen oder zweier beweglichen Fäden beziehen, ohne die Schraube über Gebühr in Anspruch zu nehmen.

Einfluss der eigenen Bewegung.

Hat das eine der beiden mit einander verglichenen Objecte eine eigene Bewegung, so wird dieselbe vollständig dadurch berücksichtigt, dass man die gemessenen Coordinatenunterschiede für das Mittel der Zeiten gelten lässt, zu denen die Durchgänge dieses Objectes beobachtet und die Declinationseinstellungen gemacht sind.

Einfluss der Strahlenbrechung.

Bezeichnen α, δ, α', δ' die wahren Coordinaten, $\alpha + \frac{p}{15}$, $\delta + q$, . . . die mit Strahlenbrechung behafteten, so müssen die Gleichungen auf pag. 148 strenge so geschrieben werden:

$$T = \vartheta - \left(\alpha + \frac{p}{15}\right) \qquad \Delta = \delta + q - D$$

$$T = \vartheta' - \left(\alpha' + \frac{p'}{15}\right) \qquad \Delta' = \delta' + q' - D.$$

An die ohne Rücksicht auf Strahlenbrechung berechneten Unterschiede sind folglich die Correctionen anzubringen:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{p - p'}{15} = \frac{\varkappa\, cotang\, n}{15\, sin(N + \delta) cos\, \delta} - \frac{\varkappa\, cotang\, n}{15\, sin(N + \delta') cos\, \delta'}$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = q - q' = \varkappa\, cotang\,(N + \delta) - \varkappa\, cotang\,(N + \delta')$$

oder nach einer kurzen Entwickelung:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{\varkappa\, cotang\, n\, cos(N + 2\delta_0)(\delta' - \delta)}{15\, sin^2(N + \delta_0) cos^2 \delta_0}$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = \frac{\varkappa(\delta' - \delta)}{sin^2(N + \delta_0)}$$

und damit auch

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = cotang\, n\, cos(N + 2\delta_0) sec^2 \delta_0 \frac{\Delta(\delta' - \delta)}{15},$$

wo die Grössen N und n nach den pag. 85 gegebenen Formeln berechnet werden.

Diese Ausdrücke gelten nur dann, wenn das Fadennetz nach dem wahren Parallel orientirt ist. Um die entsprechenden Correctionen für die Orientirung nach dem scheinbaren Parallel zu erhalten, braucht man nur noch die Verbesserungen hinzuzufügen, die aus einem Orientirungsfehler $= \Delta P$ hervorgehen. Es wird dann für den scheinbaren Parallel:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{\varkappa\, cotang\, n\, cos(N + 2\delta_0)}{15\, sin^2(N + \delta_0) cos^2 \delta_0}(\delta' - \delta) + \frac{\varkappa\, cotang\, n\, cos\, N}{15\, sin^2(N + \delta_0) cos^2 \delta_0}(\delta' - \delta)$$

$$= \frac{2\, cotang\, n\, cos(N + \delta_0)}{15\, sin^2(N + \delta_0) cos\, \delta_0}(\delta' - \delta).$$

Auf die Declinationsdifferenz hat die Abweichung ΔP nur einen verschwindenden Einfluss, sodass auch hier

$$\Delta(\delta' - \delta) = \frac{\varkappa(\delta' - \delta)}{sin^2(N + \delta_0)}$$

und damit

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = 2\, cotang\, n\, cos\,(N + \delta_0) sec\, \delta_0 \frac{\Delta(\delta' - \delta)}{15}.$$

Diese Correctionen sind genau dieselben, welche für das Kreismikrometer anzuwenden sind, nachdem man die Sehnen mit dem Factor f multiplicirt hat.

Beispiel. Beobachtung des Planeten Thule am grossen Refractor der Sternwarte in Strassburg 1893 April 5. Achse folgend. Vergr. = 207. Beob. Kobold. Scheinb. Parallel 87° 51′. Durchgänge an den 5 Stundenfäden registrirt. Decl.-Einst. bei Faden II und IV (mit Typendruck-Apparat registrirt).

* A. G. Albany 4419 südlich von (279).

	Stern	Planet				Stern	Planet	Planet-Stern
Pos.-Kr. 177°51′	11h 57m 54s·90	1m 7s·77		+3m 12s·87				
	58 0·97	13·55		12·58		26r·197	17r·944	8r·253
	12·64	25·34	25·2	12·70	12·760			
	23·95	36·76		12·81		26·196	18·005	8·191
	29·91	42·75		12·84				
	12 2 19·20	5 31·87		+3 12·67				
	26·09	38·98		12·89		24·837	16·546	8·291
	37·05	49·58	49·9	12·53	12.674			
	48·32	6 1·09		12·77		24·861	16·620	8·241
	55·29	7·80		12·51				

	Stern	Planet				Stern	Planet	Planet-Stern
Pos.-Kr. 357° 51′	$12^h\ 7^m\ 10^s{\cdot}42$	$10^m\ 23^s{\cdot}25$		$+3^m\ 12^s{\cdot}83$				
	16·49	29·22		12·73		$17^R{\cdot}395$	$25^R{\cdot}821$	$8^R{\cdot}426$
	27·70	40·52	40·7	12·82	12·712			
	39·77	52·39		12·62		17·412	25·684	8·272
	45·66	58·22		12·56				
	11 28·60	14 41·20		+3 12·60				
	34·46	47·02		12·56		18·208	26·624	8·416
	45·69	58·40	58·6	12·71	12·594			
	57·64	15 10·19		12·55		18·254	26·600	8·346
	12 3·54	16·09		12·55				
Mittel	12 8 13·6			+3 12·685				+ 8·3045
ΔU	+31·9							+ 3′ 7″·62
Sternzeit	12 8 45·5							
St.-Zt. i. m. M.	0 55 57·5							
	11 12 48·0							
Red. a. m. Zt.	— 1 50·2							

Refraction:

St.-Zt.	$12^h\ 8^m{\cdot}8$	z	45°·8
α	12 2·9	$\log \varkappa$	6·444
t	0 5·9	$\log(\delta' - \delta)$	2·273
N	+41° 24′	$\log \varkappa(\delta' - \delta)$	8·717
δ_0	+ 2 48	$\log \sin^2(N + \delta_0)$	9·686
$N + \delta_0$	44 12	$\Delta(\delta' - \delta)$	+0″·11
$\log \sin n$	0·000	$\Delta(\alpha' - \alpha)$	0·00
$\log \sin(N + \delta_0)$	9·843		
$\log \cos(N + \delta_0)$	9·855		
$\log \sec \delta_0$	0·000		
$\log \operatorname{cotang} n$	8·23		
$\log 2$	0·30		

* M. A. 1875·0	$11^h\ 58^m\ 47^s{\cdot}09$	+2° 52′ 52″·3
Praec. 1893·0—75·0	+ 55·307	—6 0·96
Eig. Bew. in 11·6 J.	— 0·058	—1·16
M. A. 1893·0 Ep. 1893·3	11 59 42·34	+2 46 50·2
Red. a. sch. Ort	+1·49	—9·2
Scheinb. Sternort	11 59 43·83	+2 46 41·0
(279) — *	+3 12·69	+3 7·62
Refr.	0·00	+0·11
Ort des Planeten $11^h\ 10^m$ 57·8 M. Zt. Str.	12 2 56·52	+2 49 48·7
$\log$ f. par.	8·001	0·800

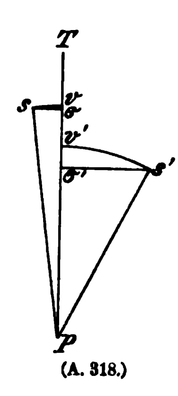
Berechnung der $\log$ (Par. × Δ) (nach den Tafeln von REBEUR-PASCHWITZ[1])

T_α	+ 0″·15
T_δ	— 5·85
$\log \frac{T_\alpha}{15}$	8·000
$\log \cos \delta$	9·999
$\log T'_\delta$	0·820
$\log \sin \delta$	8·693
$\log T_\delta$	$0{\cdot}767_n$
$T'_\delta \cos \delta$	+ 6·60
$T_\delta \sin \delta$	— 0·29.

[1]) Veröffentlichungen der Grossherzogl. Sternwarte zu Karlsruhe III.

Ausmessung von δ- und α-Differenzen bei gehendem Uhrwerk.

Stehen die beiden zu vergleichenden Sterne einander so nahe, dass sie gleichzeitig im Gesichtsfeld sind, so wird ihre Declinationsdifferenz mit Vortheil durch gleichzeitige Pointirung gemessen, indem man das Fernrohr mittels des Uhrwerks der täglichen Bewegung folgen lässt. Man muss hierbei aber stets den festen Faden zur Einstellung des einen Objects anwenden und die Messung in der Weise ausführen, dass man einmal den einen Stern mit dem festen, den andern mit dem beweglichen Faden pointirt, hierauf umgekehrt den letzteren mit dem festen und den ersteren mit dem beweglichen Faden einstellt. Die Differenz der beiden Ablesungen ist dann der doppelte Declinationsunterschied, die Coincidenz selbst fällt heraus und braucht nicht bestimmt zu werden. Bei diesem Verfahren ist aber, namentlich in höheren Declinationen, darauf zu achten, dass die beiden Objecte symmetrisch zu dem mittleren Stundenfaden stehen. Um den Einfluss, den hierbei die Krümmung des Parallels ausübt, zu übersehen, stelle PT diesen Stundenfaden vor, die Einstellung des einen Objects erfolge bei s' in dem Abstand $s'\sigma' = c'$, die des anderen bei s in der Entfernung $s\sigma = c$; die mit der Schraube gemessene Differenz ist $\Delta = \sigma'\sigma$, während die scheinbare Declinations-Differenz $\delta' - \delta = v'v$ ist. Man findet aber leicht



(A. 318.)

$$\delta' - \delta = \Delta - \tfrac{1}{2} \sin 1'' (c'^2 \tang \delta' - c^2 \tang \delta).$$

Dass das letzte Glied bei unsymmetrischer Stellung merkliche Beträge erreichen kann, zeigt folgende kleine Tafel. Sei der Declinationsunterschied des Sternpaares 10', der Unterschied in Rectascension, reducirt auf Bogen grössten Kreises 6', so wird der Fehler, den man begeht, wenn $\delta' - \delta = \Delta$ gesetzt wird:

c'	c	$\delta = 45$	$\delta = 60$	$\delta = 80$
0'	6'	− 0''·31	− 0''·54	− 1''·78
1	5	− 0·21	− 0·36	− 1·19
2	4	− 0·11	− 0·18	− 0·59
3	3	0·00	0·00	+ 0·01
4	2	+ 0·10	+ 0·18	+ 0·61
5	1	+ 0·21	+ 0·36	+ 1·21
6	0	+ 0·32	+ 0·55	+ 1·81

Dagegen wird bei symmetrischer Stellung der Fehler, welcher in diesem Falle besser in die Form gebracht wird

$$\tfrac{1}{4} c^2 \sin^2 1'' \sec^2 \delta_0 (\delta' - \delta)$$

erst bei $\delta_0 = 86°$ den Betrag von 0''·05 erreichen.

Dreht man das Mikrometer um 90°, so dass der bisherige Declinationsfaden etzt in den Stundenkreis fällt, so kann auch der Rectascensionsunterschied mit der Schraube gemessen werden. Setzt man nämlich

$$s'\sigma' = f' \qquad s\sigma = f \qquad TPs' = \tau' \qquad TPs = \tau$$

so ist

$$\sin \tau' = f' \sin 1'' \sec \delta' = f' \sin 1'' \sec \delta_0 \left(1 + \tang \delta_0 \frac{\Delta\delta}{2} \sin 1''\right)$$

$$\sin \tau = f \sin 1'' \sec \delta = f \sin 1'' \sec \delta_0 \left(1 - \tang \delta_0 \frac{\Delta\delta}{2} \sin 1''\right),$$

wo δ_0 wie üblich $= \frac{\delta' + \delta}{2}$ und $\Delta\delta = \delta' - \delta$, und hiermit

$$2 \sin \frac{15(\alpha' - \alpha)}{2} = \frac{\sin \tau' + \sin \tau}{\cos \frac{\tau' - \tau}{2}}$$

oder meist genügend

$$\Delta \alpha = \frac{(f' + f)}{15} \sec \delta_0 + \frac{(f' - f)}{15} \operatorname{tang} \delta_0 \sec \delta_0 \frac{\Delta \delta}{2} \sin 1''.$$

Die Grösse $f' + f = s'\sigma' + \sigma s$ ist das unmittelbare Resultat der Messung und das zweite von der Convergenz der Stundenkreise herrührende Glied verschwindet, wenn die Sterne symmetrisch zum Stundenfaden gestellt werden. Wegen der Unvollkommenheiten des Uhrwerks wird es bei diesen Messungen in noch höherem Grade, als bei den Messungen des Declinationsunterschiedes nothwendig sein, beide Sterne möglichst gleichzeitig einzustellen, und daher den festen Faden mit zu benutzen. Man wird hierbei von dem obigen Correctionsgliede frei werden, wenn man in derselben Weise wie bei der Declination den doppelten Abstand ausmisst. Bei diesem Verfahren der Bestimmung der Coordinatendifferenzen erleiden die oben abgeleiteten Ausdrücke für den Einfluss der Strahlenbrechung eine gewisse Modification. Denn da die Messungen für beide Objecte nicht unter demselben Stundenwinkel gemacht werden, so sind $p' - p$ und $q' - q$ Functionen nicht nur von $\delta' - \delta$, sondern auch von $t' - t$. Es ist daher zu den oben abgeleiteten Correctionen noch hinzuzufügen: zu $\Delta(\alpha' - \alpha)$ das Glied $-\frac{dp}{dt}\frac{(t' - t)}{15}$ oder $\frac{dp}{dt}(\alpha' - \alpha)$ und zu $\Delta(\delta' - \delta)$ das Glied $15\frac{dq}{dt}(\alpha' - \alpha)$, oder es werden die Zusatzglieder

$$\Delta_1(\alpha' - \alpha) = x\left(\frac{\operatorname{cotang}^2 n}{\sin^2(N + \delta_0)} + \frac{\sin N}{\sin(N + \delta_0)\cos\delta_0}\right)(\alpha' - \alpha)$$

$$\Delta_1(\delta' - \delta) = 15\,\frac{x \operatorname{cotang} n \cos N}{\sin^2(N + \delta_0)}(\alpha' - \alpha).$$

Bestimmung des relativen Ortes zweier Körper durch Positionswinkel und Distanz.

Die relative Lage eines Objectes s' auf der Himmelskugel zu einem anderen Objecte s wird häufig und namentlich bei kleinen Entfernungen (Doppelsternen) zweckmässiger als durch rechtwinklige sphärische Coordinaten, durch sphärische Polarcoordinaten ausgedrückt; diese sind erstens der Positionswinkel, d. i. der Winkel, den der Bogen grössten Kreises, welcher s mit s' verbindet, mit dem durch s gelegten Declinationskreise macht, und zweitens die Grösse dieses Bogens oder die Distanz; der erstere wird allgemein von Norden durch Osten herum von 0° bis 360° gezählt.

Die strengen Beziehungen zwischen dem Positionswinkel und der Distanz einerseits und dem Unterschiede der Rectascensionen und Declinationen der beiden Sterne andererseits folgen unmittelbar aus dem sphärischen Dreieck (Fig. 319) zwischen dem Pol P und den Oertern der beiden Sterne s und s'. Nach früheren Bezeichnungen ist $Ps = 90 - \delta$, $Ps' = 90 - \delta'$, $SPP' = \alpha' - \alpha$; setzt man ferner $Pss' = p$, $Ps's = 180 - p'$, $ss' = s$, so folgt:

$$\operatorname{tang}\frac{\delta' - \delta}{2} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s\,\frac{\cos\frac{p' + p}{2}}{\cos\frac{p' - p}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \sin\tfrac{1}{2}s\,\frac{\sin\frac{p' + p}{2}}{\cos\left(\delta + \frac{\delta' - \delta}{2}\right)}.$$

(A. 319.)

Bei den Messungen in diesem Coordinatensystem, welche mittelst der hier besprochenen Mikrometer ausgeführt werden, ist die Distanz so klein, dass man in den meisten Fällen mit einfacheren Ausdrücken ausreicht. Sei s_0 die Mitte des Bogens ss', δ_0 seine Declination und werde Ps_0s' mit p_0 bezeichnet, so giebt das Dreieck Pss_0:

$$\cos\delta \sin p = \cos\delta_0 \sin p_0$$
$$\cos\delta \cos p = \sin\delta_0 \sin\tfrac{1}{2}s + \cos\delta_0 \cos\tfrac{1}{2}s \cos p_0$$

oder, wenn $\sin\frac{1}{2}s$ und $\cos\frac{1}{2}s$ in Reihen entwickelt werden:

$$\cos\delta \sin(p - p_0) = -\tfrac{1}{2}s \sin 1'' \sin\delta_0 \sin p_0 + \tfrac{1}{8}s^2 \sin^2 1'' \cos\delta_0 \sin p_0 \cos p_0 + \tfrac{1}{48}s^3 \sin^3 1'' \sin\delta_0 \sin p_0 - \ldots$$
$$\cos\delta \cos(p - p_0) = \cos\delta_0 + \tfrac{1}{2}s \sin 1'' \sin\delta_0 \cos p_0 - \tfrac{1}{8}s^2 \sin^2 1'' \cos\delta_0 \cos^2 p_0 - \tfrac{1}{48}s^3 \sin^3 1'' \sin\delta_0 \cos p_0 + \ldots$$

und hieraus durch Division bis auf Glieder 3. Ordnung bezüglich s:

$$p - p_0 = -\tfrac{1}{2}s \operatorname{tang}\delta_0 \sin p_0 + \tfrac{1}{16}s^2 \sin 1'' \sin 2p_0 (1 + 2\operatorname{tang}^2\delta_0) + \ldots$$

Entsprechend erhält man aus dem Dreieck Ps_0s':

$$p' - p_0 = \tfrac{1}{2}s \operatorname{tang}\delta_0 \sin p_0 + \tfrac{1}{16}s^2 \sin 1'' \sin 2p_0 (1 + 2\operatorname{tang}^2\delta_0) - \ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt bis auf die 4. Potenz von s

$$\frac{p + p'}{2} - p_0 = \tfrac{1}{16}s^2 \sin 1'' \sin 2p_0 (1 + 2\operatorname{tang}^2\delta_0)$$

und mit Vernachlässigung der Glieder 3. Ordnung

$$\frac{p' - p}{2} = \tfrac{1}{2}s \operatorname{tang}\delta_0 \sin p_0.$$

Hiernach wird man in fast allen hier in Betracht kommenden Fällen $\frac{p' + p}{2} = p_0$ und $\cos\frac{p' - p}{2} = 1$, und folglich an Stelle der obigen strengen Gleichungen die einfacheren Ausdrücke setzen dürfen:

$$\alpha' - \alpha = s \sin p_0 \sec\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)$$
$$\delta' - \delta = s \cos p_0.$$

Messung der Positionswinkel und Distanzen.

Um den Positionswinkel zweier Sterne zu messen, stellt man die Mitte des sie verbindenden Bogens möglichst nahe in den Drehungsmittelpunkt des Positionskreises und dreht das Mikrometer so weit, bis der mittlere Transversalfaden oder der darauf senkrechte Faden die beiden Objecte genau deckt oder bisecirt; bestimmt man hierauf an demselben Faden die Richtung der täglichen Bewegung, so giebt die Differenz der beiden Ablesungen vermehrt um 90° den Positionswinkel. Abgesehen davon, dass die Einstellung des Punktes s_0 in die Nähe der Rohr- und also auch der optischen Hauptachse aus naheliegenden optischen Gründen sich empfiehlt, so kann man sich auch leicht überzeugen, dass stärkere Abweichungen von dieser Regel in höheren Declinationen und bei grösseren Distanzen merkliche Fehler erzeugen können. Ist Po in Fig. 320 der centrale Declinationskreis, s_0 die Mitte des beide Objecte verbindenden Bogens, so wird durch die Beobachtung der Winkel $Pos' = p$ gemessen, während der Winkel $Ps_0s' = p_0$ verlangt wird. Es ist

(A. 320.)

aber, wenn ε den Abstand der Mitte s_0 von dem Stundenkreis Po oder die Grösse $s_0 o'$ bezeichnet,'

$$\cos p = \cos p_0 \cos(\varepsilon \sec \delta_0) + \sin p_0 \sin(\varepsilon \sec \delta_0) \sin \delta_0$$

oder hinreichend nahe $p_0 = p + \varepsilon \tan \delta_0$.

Der in dem relativen Ort erzeugte Fehler würde demnach bei einer Distanz von s Secunden $s \varepsilon \sin 1' \tan \delta_0$ Secunden sein oder für je eine Minute von ε

bei $\delta_0 = 45°$	60°	70°	80°
$0''.03 \frac{s}{100}$	$0''.05 \frac{s}{100}$	$0''.08 \frac{s}{100}$	$0''.16 \frac{s}{100}$

Statt die beiden Objecte durch den Faden zu biseciren, kann man sie auch in die Mitte zweier Fäden stellen, etwa eines festen und des beweglichen Fadens, der in einen passenden Abstand gebracht ist. Welche von diesen beiden Einstellungsarten den Vorzug verdient, hängt von den jeweiligen besonderen Umständen ab, der Distanz der beiden Sterne, ihrer Helligkeit, der Gewöhnung des Beobachters u. a. Sind beide Sterne oder auch nur der eine so schwach, dass sie unter dem Faden verschwinden, so verbietet sich die Pointirung durch den Faden von selbst; im anderen Falle wird man mit Rücksicht auf die constanten Fehler, denen man bei derartigen Messungen ausgesetzt ist, diejenige Methode bevorzugen müssen, welche die grösste Sicherheit nach dieser Richtung gewährt. Wir kommen nachher auf diesen Punkt zurück, hier sei nur bemerkt, dass man bei der Einstellung der Sterne zwischen zwei Fäden den Parallelismus ihrer Verbindungslinie mit den Fäden auf verschiedene Weise feststellen und beurtheilen kann, einmal dadurch, dass man beide Sterne scharf in die Mitte der Fäden stellt und dabei abwechselnd den einen und den anderen ins Auge fasst, bis man von der gleichzeitigen richtigen Stellung überzeugt ist, oder indem man die Verbindungslinie der beiden Centren mit jedem der beiden einander parallelen Fäden vergleicht. Das letztere Verfahren kann man auch dahin abändern, dass man statt eines Doppelfadens einen einfachen Faden anwendet und durch einen leichten Druck auf das Fernrohr die Sterne bald von der einen, bald von der anderen Seite an den Faden heranbringt. Die meisten Beobachter bevorzugen wohl nach dem Vorgange von O. STRUVE die Einstellung zwischen zwei Fäden, so lange die Distanz kleiner ist als etwa eine halbe Minute (32'' als untere Grenze der V. HERSCHEL'schen Klasse der Doppelsterne), während sie bei grösseren Distanzen das Verfahren der Bisection mittelst eines Fadens anwenden. Bei der einen, wie bei der anderen Methode empfiehlt es sich aber zur Elimination von Torsionen, den Positionskreis abwechselnd von der einen und der anderen Seite zu drehen; die Drehung selbst wird bei engeren Sternpaaren am besten aus freier Hand, bei weiteren mittelst der Feinbewegung ausgeführt.

Nach Beendigung der Messungen des Positionswinkels oder eines Satzes derselben wird der Positionskreis auf das Mittel der Ablesungen (bezw. 90° + Mittel) eingestellt und die einfache oder doppelte Distanz gemessen, indem man dabei in derselben Weise, wie bei der Messung von Declinationsdifferenzen bei gehendem Uhrwerk verfährt. Bei sehr engen Paaren wird zuweilen die vierfache Distanz gemessen, indem man den Stern a auf den festen Faden einstellt, und den beweglichen Faden in eine solche Entfernung bringt, dass Stern b sich in der Mitte beider Fäden befindet, und hierauf dieselbe Messung mit Einstellung von b auf den festen Faden auf der anderen Seite wiederholt. Diese für Doppelbildmikrometer sehr geeignete Methode ist bei dem Fadenmikrometer weniger vortheilhaft, weil die zu vergleichenden Strecken ungleich erhellt sind.

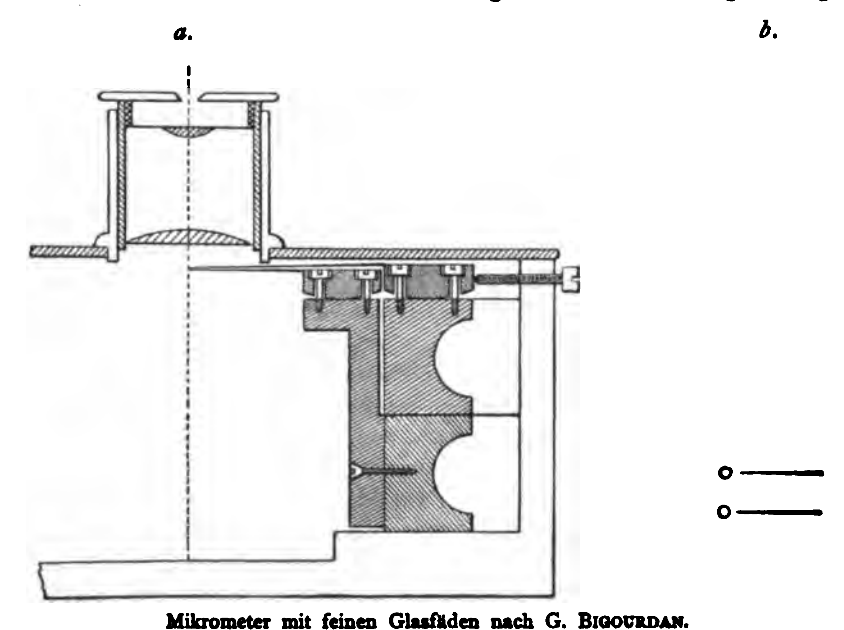
Bei sehr kleinen Distanzen ($< 0''\cdot 7$) verfuhr W. STRUVE in der folgenden Weise: Das Intervall zwischen den benachbarten Rändern der Fäden wurde dem Abstand der Centren der beiden Sterne nach dem Augenmaass gleich gemacht, indem jedesmal Fäden und Sterne für sich betrachtet wurden, und hierauf der Contact der Fäden bestimmt. Sicherer erwies sich, namentlich bei den engsten in seinem Fernrohr noch messbaren Doppelsternen, ein anderes Verfahren, welches auf der Schätzung des Abstands der Mittelpunkte der beiden Componenten beruhte, wobei der Abstand der auf etwa 1'' auseinander gebrachten Fäden, zwischen welche das Paar eingestellt wurde, als Anhalt diente. Nach den Erfahrungen von SCHIAPARELLI ist für Abstände von $0''\cdot 6 - 1''\cdot 2$ und bei ruhigen Bildern die folgende Methode sehr geeignet. Die einander zugekehrten Ränder der beiden Fäden werden mit den beiden Sternscheibchen in äussere Berührung gebracht, und das Verhältniss der beiden Durchmesser und des Zwischenraums zwischen den beiden Scheibchen gegeneinander abgeschätzt. Werden der letztere mit Δ, die Durchmesser mit r und r' bezeichnet, und ergiebt die Messung als Distanz zwischen den beiden äusseren Rändern a, die Schätzung dagegen $r = \alpha r'$, $\Delta = \beta r'$, so ist

$$a = 2r + \Delta + 2r' = 2\alpha r' + \beta r' + 2r' = s + r + r',$$

folglich

$$r' = \frac{a}{2(1+\alpha)+\beta} \qquad s = a - (1+\alpha)\,r'.$$

G. BIGOURDAN hat in neuerer Zeit[1]) zur Messung von kleinen Distanzen und zu Durchmesserbestimmungen kleiner Scheibchen (z. B. der Jupiterstrabanten) feine, spitz zulaufende Glasfäden (von 6μ an ihrem dünneren Ende) benutzt, welche auf die Sterne gerichtet werden, ohne sie zu bedecken (Fig. 321 und 321 a). Die Bilder bleiben bei diesem Verfahren ungestört und die lästigen Beugungs-



Mikrometer mit feinen Glasfäden nach G. BIGOURDAN.

(A. 321.)

1) G. BIGOURDAN, Sur la mesure micrométrique des petites distances angulaires célestes et sur un moyen de perfectionner ce genre de mesures.

erscheinungen und Deformationen, welche die Messung von engeren Doppelsternen so sehr erschweren und häufig unmöglich machen, fallen ganz weg. Auch lässt nach den Erfahrungen von BIGOURDAN die Genauigkeit der Messung kaum etwas zu wünschen; erst wenn die Entfernung eine gewisse Grenze, etwa 3" — 4" überschritten hat, nimmt die Sicherheit des Urtheils, ob die beiden Sterne gleichzeitig in der Richtung der Fäden liegen, merklich ab; aber hier und schon unterhalb dieser Grenze bietet das Verfahren der Bisection keine Schwierigkeiten mehr dar[1]).

Positionswinkel und Distanz können auch gleichzeitig gemessen werden, wenn man sich für ersteren des Querfadens bedient; im Allgemeinen und besonders für Doppelsterne wird aber die Trennung der Messungen zu bevorzugen sein.

Beispiel.

Strassburg 1896 Mai 14. 6" Refractor. A. f. Vergr. 260. Beob. BECKER.

Σ 1954 δ Serpentis $15^h 29^m 50^s$ +10° 57'

St.-Zt.	Pos.-Kr.		(P.-Kr. 183° 14')		
			r	r	
$12^h 23^m$	183°.5	Schr. rechts	19·956	20·260	Schr. unten
	184·3	Schr. rechts	20·755	20·437	Schr. unten
	182·1	Schr. rechts	20·434	20·746	Schr. unten
	183·0	Schr. rechts	20·251	19 919	Schr. unten
Mittel	183·23		19·942	20·248	Schr. oben
	185·7	Schr. links	20·444	20·755	Schr. oben
	186·0	Schr. links	20·739	20·432	Schr. oben
	185·6	Schr. links	19·943	20·256	Schr. oben
$13^h 36^m$	186·9	Schr. links			
Mittel	186·05				

Man hat demnach für den Pos.-Winkel: für die doppelte Distanz:

			r	r
Lage I	183°.23		0·304	0·306
II	186·05		0·318	0·311
Mittel	184·64		0·312	0·307
Sch. Par.	0·33		0·332	0·313
	184·3	Lage I	0·3165	
		II	0·3092	
		Mittel	0·3128	
		einfache Dist.	0·1564 = 3''.58.	

Die Refraction ist bei der kleinen Distanz unmerklich; man hat folglich

1896·37 $s = 3''.58$ $p = 184°.3$.

Positionsbestimmungen von Nebelflecken und Kometen und Berücksichtigung der eigenen Bewegung.

Obwohl nach Ausweis mancher grösserer Beobachtungsreihen recht genaue Positionsbestimmungen von Nebelflecken mittels der im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Mikrometer, namentlich des Kreismikrometers und der

1) Die Glasfäden werden leicht erhalten, wenn man ein cylindrisches Glasstäbchen in der Mitte bis zum Erweichen erhitzt, langsam auseinander zieht und hierauf durch eine plötzliche Bewegung in zwei Theile trennt; jeder derselben läuft dann in einen feinen Faden aus. Nachdem man die Fäden abgeschnitten und die beiden Hälften wieder zusammengeschmolzen hat, kann man dasselbe Verfahren wiederholen und erlangt so in kurzer Zeit eine Anzahl von Fäden.

Lamelle unter 45°, erlangt werden können, so kann es doch nicht zweifelhaft sein, dass auch für diese Objecte das Fadenmikrometer und geeignetenfalls die Messung von Positionswinkel und Distanz den Vorzug verdienen. Es wird dies besonders da der Fall sein, wo die Objecte sehr schwach sind und keine oder nur eine sehr geringe Concentration des Lichtes zeigen, so dass der Beobachter auf eine Schätzung der Lage des Lichtschwerpunktes angewiesen ist. Von nicht geringer Bedeutung ist hierbei eine gleichmässige (nicht einseitige!), in allmähligem Uebergang abschwächbare Beleuchtung der Fäden; benutzt man Metallfäden, so wird man bei helleren Sternen und symmetrisch geformten Nebelflecken die Pointirung in der gewöhnlichen Weise ausführen können, in solchen Fällen aber, wo das einzustellende Object vollständig hinter dem breiteren Faden verschwindet, die Einstellung abwechselnd und symmetrisch mit dem einen und anderen Rand desselben machen[1]; sehr gute Dienste leistet auch hier ein nicht zu enger Doppelfaden. Für die Einstellung des Sterns benutzt man stets den festen, für den Nebel den beweglichen Faden.

Alles hier Gesagte gilt auch für die Beobachtung von Kometen, wenn man auch bei diesen meistens der Beobachtung von α- und δ-Differenzen wegen der grösseren Einfachheit des Verfahrens und der Möglichkeit des directen Anschlusses an einen genügend hellen, seiner Lage nach bekannten oder leicht an Meridianinstrumenten bestimmbaren Stern den Vorzug geben wird. Es ist hier aber auf zweierlei aufmerksam zu machen. Hat der Komet eine geringe eigene Bewegung und steht er dem Vergleichstern nicht zu nahe, so wird man die Messung der Distanzen bei einer unveränderten, aus den voraufgegangenen Richtungsbeobachtungen zu entnehmenden Stellung des Positionskreises ausführen dürfen, muss dann aber bei der Reduction mit Hilfe des nachfolgenden Satzes von Positionswinkelmessungen dem Unterschiede zwischen der eingestellten Richtung und derjenigen, in welcher die Distanz hätte beobachtet werden sollen, Rechnung tragen. Ein zweckmässigeres und in allen Fällen anwendbares Verfahren besteht darin, dass man bei der Distanzmessung die Einstellungen der beiden Objecte jedesmal in dem zugehörigen Positionswinkel macht, indem man sie auf den Fadenkreuzungspunkt des Transversalfadens und des festen bezw. beweglichen Fadens stellt. Es ist ferner zu beachten, dass der Positionswinkel und die Distanz, auch bei gleichförmiger Bewegung des Kometen innerhalb der Beobachtungszeit sich ungleichförmig ändern, und dass daher das Mittel der gemessenen Richtungen und Entfernungen nicht strenge dem Mittel der Zeiten entspricht.

Man kann diesem Umstand bei der Reduction in folgender Weise Rechnung tragen[2]: Sei δ_0 das Mittel der Declinationen von Komet und Stern, und es werde gesetzt:

$$\begin{aligned} x &= \cos\delta_0(\alpha' - \alpha) = s \sin p \\ y &= (\delta' - \delta) = s \cos p; \end{aligned}$$

es seien ferner für eine mittlere Epoche t_0 x_0 und y_0 genäherte Werthe von x und y, die aus einer vorläufigen Reduction leicht erlangt werden können, aber um so genauer sein müssen, je näher der Komet dem Sterne stand und je stärker seine Bewegung war; endlich e und e' die für die Zeit t_0 der Ephemeride

---

[1]) G. BIGOURDAN: Observations de nébuleuses et d'amas stellaires. Annales de l'Observatoire de Paris. Observations 1884.

[2]) W. STRUVE, Beobachtungen des BIELA'schen Kometen im Jahre 1832 auf der Dorpater Sternwarte Astr. Nachr., Bd. 12.

entnommenen Werthe der Veränderung der Rectascension und Declination in der Zeiteinheit. Man rechne für die einzelnen Zeiten, bezw. für gewisse mittlere Epochen:

$$x = x_0 + e\cos\delta_0(t - t_0)$$
$$y = y_0 + e'(t - t_0)$$
$$tang\,p = \frac{x}{y} \qquad s = \frac{x}{\sin p} = \frac{y}{\cos p};$$

bezeichnen dann π und σ die zu diesen Zeiten gemessenen Positionswinkel und Distanzen, so findet man die an x_0 und y_0 anzubringenden Correctionen aus der Auflösung des Systems von Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\sigma - s = \sin p\,dx_0 + \cos p\,dy_0$$
$$\sigma\sin(\pi - p) = \cos p\,dx_0 - \sin p\,dy_0$$

und erhält damit

$$\alpha' - \alpha = (x_0 + dx_0)\sec\delta_0$$
$$\delta' - \delta = y_0 + dy_0.$$

Wirkung der Strahlenbrechung auf Positionswinkel und Distanz.

Um den Einfluss der Strahlenbrechung auf Positionswinkel und Distanz zu erhalten, betrachte man das Dreieck zwischen Zenit und den beiden mit Refraction behafteten Sternörtern; sind z' und z'' die scheinbaren Zenitdistanzen, a der Azimutalunterschied der beiden Sterne, s die scheinbare Distanz, so ist

$$\cos s = \cos z'\cos z'' + \sin z'\sin z''\cos a,$$

mithin durch Differentiation, wobei a constant bleibt:

$$-\sin s\,ds = -\sin z'\cos z''dz' - \cos z'\sin z''dz'' + \cos z'\sin z''\cos a\,dz' + \sin z'\cos z''\cos a\,dz''$$

oder wenn man substituirt

$$dz' = \varkappa\,tang\,z' \qquad dz'' = \varkappa\,tang\,z''$$
$$\frac{1}{\varkappa}\sin s\,ds = \frac{\cos^2 z' + \cos^2 z''}{\cos z'\cos z''} - 2\cos s.$$

Nun ist, wenn z_0 die Zenitdistanz der Mitte s_0 des die beiden Sterne verbindenden Bogens, p den Positionswinkel und η den parallactischen Winkel an s_0 bezeichnen,

$$\cos z' = \cos z_0\cos\tfrac{1}{2}s - \sin z_0\sin\tfrac{1}{2}s\cos(p - \eta)$$
$$\cos z'' = \cos z_0\cos\tfrac{1}{2}s + \sin z_0\sin\tfrac{1}{2}s\cos(p - \eta);$$

setzt man diese Werthe in obigen Ausdruck ein und beschränkt sich auf die erste Potenz von s, so erhält man als Reduction der scheinbaren Distanz auf die wahre:

$$\Delta s = \varkappa s(1 + tang^2 z_0\cos^2(p - \eta)).$$

Man hat ferner innerhalb derselben Grenzen:

$$\sin a\sin z_0 = s\sin(p - \eta),$$

woraus durch Differentiation und nach Elimination von a:

$$d(p - \eta) = -\varkappa\,tang^2 z_0\sin(p - \eta)\cos(p - \eta).$$

Ist aber a_0 das Azimut von s_0, so ist $\sin a_0\cos\varphi = \sin\eta\cos\delta_0$, folglich

$$d\eta = tang\,\delta_0\,tang\,\eta\,d\delta_0,$$

oder da für den Uebergang vom scheinbaren zum wahren Ort

$$d\delta_0 = -\varkappa\,tang\,z_0\cos\eta$$
$$d\eta = -\varkappa\sin\eta\,tang\,\delta_0\,tang\,z_0$$

mithin

$$\Delta p = -\frac{\varkappa \, tang \, z_0}{sin \, 1'} \left(sin \, \eta \, tang \, \delta_0 + tang \, z_0 \, sin \, (p - \eta) \, cos \, (p - \eta)\right)$$

wo Δp in Minuten erhalten wird, wenn $\varkappa$ in Theilen des Radius angesetzt wird. Dieser Ausdruck setzt voraus, dass der Ableitung des Positionswinkels aus der beobachteten Richtung der wahre Parallel zu Grunde liegt.

Wird dagegen der scheinbare Parallel angewandt, so ist zu dem obigen Ausdruck noch die Grösse $\Delta P =$ scheinbarer Parallel — wahrer Parallel hinzuzufügen. Offenbar ist aber $\Delta P = -\Delta p$ für $p = 90°$, mithin wird die Correction des Positionswinkels unter Voraussetzung des scheinbaren Parallels:

$$\Delta p = -\frac{\varkappa \, tang^2 \, z_0}{sin \, 1'} \left(sin \, (p - \eta) \, cos \, (p - \eta) - sin \, \eta \, cos \, \eta\right).$$

Will man nicht den beobachteten Positionswinkel und die Distanz, sondern erst die daraus berechneten Unterschiede in A R. und Declination von Strahlenbrechung befreien, so hat man, wie unmittelbar ersichtlich:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = sin \, p \, sec \, \delta_0 \frac{ds}{15} + \frac{s}{15} cos \, p \, sec \, \delta_0 \, dp \, sin \, 1' + \frac{s}{15} sin \, p \, tang \, \delta_0 \, sec \, \delta_0 \, d\delta$$
$$\Delta(\delta' - \delta) = cos \, p \, ds - s \, sin \, p \, dp \, sin \, 1'$$

oder nach Einsetzung der obigen Werthe

$$\text{W. P.} \begin{cases} \Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{\varkappa s}{15} sec \, \delta_0 \left(sin \, p - tang \, \delta_0 \, cos \, p \, tang \, z_0 \, sin \, \eta + tang^2 \, z_0 \, cos \, (p - \eta) \, sin \, \eta \right. \\ \qquad \left. - \, tang \, z_0 \, tang \, \delta_0 \, sin \, p \, cos \, \eta\right) \\ \Delta(\delta' - \delta) = \varkappa s \left(cos \, p + tang \, z_0 \, tang \, \delta_0 \, sin \, p \, sin \, \eta + tang^2 \, z_0 \, cos \, (p - \eta) \, cos \, \eta\right) \end{cases}$$

$$\text{Sch. P.} \begin{cases} \Delta(\alpha' - \alpha) = \frac{\varkappa s}{15} sec \, \delta_0 \left(sin \, p + tang^2 \, z_0 \, cos \, (p - \eta) \, sin \, \eta + tang^2 \, z_0 \, sin \, \eta \, cos \, \eta \, cos \, p \right. \\ \qquad \left. - \, tang \, z_0 \, tang \, \delta_0 \, sin \, p \, cos \, \eta\right) \\ \Delta(\delta' - \delta) = \varkappa s \, cos \, p \left(1 + tang^2 \, z_0 \, cos^2 \, \eta\right). \end{cases}$$

Die beiden Ausdrücke für $\Delta(\alpha' - \alpha)$ vereinfachen sich, wenn man bei der Berechnung von $\alpha' - \alpha$ aus dem beobachteten Positionswinkel und der Distanz die wahre Declination δ_0 anwendet, in welchem Falle das letzte Glied in der Klammer wegfällt.

Der parallaktische Winkel wird nach dem Früheren gefunden aus

$$tang \, \eta = cotang \, n \, sec \, (N + \delta).$$

Beispiel. Strassburg Gr. Refr. 1886 Mai 7. A. f. Beob. KOBOLD.

☄ Brooks II südlich von ✱ $9^m{\cdot}5$ (B. D. $36°{\cdot}5080$) $23^h \, 28^m \, 18^s + 36° \, 53'{\cdot}4$

Wahrer Parallel $357° \, 55'{\cdot}0$

	Uhrzeit	Pos.-Kr.	Uhrzeit	Schraube	Coinc.	
				u	u	u
	$16^h \, 31^m \, 14^s$	192° 25'·5	$16^h \, 36^m \, 47^s$	19·126	15·005	14·910
	32 59	190 19·5	38 17	18·722	·006	·912
	34 32	190 52·0	39 36	18·413	·008	·908
	35 34·5	192 17·5	40 42·5	18·090	·010	·910
Mittel	16 33 34·9	191 28·6	42 1·5	17·715	15·0072	14·9100
	16 44 21	183 46·5	43 8	17·477		
	45 16	181 5·5	16 40 5·3	18·257		
	46 14·5	179 52·0	Coinc.	14·959		
	47 9·5	175 36·0	Dist.	3·298		
Mittel	16 45 45·2	180 5·0		= 74''·55		

Hiernach kann vorläufig angenommen werden

$$\left.\begin{array}{l} p = 187^\circ 28' \\ s = 74''\!\cdot\!55 \end{array}\right\} \text{für } t_0 = 16^h 40^m 5^s\!\cdot\!3 \qquad \delta_0 + 36^\circ 53'$$

und damit ergiebt sich

$\log \sin p$	$9{\cdot}1138_n$
$\log s$	$1{\cdot}8725$
$\log \cos p$	$9{\cdot}9963_n$

Bew. in 1^m in α	$+2''{\cdot}60$
„ „ „ „ δ	$+5{\cdot}43$
$\log e$	$0{\cdot}4150$
$\log \cos \delta_0$	$9{\cdot}9030$
$\log e \cos \delta_0$	$0{\cdot}3180$
$\log (t_1 - t_0)$	$0{\cdot}8134_n$
$\log (t_2 - t_0)$	$0{\cdot}7532$
$\log e'$	$0{\cdot}7348$

	1. Satz der Pos.-W.	2. Satz der Pos.-W.
x_0	$-9''{\cdot}69$	$-9''{\cdot}69$
$e \cos \delta_0 (t - t_0)$	$-13{\cdot}53$	$+11{\cdot}78$
y_0	$-73{\cdot}92$	$-73{\cdot}92$
$e'(t - t_0)$	$-35{\cdot}33$	$+30{\cdot}76$
$\log x$	$1{\cdot}3659_n$	$0{\cdot}3201$
$\log y$	$2{\cdot}0384_n$	$1{\cdot}6351_n$
	$9{\cdot}9904_n$	$9{\cdot}9995_n$
p	$192^\circ\ 0'{\cdot}0$	$177^\circ 13'{\cdot}7$
B	$193\ 33{\cdot}6$	$182\ 10{\cdot}0$
$B - R$	$+1\ 33{\cdot}6$	$+4\ 56{\cdot}3$
$\log \sin$	$8{\cdot}4350$	$8{\cdot}9349$
$\log s$	$2{\cdot}0480$	$1{\cdot}6356.$

Gleichungen zur Bestimmung von dx und dy

$$(9{\cdot}9891_n)dx + (9{\cdot}3448)\,dy = (0{\cdot}4830)$$
$$(9{\cdot}1138_n)dx + (9{\cdot}9963_n)dy = 0$$
$$(0{\cdot}0000_n)dx + (7{\cdot}7226_n)dy = (0{\cdot}5705)$$

Normalgleichungen:

$$(0{\cdot}2941)dx + (8{\cdot}9138_n)dy = (0{\cdot}8254_n)$$
$$(8{\cdot}9138_n)dx + (0{\cdot}0136)\,dy = (9{\cdot}8149)$$

$\log dx$ $0{\cdot}5294_n$ $\log dy$ $9{\cdot}5610$

dx $-3{\cdot}38$ dy $+0{\cdot}36$

Uebrig bleibende Fehler $+0''{\cdot}34$ $+0''{\cdot}08$ $-0''{\cdot}34$

$x_0 + dx = -13''{\cdot}07$

$y_0 + dy = -73{\cdot}56$

$\log x$	$1{\cdot}1163_n$
$\log \cos \delta_0$	$9{\cdot}9030$
$\log x \sec \delta_0$	$1{\cdot}2133_n$
$\log 15$	$1{\cdot}1761.$

Refractionsberechnung:

St.-Zt.	$16^h\ 28^m$
α	$23\ 28$
t	$17\ 0$
N	$-12^\circ 52'$
δ_0	$+36\ 53$
$N + \delta_0$	$+24\ 1$
$\log \sin (N + \delta_0)$	$9{\cdot}6096$
$\log \sin n$	$9{\cdot}8860$
$\log \mathrm{cotang}\, n$	$9{\cdot}9194_n$
$\log \cos (N + \delta_0)$	$9{\cdot}9607$
z_0	$71^\circ 46'$
$\log \varkappa_0$	$6{\cdot}4297$
$\log B (754^{mm})$	$+14$
$\log T (+11^\circ)$	-8
$\log \gamma (+8^\circ)$	$+20$

η	$-42^\circ{\cdot}3$
p	$187{\cdot}5$
$p - \eta$	$229{\cdot}8$
$\log \sin \eta$	$9{\cdot}828_n$
$\log \cos (p - \eta)$	$9{\cdot}810_n$
$\log \cos \eta$	$9{\cdot}869$
$\log \cos p$	$9{\cdot}996_n$
$\log \sin p$	$9{\cdot}116_n$
$\log \mathrm{tang}\, z_0$	$0{\cdot}482$
$\log \mathrm{tang}\, \delta_0$	$9{\cdot}875$
$\log \varkappa$	$6{\cdot}432$
$\log s$	$1{\cdot}872$

$\log \mathrm{tang}\, z_0 \mathrm{tang}\, \delta_0$	$0{\cdot}357$
$\log \sin \eta \cos p$	$9{\cdot}824$
$\log \sin \eta \sin p$	$8{\cdot}944$
$\log \mathrm{tang}^2 z_0$	$0{\cdot}964$
$\log \sin \eta \cos (p - \eta)$	$9{\cdot}638$
$\log \cos \eta \cos (p - \eta)$	$9{\cdot}679_n$
$\sin p$	$-0{\cdot}13$
	$-1{\cdot}52$
	$+4{\cdot}00$
$\cos p$	$-0{\cdot}99$
	$+0{\cdot}20$
	$-4{\cdot}40$
	$0{\cdot}371$
$\log \varkappa s$	$8{\cdot}304$
	$0{\cdot}715_n$
	$8{\cdot}675$
$\log \cos \delta_0$	$9{\cdot}903$

Der Ort des Sternes ergab sich durch Anschluss an ROMBERG's Katalog 5536 und LUND Zonen 301, 309:

		M. A. 1886·0	$23^h\,28^m\,16^s{\cdot}97$	$+36°\,55'\,0''{\cdot}4$
		Red. a. sch. A.	$+\,0{\cdot}25$	$-8{\cdot}8$
		und daraus		
Uhrzeit	$16^h\,40^m\;5^s{\cdot}3$			
ΔU	$-\,12\;\;17{\cdot}4$			
St. Zt.	16 27 47·9			
St. Zt. i. m. M.	3 0 55·4			
Diff.	13 26 52·5	☄ — ✱ —	$0^m\,1^s{\cdot}090$	$-1'\,13''{\cdot}56$
Red. a. m. Zt.	$-\,2\;\;12{\cdot}2$	Refr. +	0·004	$-0{\cdot}10$
		✱	23 28 17·22	+36 54 51·6
1886 Mai 7	$13^h\,24^m\,40^s{\cdot}3$	M. Zt. Str.	23 28 16·13	+36 53 37·9
		log f. par.	$9{\cdot}676_n$	0·795

Einfluss der Gattung des Lichtes auf den relativen Ort zweier Sterne.

Bei der Berechnung der Einwirkung der Strahlenbrechung auf den relativen Ort zweier Sterne ist im Vorigen angenommen worden, dass die Refractionsconstante für beide Sterne dieselbe ist. Die Brechung des Lichtes in der Atmosphäre der Erde hängt aber auch von seiner Wellenlänge ab und wird daher verschieden sein, wenn der eine Stern Licht von wesentlich anderer Wellenlänge emittirt, als der andere, oder wenn gewisse Farbentöne in dem Spectrum des einen, andere in dem des zweiten vorwiegen. Um den Einfluss, den eine Verschiedenheit der Wellenlänge auf die Refractionsconstante hervorbringt, näher zu ersehen, differenzire man den Ausdruck derselben $\frac{c\rho}{1+2c\rho}$, wo ρ die Dichtigkeit der Luft und c eine Constante ist, die mit dem Brechungsindex der Luft μ in der Verbindung $\mu^2 - 1 = 2c\rho$ steht, dann erhält man sehr nahe

$$\delta\varkappa = \frac{d\mu}{\mu - 1}\,\varkappa.$$

Setzt man hierin beispielshalber $\varkappa = 57''{\cdot}7$, und nimmt für μ den Brechungsexponenten, welcher der Wellenlänge der FRAUNHOFER'schen Linie B (0·687) entspricht, 1·0002911, so wird die Aenderung $\delta\varkappa$ für die Wellenlänge von D (0·589) $\delta\varkappa = \frac{0{\cdot}0000011}{0{\cdot}00029}\,57{\cdot}7 = 0''{\cdot}22$. Wird nun auch eine solche Differenz mit Rücksicht auf die thatsächlichen Verhältnisse in der Zusammensetzung des Sternlichts als eine extreme bezeichnet werden müssen, so ist auf der anderen Seite zu beachten, dass im Gegensatz zu der differentiellen Refraction eine Verschiedenheit in der Refractionsconstante mit dem Factor $tang\,z$ multiplicirt in das Resultat übergeht, und zwar unabhängig von dem Abstand der beiden Sterne. Man findet aus den früheren Entwicklungen sogleich die Verbesserung in AR. und Declination:

$$\Delta[\cos\delta(\alpha' - \alpha)] = -\frac{\delta\varkappa}{15}\,tang\,z\,\sin\eta$$
$$\Delta(\delta' - \delta) = -\,\delta\varkappa\,tang\,z\,\cos\eta$$

und in Polarcoordinaten

$$s\,\Delta p\,\sin 1' = \delta\varkappa\,tang\,z\,\sin(p - \eta)$$
$$\Delta s = -\,\delta\varkappa\,tang\,z\,\cos(p - \eta).$$

Da die Grösse $\delta\varkappa$ im Allgemeinen nicht wohl auf directem Wege bestimmt werden kann, so wird es sich bei allen feineren Untersuchungen, wo man aus den beobachteten Werthen des relativen Ortes zweier Sterne Schlüsse ziehen will, insbesondere bei Parallaxenbestimmungen und bei der Verwerthung von Doppel-

sternmessungen, empfehlen, hypothetische Glieder von der obigen Form in die Rechnung einzuführen. Man vergleiche hierüber A. A. RAMBAUT, »On the Effect of Atmospheric Dispersion on the position of a star«[1]).

Systematische Beobachtungsfehler bei Doppelsternmessungen.

Wie bei allen astronomischen Beobachtungen neben den zufälligen systematische Beobachtungsfehler auftreten, d. h. Fehler, welche unter denselben Umständen in demselben Sinne und nahe demselben Betrage wiederkehren und durch Vermehrung der Anzahl der Messungen Seitens desselben Beobachters nicht herabgedrückt werden, so gilt dies in hohem Grade auch für die Messungen der Positionswinkel und der Distanzen nahe stehender Sterne; dieselben haben bei den Doppelsternmessungen eine um so grössere Bedeutung, als sie bei der relativ langsamen Bewegung und der kurzen Zeit, seit welcher genauere Beobachtungen vorliegen, für die Bestimmung ihrer Bahnen sehr verhängnissvoll sein können. Die Anregung zu einem eingehenderen Studium dieser Fehler ist WILHELM STRUVE zu verdanken, dem Altmeister auf dem Gebiet der Doppelsternbeobachtungen, der theils durch Vergleichung eigener, nach verschiedenen Methoden angestellten Beobachtungen, theils durch Nebeneinanderstellen seiner Resultate mit denen anderer Beobachter zuerst die Aufmerksamkeit der Astronomen auf das Vorhandensein constanter oder systematischer Unterschiede lenkte und auch einen Weg zu ihrer Ermittlung angab. Seit jener Zeit hat die Untersuchung dieser Fehler einen breiten Raum in der Doppelsternastronomie eingenommen, und wenn es gleich hier nicht möglich ist, ins Einzelne darüber einzutreten, so mögen bei der Wichtigkeit des Gegenstandes kurz die Methoden erwähnt werden, welche für diese Zwecke vorgeschlagen und angewandt worden sind. Sie zerfallen in zwei Gruppen, je nachdem die Fehler durch directe Messungen an natürlichen Doppelsternen studirt oder aus Beobachtungen künstlich nachgeahmter Objecte eruirt werden.

Der auch um die Doppelsternastronomie hochverdiente Engländer DAWES hat, wie es scheint zuerst (1834), auf den Einfluss aufmerksam gemacht, den die Richtung des die beiden Componenten verbindenden Bogens oder der Positionswinkel auf die Messung ausübt, und daher vorgeschlagen, mittelst eines total reflectirenden Prismas die beiden Sterne stets parallel oder senkrecht gegen die vertical gehaltene Medianebene (Mittelebene der Symmetrie) des Kopfes zu stellen. Ist kein Prisma vorhanden, so empfiehlt es sich, den Kopf so zu neigen, dass die Objecte scheinbar horizontal oder vertical liegen, was, da es sich hierbei um Neigungen von höchstens 45° handelt, ohne erhebliche Muskelanstrengung möglich ist. Das Verfahren kann freilich zunächst nur bezwecken, eine grössere Gleichförmigkeit in den Messungen, besonders der Positionswinkel herbeizuführen; es ist aber nicht unwahrscheinlich, dass es noch mehr leistet, da man im gewöhnlichen Leben es vorwiegend mit verticalen und horizontalen Linien zu thun hat und in der Beurtheilung ihrer Lage mehr oder weniger eingeübt ist[2]). Anstatt den Einfluss der Lage des Sternpaars gegen die Verticale auf diese Weise zu eliminiren, kann man denselben auch dadurch ermitteln, dass man dieselben Paare in möglichst verschiedenen Stundenwinkeln ausmisst. Werden hierzu, wie es von O. STRUVE und v. DEMBOWSKI vorgeschlagen und von einer Anzahl von Astronomen ausgeführt ist, von den verschiedenen Beobachtern dieselben Paare

[1]) Monthly Notices, Vol. LV.

[2]) Vergl. H. STRUVE, Beobachtungen des Neptunstrabanten am 30zölligen Pulkowaer Refractor.

gewählt, so wird dadurch zugleich ein schätzbares Material zur Untersuchung der Unterschiede der Beobachter unter einander gewonnen.

Zur Bestimmung des absoluten systematischen Fehlers der Positionswinkel hat O. STONE vorgeschlagen, dieselben Paare mittelst sehr verschiedener Vergrösserungen zu messen. Ist P der beobachtete, p der wahre Positionswinkel, V der Winkel, unter dem das Bild des Doppelsterns bei der Vergrösserung M dem Beobachter erscheint, mithin gleich Distanz × Vergrösserung, so setzt STONE[1])

$$P = p + \frac{a}{V} \sin 2P + \frac{b}{V} \cos 2P;$$

für eine Vergrösserung m würde, da $v = V \cdot \frac{m}{M}$, die Gleichung werden:

$$P' = p + \frac{a}{v} \sin 2P' + \frac{b}{v} \cos 2P'$$

so dass, unter Anwendung von mindestens drei verschiedenen Vergrösserungen, p, a und b bestimmt werden können. Das Verfahren beruht aber auf zwei Voraussetzungen, die nicht ohne Weiteres zugelassen werden können, der einen, dass der Fehler umgekehrt proportional der Vergrösserung, der anderen, dass er der gleiche ist für P und $180 + P$. Mehr Zutrauen verdient in dieser Hinsicht der zweite von O. STONE vorgeschlagene Ausdruck

$$P = p + \frac{a}{V} + \frac{b}{V^2} + \frac{c}{V^3} + \ldots,$$

wo die p, a, b, . . in ähnlicher Weise und für gewisse Hauptrichtungen bestimmt werden müssen.

Ein anderes Verfahren zur Ermittelung der absoluten Fehler basirt auf der Annahme, dass selbige ihren systematischen Charakter verlieren und als zufällige Fehler behandelt werden können, wenn man Messungen von sehr vielen Beobachtern combinirt. Man wird dann die für benachbarte Werthe der Distanz und des Positionswinkels gebildeten Mittelwerthe als nahe fehlerfrei betrachten dürfen und aus ihrer Vergleichung mit den Einzelmessungen, welche bei vorhandener Bahnbewegung mittelst einer vorläufigen Ephemeride oder einer Interpolationsformel auf denselben Zeitpunkt übertragen werden, die Fehler der einzelnen Beobachter ableiten können[2]).

Die directe Bestimmung der systematischen Beobachtungsfehler durch Messungen an künstlichen Doppelsternen ist zuerst von W. STRUVE und in noch umfassenderer Weise von O. STRUVE versucht worden. Der Apparat des letzteren bestand aus einer nahe dreifüssigen schmiedeeisernen Platte, in welcher kleine Cylinder von Elfenbein, die in entsprechende Löcher eingefügt wurden, Doppelsterne markirten, wobei jedoch während der Beobachtung stets nur ein Doppelstern im Gesichtsfelde sichtbar war. Die Platte war um eine senkrechte Achse, welche auf das Beobachtungsfernrohr gerichtet wurde, drehbar, so dass jedem Doppelstern eine beliebige Neigung zum Verticalkreis gegeben werden konnte. Die Entfernungen der einzelnen Paare und die Winkel, welche die Verbindungslinie der Componenten mit einer gewissen Nullrichtung, die durch zwei an den Rändern der Platte befindliche Sterne gegeben war, einschloss, waren durch directe Messung auf der Scheibe ermittelt worden. Die jedesmalige Neigung jener Nullrichtung gegen die Verticale konnte wegen der grossen Entfernung der beiden

---

[1]) A. N. 2246.

[2]) G. V. SCHIAPARELLI, Osservazioni sulle stelle doppie. Pubblicazioni del Osservatorio di Brera in Milano No. XXXIII. — E. GROSSMANN, Untersuchung über systematische Fehler bei Doppelsternbeobachtungen. Göttingen 1892.

Endpunkte (nahe 1') mit Leichtigkeit und ohne merklichen systematischen Fehler durch Messung am Fernrohr bestimmt werden. Der Apparat war in geeigneter Weise und in einer Entfernung von beiläufig 8900 Fuss aufgestellt; die Messungen wurden meist zwischen Mittag und Sonnenuntergang, zum grösseren Theil bei Sonnenschein gemacht, wo die Aehnlichkeit der künstlichen Sterne mit den natürlichen am grössten war. Mittelst dieses Apparates hat O. STRUVE durch ausgedehnte Messungsreihen die gerade bei ihm stark ausgeprägten Fehler untersucht und durch interpolatorische Ausdrücke dargestellt. Indem für weitere Details auf die Arbeit selbst[1]) und auch auf das kritisch eingehende Referat von THIELE[2]) verwiesen werden muss, seien hier nur zwei Folgerungen erwähnt, die eine allgemeinere Gültigkeit beanspruchen dürften: 1) die Fehler der Richtungen hängen nicht direct von den Distanzen ab, sondern von dem Gesichtswinkel, unter welchem sich diese in den verschiedenen Ocularen (Vergrösserungen) darstellen. 2) die systematischen Fehler von Positionswinkel und Distanz können für jedes Paar dargestellt werden durch ein constantes Glied und ein oder mehrere andere Glieder, die sich nach gewissen Gesetzen mit der Richtung der Sterne zur Verticalen ändern.

G. BIGOURDAN[3]) hat zu demselben Zweck einen Apparat construirt, der von dem Apparat von O. STRUVE unter anderem auch darin sich unterscheidet, dass Mikrometer und künstliche Sterne mit einander verbunden sind und daher die Messungen zu jeder Zeit in einem geschlossenen Raume ausgeführt werden können. Ein Rohr von etwas über 7 Meter Länge, welches nach Art eines Passageninstruments um eine horizontale Achse drehbar ist, trägt an seinem einen Ende ein Fadenmikrometer, an dem anderen eine dünne Platte, die mit Löchern in verschiedenen Abständen von einander durchbohrt ist. In einer Entfernung von 6·5 Meter von der letzteren befindet sich eine achromatische Linse, durch welche von den durch eine Lampe beleuchteten feinen Oeffnungen Bilder in der Focalebene erzeugt werden, die dem Aussehen natürlicher Sterne bei guter Luft sehr nahe kommen. Die Helligkeit der Bilder lässt sich mittelst eines Doppelkeils aus dunklem und weissen Glase abschwächen; durch eine in das Rohr eingeführte Gasflamme kann künstlich eine grössere oder geringere Unruhe der Bilder erzeugt werden. Die Platte ist drehbar und der Drehungswinkel kann auf 0°·1 abgelesen werden; ausserdem kann der ganze Apparat — und dies ist ein nicht unwesentlicher Vorzug — bis zu einer gewissen Grenze, die sich bei etwas veränderter Construction noch weiter hinausschieben liesse, in verschiedene Zenitdistanzen gebracht werden.

Aus den von BIGOURDAN gefundenen Resultaten, welche sich nur auf die Positionswinkel erstrecken, seien, im übrigen mit Hinweis auf die Abhandlung selbst, die folgenden hervorgehoben: 1) die Unruhe der Bilder macht sich nur in der Vergrösserung des zufälligen Fehlers, nicht in der Aenderung des persönlichen Fehlers geltend. 2) Der persönliche Fehler als Function des von der Verticalen aus gezählten Positionswinkels befolgt bei der Höhe 0° und 60° einen parallelen Gang; 3) der Einfluss der Helligkeit ist bei gleich hellen Componenten Null, dagegen tritt eine Abhängigkeit von dem Unterschied der Helligkeiten beider Componenten deutlich hervor.[4])

---

[1]) Observations de Poulkova, Vol. IX.

[2]) V. J. S. der Astr. Ges., Bd. 15. Jahrgang.

[3]) G. BIGOURDAN, Sur l'équation personnelle dans les mesures d'étoiles doubles, — siehe auch V. J. S. d. Astr. Ges. 21. Jahrgang.

[4]) Ueber einen von HELMERT zur Untersuchung der Fehler der Positionswinkel benutzten, mit dem Beobachtungsfernrohr (in nahe horizontaler Stellung) verbundenen Apparat vergleiche:

Wenn nun auch das bisher auf diesem Gebiet gesammelte Material noch nicht genügt, um Schlüsse von allgemeiner Gültigkeit daraus abzuleiten, so steht doch soviel fest, dass die Hauptursache der systematischen Fehler physiologischer Natur ist und mit der Stellung und den Bewegungen des Auges zusammenhängt, während die begleitenden Umstände, die Helligkeit der Bilder und selbst ihre Helligkeitsdifferenz, ihre Ruhe und Schärfe u. a. von untergeordneter Bedeutung sind. Um so mehr erwächst daraus die Forderung, die Messungen in einer ungezwungenen Kopfhaltung zu machen und die Bilder durch ein Prisma stets in dieselbe Lage zur Medianebene zu bringen. Wahrscheinlich ist die ausgezeichnete Uebereinstimmung, welche KAISER in Leiden bei seinen Doppelsternmessungen 1865—1867 an einem Faden- und einem AIRY'schen Doppelbild-Mikrometer erzielte, zu einem guten Theil der Benutzung eines Prismas zuzuschreiben. Auch dürfte bei der Beobachtung der Richtungen die Einstellung auf den Faden, wo sie ausführbar ist, den Vorzug verdienen[1]).

Beobachtungen der Satelliten.

Auf die Bestimmung des relativen Orts eines Trabanten zum Hauptkörper ist an dieser Stelle nur noch insoweit einzugehen, als es in einigen Fällen nothwendig wird, die Figur des Planeten und die Beleuchtungsphase zu berücksichtigen; das Beobachtungsverfahren selbst ist, bei Anwendung des Fadenmikrometers — und dieses ist neben dem nur für die hellen Begleiter des Jupiter und Saturn verwendbaren Heliometer der geeignetste Messapparat für derartige Beobachtungen — das gleiche, wie es im Vorhergehenden erörtert worden ist. Nur einige Bemerkungen seien hier noch vorausgeschickt. Man misst entweder Unterschiede in rechtwinkligen Coordinaten, wobei das Fadennetz nach der Richtung der täglichen Bewegung oder auch bei Planeten mit bekannter Achsenlage nach dem Aequator derselben orientirt wird, oder Positionswinkel und Distanzen; in letzterem Falle wird bei dem Hauptkörper die scheinbare Mitte eingestellt, im ersteren dürfte, namentlich bei grossem, scheinbaren Durchmesser, der Anschluss an die Ränder vorzuziehen sein. In allen Fällen sind die Beobachtungen möglichst so anzuordnen, dass das Mittel der Zeiten für beide Coordinaten nahe gleich und daher die etwaige Zeitreduction klein wird. Wenn die beiden Objecte nicht gleichzeitig, sondern nach einander beobachtet werden, wie bei Durchgangsbeobachtungen bei ruhendem Fernrohr, so ist bei der Reduction die Bewegung des Systems in Rechnung zu bringen. Sind ϑ und Θ die Sternzeiten des Durchgangs des Begleiters und des Hauptkörpers durch den Stundenfaden, λ und λ' die Zunahme der AR. und Declination des letzteren in einer Secunde Sternzeit, so wird für die Zeit ϑ der Unterschied in Rectascension $\alpha - A = (\vartheta - \Theta)(1 - \lambda)$ und für dieselbe Zeit der Declinationsunterschied $\delta - D = d - (\vartheta - \Theta)\lambda'$, wenn d die durch Einstellung der beiden Objecte bei ihrem Durchgang durch den Stundenfaden gemessene Differenz ist. Wenn die Satelliten sehr schwach sind, so kann es sich nothwendig erweisen, das Licht des Hauptkörpers in geeigneter Weise abzuschwächen. So blendete BARNARD bei der sehr schwierigen Messung des V. Jupiterstrabanten im 36^z Fernrohr der Lick-Sternwarte das Licht des Planeten durch ein die Hälfte des Gesichtsfeldes bedeckendes Stück geschwärzten Glimmers ab und beobachtete mit hellen Fäden rechtwinklige Coordinaten, indem einmal

F. R. HELMERT, Der Sternhaufen im Sternbilde des SOBIESKI'schen Schildes. Publicationen der Hamburger Sternwarte No. I.

[1]) Vergl. auch H. SEELIGER, Ueber den Einfluss dioptrischer Fehler des Auges auf das Resultat astronomischer Messungen.

die Fäden parallel, das andere Mal senkrecht zum Aequator des Planeten gestellt und in beiden Richtungen die Abstände des Trabanten von den Rändern der Scheibe gemessen wurden. Ein ähnliches Verfahren wird bei schwachen Satelliten in Strassburg von KOBOLD befolgt. H. STRUVE brachte bei Beobachtungen des V. Jupiterstrabanten mit Hülfe der Ocularbewegung den Planeten aus dem um $\frac{1}{3}$ durch ein Diaphragma abgeblendeten Gesichtsfeld und benutzte das immer noch genügende Planetenlicht, um mit dunklen Fäden einzustellen. In solchen Fällen muss man wiederholt das Ocular hin und herbewegen, um abwechselnd die Einstellung auf den Planeten und den Trabanten zu prüfen.[1])

Um die Verbesserung, welche die unvollständige Beleuchtung der Planetenscheibe, bei der Ableitung des relativen Ortes des Satelliten zum Centrum des Planeten nothwendig macht[2]), zu übersehen, werde die Oberfläche des Planeten als ein abgeplattetes Rotationsellipsoïd mit den Hauptachsen $2a$ und $2b$ $(b < a)$ vorausgesetzt; ferner sei $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$, $a' = \frac{a}{\rho \sin 1''}$, wo ρ die Entfernung des Planeten von der Erde bezeichnet, β die geocentrische Breite des Planeten bezogen auf seine Aequatorebene, dann ist die scheinbare Figur des Planeten, d. h. die Figur seiner Projection auf eine zur Verbindungslinie Erde-Planet senkrechte Ebene eine Ellipse und ihre Gleichung, für auf ein durch ihren Mittelpunkt gelegtes rechtwinkliges System zweier Achsen, von denen die v-Achse nach dem Nordpol des Planeten gerichtet ist, lautet:

$$u^2 + \frac{v^2}{1 - e^2 \cos^2 \beta} = a'^2.$$

Diese Figur wird nur dann vollständig gesehen, wenn sie ganz erleuchtet ist; in allen anderen Fällen ist die sichtbare Figur des Planeten nur zur Hälfte durch jene Ellipse, zur anderen Hälfte durch eine andere Ellipse, nämlich durch die Projection der Lichtgrenze begrenzt. Bezeichnen λ die geocentrische Länge des Mittelpunktes des Planeten, gezählt von einer beliebigen Anfangsrichtung in der Ebene seines Aequators, λ' und β' seine heliocentrische Länge und Breite in Bezug auf dieselbe Ebene und denselben Anfang, so wird die Gleichung der Ellipse, welche die Lichtgrenze bestimmt, unter der Annahme, dass das auf den Planeten fallende Licht als von einem Punkte ausgehend angesehen werden kann und mit Vernachlässigung der Refraction:

$$\left(u \cos w - \frac{v \sin w}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}}\right)^2 + \left(u \sin w + \frac{v \cos w}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}}\right)^2 \sec^2 d = a'^2,$$

wo d und w durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$\tan \beta_1 = \frac{a}{b} \tan \beta \qquad \tan \beta_1' = \frac{a}{b} \tan \beta'$$

$$\cos d = \sin \beta_1 \sin \beta_1' + \cos \beta_1 \cos \beta_1' \cos (\lambda' - \lambda)$$

$$\sin d \sin w = \cos \beta_1' \sin (\lambda' - \lambda)$$

$$\sin d \cos w = \cos \beta_1 \sin \beta_1' - \sin \beta_1 \cos \beta_1' \cos (\lambda' - \lambda)$$

oder indem man setzt

---

[1]) Neben den directen Messungen geben auch die Ein- und Austritte der Satelliten aus dem Schattenkegel des Planeten, die Bedeckungen und Vorübergänge, ferner bei den Saturnssatelliten die Conjunctionszeiten oder die Zeiten, zu denen die Satelliten die verlängert gedachte Polarachse, oder die Tangenten, welche parallel zu derselben an die Kugel, den Ring oder die CASSINI'sche Theilung gezogen werden, sehr wichtige Beobachtungsdaten ab.

[2]) S. BESSEL, Ueber die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe, Astr. Unters. Bd. I.

$$tang\, \nu = \frac{tang\, \beta_1'}{cos\, \lambda' - \lambda}$$

$$tang\, w = \frac{tang(\lambda' - \lambda)\, cos\, \nu}{sin(\nu - \beta_1)} \qquad tang\, d = tang(\nu - \beta_1)\, sec\, w.$$

Man erkennt leicht die Bedeutung der hier eingeführten Grössen. Zieht man gerade Linien von dem Mittelpunkt des Planeten nach Erde und Sonne und fällt von den Punkten, in denen sie die Oberfläche des Planeten schneiden, Perpendikel auf die Ebene seines Aequators, so sind $-\beta_1$ und $-\beta_1'$ die Breiten der dadurch auf die umschriebene Kugel projicirten Punkte; d ist der Bogen gr. Kr., welcher die beiden Punkte auf der Kugel mit einander verbindet, und w der Winkel, den derselbe mit dem Meridian des ersteren einschliesst. Nun ist die Senkrechte vom Centrum der Scheibe auf die Tangente, ausgedrückt durch den Winkel, den sie mit der Polarachse einschliesst, für die erste Ellipse

$$s = a' \sqrt{sin^2 \vartheta + (1 - e^2 cos^2 \beta)\, cos^2 \vartheta}$$

oder wenn p und P den Positionswinkel der Senkrechten und der Polarachse bezeichnen und $e = sin\, \varepsilon_0$, $sin\, \varepsilon_0\, cos\, \beta = sin\, \varepsilon$ gesetzt wird

$$s = a' \sqrt{1 - sin^2 \varepsilon\, cos^2(p - P)}.$$

Für die Senkrechte auf die Tangente an die Lichtgrenze erhält man:

$$s' = a' \sqrt{1 - sin^2 \varepsilon\, cos^2 (p - P)}\, \sqrt{1 - sin^2 d\, cos^2 (p' - w)}.$$

wo p' durch die Gleichung $tang\, p' = tang\, (p - P)\, sec\, \varepsilon$ bestimmt wird.

Setzt man noch

$$sin\, \varepsilon\, cos\, (p - P) = sin\, \chi$$
$$sin\, d\, cos\, (p' - w) = sin\, \psi,$$

so folgt als Reduction auf die Mitte bei Einstellung des Fadens auf den vollerleuchteten Rand

$$\pm\, a'\, cos\, \chi$$

und bei Einstellung des Fadens auf die Lichtgrenze

$$\mp\, a'\, cos\, \chi\, cos\, \psi \quad \text{oder} \quad \mp\, a'\, cos\, \chi \pm 2a'\, cos\, \chi\, sin^2 \tfrac{1}{2}\psi,$$

mithin beträgt die Correction, welche wegen der Phase an das Mittel der Berührungen der beiden Ränder mittelst des Fadens anzubringen ist

$$\pm\, a'\, cos\, \chi\, sin^2 \tfrac{1}{2}\psi.$$

Misst man nun Coordinatenunterschiede bezogen auf zwei durch das Planetencentrum parallel zu dem polaren und äquatorealen Durchmesser gelegte Achsen, so wird

im ersteren Falle $p - P = 90$ $\qquad \chi = 0 \qquad sin\, \psi = sin\, d\, sin\, w,$

im letzteren Falle $p - P = 0$ $\qquad sin\, \chi = sin\, \varepsilon \qquad sin\, \psi = sin\, d\, cos\, w.$

Werden dagegen AR. und Decl.-Unterschiede gemessen, so berechnen sich die Hülfswinkel aus den Gleichungen:

AR.	Decl.
$sin\, \chi = sin\, P\, sin\, \varepsilon$	$sin\, \chi = cos\, P\, sin\, \varepsilon$
$tang\, p' = cotang\, P\, sec\, \varepsilon$	$tang\, p' = -\, tang\, P\, sec\, \varepsilon$
$sin\, \psi = sin\, d\, cos\, (p' - w)$	$sin\, \psi = sin\, d\, cos\, (p' - w)$

und die Reduction auf die Mitte beträgt für erstere $\pm \dfrac{a'\, cos\, \chi}{15\, cos\, \delta}$ bezw. $\mp \dfrac{a' cos\, \chi\, cos\, \psi}{15\, cos\, \delta}$, für letztere $\pm\, a'\, cos\, \chi$ bezw. $\mp\, a'\, cos\, \chi\, cos\, \psi$. Ist die AR.-Differenz nicht mittelst der Schraube, sondern aus Durchgängen bestimmt, so wird im Nenner der vorstehenden Ausdrücke noch der Factor $(1 - \lambda)$ hinzuzutreten haben, wo λ wie oben die Zunahme der Rectascension in einer Secunde Sternzeit bedeutet.

Die im Vorigen gebrauchten Grössen λ, β, λ', β', P lassen sich leicht aus dem geocentrischen und heliocentrischen Ort des Planeten und der Lage seiner Aequatorebene berechnen. Bezeichnen n die Länge des aufsteigenden Knotens des Planetenäquators auf dem Himmelsäquator, i gegenseitige Neigung, α und δ die geocentrische Rectascension und Declination des Planeten, so folgen λ, β und P, wenn man erstere Grösse von jenem Knoten aus zählt, aus den Gleichungen:

$$\sin\beta = \sin\delta\cos i - \cos\delta\sin i\sin(\alpha - n) \qquad \cos\beta\sin P = -\sin i\cos(\alpha - n)$$
$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin i + \cos\delta\cos i\sin(\alpha - n) \qquad \cos\beta\cos P = \cos i\cos\delta + \sin i\sin\delta\sin(\alpha - n)$$
$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos(\alpha - n)$$

Man kann dieselben drei ersten Gleichungen benutzen, um aus der heliocentrischen Rectascension und Declination des Planeten λ' und β' abzuleiten. Da aber in den Ephemeriden in der Regel nur die heliocentrischen Längen und Breiten gegeben werden, so ist es zweckmässiger, von der Lage des Planetenäquators in Bezug auf die Ekliptik auszugehen. Sind n' und i' dasselbe für die letztere, was n und i für den Aequator, ferner ε die Schiefe der Ekliptik und q der Bogen auf dem Planetenäquator vom aufsteigenden Knoten auf dem Himmelsäquator bis zum aufsteigenden Knoten auf der Ekliptik, so hat man:

$$\sin\tfrac{1}{2}i'\sin\frac{n'+q}{2} = \sin\tfrac{1}{2}n\sin\frac{i+\varepsilon}{2}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}i'\cos\frac{n'+q}{2} = \cos\tfrac{1}{2}n\sin\frac{i-\varepsilon}{2}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i'\sin\frac{n'-q}{2} = \sin\tfrac{1}{2}n\cos\frac{i+\varepsilon}{2}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i'\cos\frac{n'-q}{2} = \cos\tfrac{1}{2}n\cos\frac{i-\varepsilon}{2}$$

und darauf, wenn l und b die heliocentrischen Ekliptikalcoordinaten des Planeten bezeichnen,

$$\sin\beta' = \sin b\cos i' - \cos b\sin i'\sin(l - n')$$
$$\cos\beta'\sin(\lambda' - q) = \sin b\sin i' + \cos b\cos i'\sin(l - n')$$
$$\cos\beta'\cos(\lambda' - q) = \cos b\cos(l - n'),$$

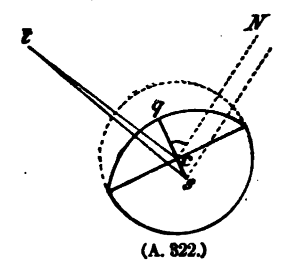
welche Gleichungen, ebenso wie auch die vorhergehenden, für die logarithmische Rechnung in bekannter Weise durch Einführung eines Hülfswinkels umgeformt werden.

Da bei Saturn die Phase fast unmerklich ist und kaum einige hundertel Secunden erreicht, so bleibt Jupiter als einziger Planet mit starker Abplattung, für welchen die übrigens auch nur $\frac{1}{2}''$ im Maximum betragende Phase nach den obigen Formeln zu berechnen ist. Indessen kann hier, unbeschadet der Genauigkeit, die Rechnung erheblich abgekürzt werden, indem mit Rücksicht auf die geringe Neigung des Aequators des Planeten und seiner Bahn gegen die Ekliptik ($2^\circ\!\cdot\!1$ bezw. $1^\circ\!\cdot\!3$) $w = 90$, $d = \lambda' - \lambda$, $\lambda' = l$ angenommen und λ und P aus den obigen Gleichungen berechnet werden, nachdem darin $n = 0$ gesetzt und statt i, ε substituirt worden ist.

Für den Planeten Mars vereinfachen sich die Ausdrücke dadurch, dass wegen seiner geringen, bisher noch nicht ganz zweifellos nachgewiesenen Abplattung $e = 0$ gesetzt werden darf. In der Regel wird man sich hier der Methode der Positionswinkel und Distanzmessungen bedienen, indem man die scheinbare Planetenscheibe durch den Faden in zwei gleiche Theile zerlegt[1]). Die Verbesserungen, welche in

[1]) Siehe u. a. A. HALL, Observations and orbits of the satellites of Mars. Washington 1878.

diesem Falle an die gemessenen Coordinaten anzubringen sind, ergeben sich aus folgender Erwägung. Der Faden geht bei dieser Art der Einstellung stets durch den Schwerpunkt der erleuchteten Fläche; der Schwerpunkt liegt aber auf der Senkrechten, welche in der Mitte der Hörnerlinie errichtet wird und zwar in einem Abstand (nach dem vollbeleuchteten Rande zu) $m = \frac{8a' \sin^2 \frac{1}{2} d}{3\pi}$, wo d wie oben den Winkel am Planeten zwischen den Richtungen nach Sonne und Erde bedeutet. Ist also Q der Positionswinkel der grössten Phase oder des grössten Lichtdefectes, so hat man (s. Fig. 322) unmittelbar als Reduction der vom Schwerpunkt s aus gemessenen Grössen auf den Mittelpunkt c:



(A. 322.)

$$\Delta s'' = -m \cos(p - Q)$$
$$\Delta p^\circ = \frac{m \sin(p - Q)}{s \sin 1^\circ}.$$

Q wird aber gleich w und kann zugleich mit d berechnet werden, wenn man in den Gleichungen (pag. 167) an Stelle von λ, β die geocentrische und statt λ' β' die heliocentrische Rectascension und Declination treten lässt. Bequemer wird die Rechnung durch die Ausdrücke

$$\cos g = \sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin g \sin Q = \cos D \sin(\alpha - A)$$
$$\sin g \cos Q = -\sin D \cos \delta + \cos D \sin \delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d = \frac{R}{r} \sin g,$$

worin α, δ, A, D die geocentrische AR. und Declination des Planeten bezw. der Sonne, r und R die Radienvectoren derselben, und g den Winkel zwischen Planet und Sonne bezeichnen. Der Winkel d ist bei den oberen Planeten stets ein spitzer. Zur Erleichterung der Rechnung können die Ephemeriden dienen, welche in den »Monthly Notices« für Satellitenbeobachtungen und für physische Beobachtungen der Planeten veröffentlicht werden.

Messungen auf einer Planetenscheibe.

Seitdem man angefangen hat, dem physischen Aussehen der Oberflächen der Planeten, ihrer Achsenstellung und Rotation eine erhöhte Aufmerksamkeit zu schenken, und insbesondere nachdem durch die klassischen Arbeiten SCHIAPARELLI's[1]) die Bedeutung einer genauen Topographie der Planeten dargethan ist, hat das Fadenmikrometer auch auf diesem Gebiet eine häufige Anwendung gefunden. Zwar lässt sich nicht verkennen, dass auch durch getreue Abbildungen nach dem Anblick im Fernrohr und nachfolgende Ausmessung mittelst geeigneter Diagramme Resultate von grosser Genauigkeit erlangt worden sind[2]), aber einerseits wird hier ein nicht geringes Maass von Geschick im Zeichnen verlangt und überdies dem Auftreten von persönlichen Fehlern ein weites Feld eingeräumt, und andererseits kann man der directen Messung am Fernrohr behufs Festlegung gewisser Hauptrichtungen doch nicht ganz entbehren. Am zweckmässigsten wird man beide Verfahren mit einander verbinden, indem

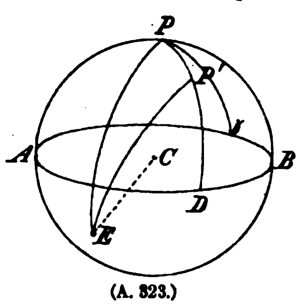
---

1) G. V. SCHIAPARELLI, Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte, fatte nella reale specola di Brera in Milano coll'equatoreale di MERZ durante l'opposizione del 1877 und die anschliessenden Memoria II, III, IV.

2) Vergl. u. a. die Arbeiten von KAISER im 3. Bd. der Annalen der Sternwarte in Leiden.

man die stärker hervortretenden Flecke und Merkmale gleichsam als Punkte 1. Ordnung mit aller durch directe Messung erreichbaren Genauigkeit ausmisst und in das daraus entstehende und orientirte Netz die schwächeren und zarteren Gestaltungen und Schattirungen nach dem Augenmaass einträgt. An dieser Stelle möge kurz das Verfahren der Messung erläutert werden, indem auf den Planeten Mars Bezug genommen wird. Es wird hierfür nöthig sein, von den Gleichungen auszugehen, welche zwischen der Lage der Planetenachse im Raume und der Lage, unter der sie von der Erde aus gesehen wird, bestehen; dieselben sind bereits oben (pag. 169) gegeben, sollen hier aber in theilweise anderer Form und Bezeichnung wiederholt werden.

Die Fig. 323 stelle eine um den Mittelpunkt C des Planeten beschriebene Kugel dar; ADB sei der grösste Kreis, den eine durch C dem Erdäquator parallel gelegte Ebene auf derselben ausschneidet, P der Nordpol des Erdäquators, P' der Nordpol des Aequators des Planeten, E der Punkt, in welchem ein von C nach dem Mittelpunkt der Erde gezogener Strahl die Kugel schneidet.



(A. 323.)

Bezeichnen dann ☊ und J die Länge des aufsteigenden Knotens des Planetenäquators auf dem Erdäquator und ihre gegenseitige Neigung (☊ = AR. des Nordpols des Planeten — 270°, $J = 90° -$ Decl. des Nordpols), α und δ die geocentrische Rectascension und Declination des Planeten, P den Positionswinkel der Planetenachse, i den Winkel, den die letztere (positiv gerechnet nach Norden) mit der Richtung Planet-Erde macht, oder die planetographische Nordpolardistanz der Erde, q den sogen. Polwinkel der Erde oder den Winkel am Nordpol des Planeten, der von den Declinationskreisen des Nordpols des Erdäquators und der Erde (E) gebildet wird, von jenem ab ostwärts gezählt — so ist

$$\gamma PD = \gamma AD = ☊ - 90^\circ \qquad EPP' = ☊ - \alpha + 90^\circ$$
$$PP' = J \qquad PEP' = -P$$
$$\gamma PE = 180^\circ + \alpha \qquad PP'E = q$$
$$PE = 90^\circ + \delta \qquad P'E = i,$$

mithin

$$\sin i \sin q = \cos\delta \cos(☊ - \alpha) \qquad \sin i \sin P = -\sin J \cos(☊ - \alpha)$$
$$\sin i \cos q = -\sin\delta \sin J + \cos\delta \cos J \sin(☊ - \alpha) \qquad \sin i \cos P = \cos J \cos\delta - \sin J \sin\delta \sin(☊ - \alpha)$$
$$\cos i = -\sin\delta \cos J - \cos\delta \sin J \sin(☊ - \alpha),$$

oder wenn

$$\tang N = \cotang \delta \sin(☊ - \alpha) \qquad \tang N' = -\tang J \sin(☊ - \alpha)$$

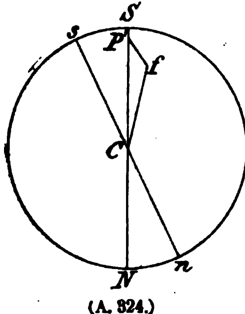
gesetzt werden

$$\tang q = \frac{\cotang(☊ - \alpha) \sin N}{\sin(N - J)} \qquad \tang P = \frac{\cotang(☊ - \alpha) \sin N'}{\cos(N' - \delta)}$$
$$\tang i = -\frac{\tang(N - J)}{\cos q}$$

Es ist klar und geht auch aus dem letzten Ausdruck hervor, dass die Lage der Planetenachse im Raume durch mindestens zwei zu verschiedenen Epochen gemessene Werthe des Positionswinkels P bestimmt wird. Da ☊ und J gegenwärtig sehr angenähert bekannt sind und es sich daher nur um kleine Verbesserungen und die Bestimmung etwaiger Präcessionsänderungen handeln kann, so genügt die Gleichung zwischen den Differentialen:

$$\frac{\cos q \sin J}{\sin i} d☊ - \frac{\sin q}{\sin i} dJ = dP.$$

Zur Bestimmung von P sind beim Planeten Mars die in der Nähe der Pole gelegenen Schneeflecke besonders geeignet. Ist C (Fig. 324) der Mittelpunkt der scheinbaren Marsscheibe, P' der Südpol des Planeten, ns die Nordsüdrichtung, f der südliche Polarfleck, λ sein Polabstand, ϑ seine von einem willkürlichen Anfangsmeridian und entgegengesetzt der Rotation gezählte Länge, w die von demselben Anfangspunkt gerechnete areographische Länge des Centralmeridians NCS für den Zeitpunkt, für welchen die Rechnung den Positionswinkel der Achse $P' = 180 + P$ und die Messung den Positionswinkel des Fleckes $= P_f$ ergeben habe, so folgt aus dem Dreieck $P'fC$



(A. 324.)

$$tang\,(P' + dP - P_f) = \frac{sin\,\lambda\, sin\,(\vartheta - w)}{cos\,\lambda\, sin\, i + sin\,\lambda\, cos\, i\, cos\,(\vartheta - w)}$$

oder da λ nur wenige Grade beträgt:

$$P_f - P' = dP + \lambda\, cos\,\vartheta\, sin\, w\, cosec\, i - \lambda\, sin\,\vartheta\, cos\, w\, cosec\, i,$$

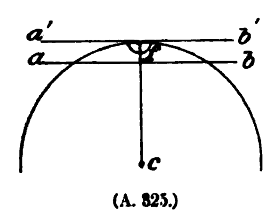
wofür man auch in den meisten Fällen setzen kam:

$$P_f - P' = dP + \lambda\, cos\,\vartheta\, sin\, w - \lambda\, sin\,\vartheta\, cos\, w.$$

Analog giebt der Nordpolarfleck

$$P_f - P = dP - \lambda\, cos\,\vartheta\, sin\, w + \lambda\, sin\,\vartheta\, cos\, w.$$

Da während einer Opposition des Planeten die Grössen λ und ϑ im allgemeinen als constant angenommen werden dürfen, so kann man aus einer grösseren Zahl von gemessenen Positionswinkeln des einen oder anderen Polarflecks die Unbekannten dP, $\lambda\, cos\,\vartheta$ und $\lambda\, sin\,\vartheta$ nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln. Die Messungen selbst können in verschiedener Weise ausgeführt werden. Nach dem einen Verfahren stellt man den Mikrometerfaden so auf die Scheibe, dass er durch den Mittelpunkt des Flecks geht und zugleich die Planetenscheibe in zwei gleiche Theile zerlegt. Der Faden geht dann in allen Fällen durch den Schwerpunkt der Fläche, der mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, wenn die Scheibe voll beleuchtet ist. Ist aber eine merkliche Phase vorhanden, so bedarf der auf diesem Wege abgeleitete, für den Nullpunkt des Kreises verbesserte Positionswinkel der bereits oben (pag. 170) abgeleiteten Correction $\Delta P_f = \frac{m\, sin\,(P_f - Q)}{s\, sin\, 1^\circ}$ worin s den Abstand des Flecks vom Centrum bezeichnet und die übrigen Zeichen die frühere Bedeutung haben. Nach dieser Methode wurde unter Anderen von HALL beobachtet. SCHIAPARELLI schlug einen anderen Weg ein. Er schnitt mit dem Faden ab (Fig. 325) ein sehr kleines Segment in der Weise ab, dass der Polarfleck f die Mitte edsselben einnahm und die beiden Theile af und fb einander gleich waren — oder er stellte den Faden $a'b'$ tangirend an denjenigen Punkt des Randes, welcher nach dem Augenmaass auf dem durch das Centrum des Polflecks gehenden Durchmesser lag[1]). Es darf hierbei aber die Phase nicht zu nahe an den Polfleck heranreichen, weil man sonst leicht in systematische Fehler verfällt.

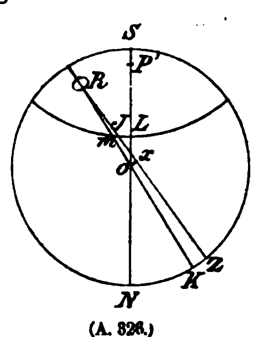


(A. 325.)

Um den planetographischen Ort irgend eines Punktes auf der Oberfläche zu bestimmen, beobachtet man die Zeit, zu welcher derselbe den centralen

1) SCHIAPARELLI, a. a. O., § 5.

Meridian der Scheibe passirt, und misst (oder schätzt) gleichzeitig den Abstand von der Mitte der Scheibe. Denn offenbar wird, wenn w die Länge des Centralmeridians in jenem Moment ist, w auch die gesuchte planetographische Länge des betreffenden Punktes sein, gezählt von dem bei der Berechnung von w zu Grunde gelegten Anfangsmeridian, und ferner wird, wenn μ den auf dem Centralmeridian gemessenen Abstand bezeichnet, die planetographische Poldistanz σ aus der Gleichung gefunden $\frac{\mu}{\rho} = \sin(i - \sigma)$ worin i, wie oben, die Poldistanz der Erde, d. i. der Mitte der Scheibe und ρ den Radius der letzteren bedeuten. Der Anfangspunkt der Längenzählung ist natürlich willkürlich; SCHIAPARELLI hat ihn bei seinen Marskarten in den von ihm Fastigium Aryn genannten, auf der Karte von MÄDLER mit a bezeichneten Punkt gelegt. Passirt dieser Punkt zur Zeit t_0 den Centralmeridian, so ist $w = 0$ und für jede andere Zeit erhält man die Länge des letzteren aus der Gleichung $w = \frac{360°}{U}(t - t_0) - (q_t - q_{t_0})$, wenn U die Rotationszeit und q_t und q_{t_0} die Polwinkel der Erde zu den betreffenden Zeiten sind. Bei der Berechnung von w ist die Lichtzeit zu berücksichtigen. Die unmittelbare Beobachtung des Durchgangs eines Punktes durch den Centralmeridian ist aber nicht wohl ausführbar, weil sich die Lage des letzteren auf der Planetenscheibe von vornherein nicht mit Sicherheit fixiren lässt. Man umgeht aber diese Schwierigkeit, wenn man nach dem Vorgange von SCHIAPARELLI[1]) einen Faden oder besser die Mittellinie eines Fadenpaars nahe in die Richtung bringt, welche die Mitte des Polarflecks R (Fig. 326) mit dem Mittelpunkt der Scheibe verbindet; sei diese Richtung ROK und die Richtung des Fadens RZ, so beobachte man einmal die Zeit des Durchganges des Flecks durch letzteren bei J und messe oder schätze ferner den Abstand J von dem Punkte x, in welchem eine Senkrechte von o den Faden trifft.



(A. 326.)

Da die Winkel ROS und ORx sehr klein sind, so kann unmittelbar $Jx = LO = \mu$ angenommen werden, dagegen kann die Zeit des Erscheinens des Flecks bei J von der Zeit des Durchganges durch den Centralmeridian bei L um eine merkliche Grösse verschieden sein, deren Betrag sich leicht auf folgende Weise ergiebt. Wird der Positionswinkel der Achse mit P' bezeichnet, der Positionswinkel der am Mikrometer eingestellten Richtung $RZ = \pi$, und der Winkel $ROP' = \Pi$, $ORx = \varepsilon$ gesetzt, wo zur Bestimmung von Π die Gleichung dient:

$$\tang \Pi = \frac{-\sin\lambda \sin(\vartheta - w)}{\cos\lambda \sin i + \sin\lambda \cos i \cos(\vartheta - w)}$$

[ϑ, λ: Coordinaten des (südlichen) Schneeflecks] oder meist genügend

$$\Pi = -\lambda \sin(\vartheta - w),$$

und

$$\varepsilon = \pi - P' - \Pi,$$

so hat man $\quad JL = mL - mJ$ oder mit hinreichender Genauigkeit

$= \mu \sin \Pi - (\rho \sin i - \mu) \sin \varepsilon$ oder in Berücksichtigung der Kleinheit von ε und Π

$$= \mu \sin(\Pi + \varepsilon) - \rho \sin i \sin \varepsilon = \mu \sin(\pi - P') - \rho \sin i \sin \varepsilon.$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch den scheinbaren Radius des zugehörigen Parallels und erwägt, dass nach der trüheren Festsetzung die Längen von m

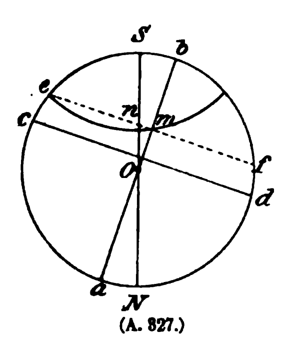
---

[1]) SCHIAPARELLI a. a. O., § 28.

nach L, entgegengesetzt dem Sinne der Rotation wachsen, so wird die areographische Länge des in J beobachteten Punktes

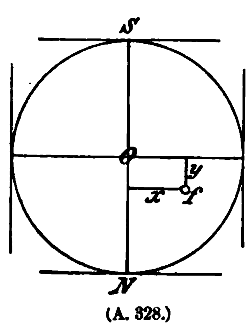
$$\vartheta = w - \frac{57^\circ{\cdot}296}{\sin\alpha}\left\{\frac{\mu}{\rho}\sin(\pi - P') - \sin i \sin \varepsilon\right\}.$$

SCHIAPARELLI hat noch eine zweite Methode[1]) angewandt, welche von dem Ort des Polflecks und seinen Aenderungen unabhängig ist. Stellt in Fig. 327 NS wieder den Centralmeridian dar, ab einen Faden in einer beliebigen, aber von NS nur wenig, höchstens einige Grade verschiedenen Richtung, so beobachte man den Zeitpunkt, wo das zu bestimmende Object sich bei m genau in der Mitte der Sehne ef befindet, welche dem auf ab senkrechten Faden cd parallel ist, und messe (oder schätze in Theilen des Halbmessers) den Abstand $om = \mu$ bezw. $\frac{\mu}{\rho}$. Mittelst dieser Daten findet man leicht aus der für diese Zeit geltenden planetographischen Länge w des Centralmeridians die Länge



(A. 327.)

des Flecks $\vartheta = w + \frac{\mu}{\rho}\frac{\sin(P' - \pi)}{\sin\sigma \sin 1^\circ}$ oder meist hinreichend genähert $\vartheta = w + \frac{\mu}{\rho}\frac{P' - \pi}{\sin\sigma}$ wo π den Positionswinkel der Richtung Ob bezeichnet; die planetographische Poldistanz σ folgt aus derselben Gleichung wie früher $\sin(i - \sigma) = \frac{\mu}{\rho}$, worin selbstverständlich i auf denselben Pol bezogen werden muss, von dem aus σ gerechnet wird, im vorliegenden Falle also statt des aus den Gleichungen pag. 171 berechneten Werthes das Supplement genommen werden muss. Die Anwendung dieses Verfahrens setzt voraus, dass die Scheibe keine merkliche Phase hat; ist eine solche vorhanden, so kann ihr Einfluss in der von SCHIAPARELLI angegebenen Weise[2]) berücksichtigt werden; übrigens verdient das erstere Verfahren ohnehin den Vorzug.



(A. 328.)

Man kann endlich auch die Zeitschätzungen des Durchganges der zu bestimmenden Punkte ganz umgehen und durch directe Messungen mit der Schraube ersetzen. Bestimmt man mittelst des beweglichen Fadens, der dem Centralmeridian parallel angenommen werde, durch Einstellung auf den Fleck und auf die beiden Ränder die Grösse x (Fig. 328) und hierauf nach Drehung des Mikrometers um 90° die Grösse y, so erhält man unmittelbar aus dem Ausdruck für den Cosinus des Winkels, den zwei Linien mit einander einschliessen:

$$\cos\sigma = \sin i \cdot \frac{y}{\rho} + \frac{\cos i\sqrt{\rho^2 - (x^2 + y^2)}}{\rho}$$

und

$$\sin(\vartheta - w) = \frac{x}{\rho \sin\sigma}.$$

Weicht, wie dies im Allgemeinen der Fall sein wird, das der Messung zu Grunde liegende Achsensystem von der wahren Richtung des Centralmeridians und der dazu senkrechten Richtung ab, so kann man leicht nach den bekannten

[1]) SCHIAPARELLI a. a. O., § 297.
[2]) SCHIAPARELLI, a. a. O., § 306.

Transformationsformeln für rechtwinklige Coordinaten die gemessenen Grössen auf die neuen Achsen übertragen[1]). Zum Schlusse möge auch hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass in den »Monthly Notices« regelmässig Ephemeriden veröffentlicht werden, welche alle bei derartigen Beobachtungen und Reductionen erforderlichen Grössen in zweckentsprechender Weise enthalten.

Zur präcisen Bestimmung der Durchmesser von leuchtenden Scheiben ist das Fadenmikrometer wegen der bei der Berührung der Ränder mit den materiellen Fäden auftretenden Beugungserscheinungen wenig geeignet. Man kann zwar letztere umgehen, wenn man, wie es vielfach geschieht, einen Doppelfaden anwendet, in dessen Mitte man die Ränder einstellt, läuft aber hierbei Gefahr, in andere systematische Fehler zu verfallen. Gleichwohl wird dieses Verfahren und selbst auch die Einstellung mittelst des Fadenrandes anwendbar sein, wenn es nicht auf die absolute Grösse des scheinbaren Durchmessers, sondern auf die Bestimmung der Figur oder der Abplattung ankommt. In allen Fällen muss aber für derartige Messungen das Doppelbildmikrometer als der geeignetste Apparat angesehen werden, zumal über das Lichtbildmikrometer in dieser Hinsicht keine genügenden Erfahrungen gesammelt sind, welche geeignet wären, die damit verknüpften Bedenken zu heben.

Bestimmung der fortschreitenden und periodischen Ungleichheiten einer Schraube.

Eine Mikrometerschraube wird als vollkommen nur dann angesehen werden dürfen, wenn über ihre ganze Ausdehnung oder wenigstens denjenigen Theil, welcher im Allgemeinen benutzt wird, die durch sie erzeugte Linearbewegung dem Drehungswinkel proportional ist. Es sind bereits früher die Ursachen erörtert worden, welche Abweichungen von diesem Gesetz hervorrufen können, und es soll hier gezeigt werden, wie man diese Fehler bestimmen und in Rechnung ziehen kann. Denn wenngleich die Technik unserer Tage Schrauben von geradezu bewundernswerther Regelmässigkeit herzustellen vermag, so wird doch niemals *a priori* vorausgesetzt werden dürfen, dass eine Schraube ganz fehlerfrei sei; auch können mit der Zeit durch Abnutzung oder durch kleine Aenderungen bei der Wiederzusammensetzung eines auseinander genommenen Apparates Fehler auftreten, welche früher nicht bestanden haben. Bessel hat in seiner Abhandlung über das preussische Längenmaass[2]) und in seiner Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte[3]) zuerst die Methoden entwickelt, welche für die Ermittlung der Schraubenfehler dienen können und auch heute noch ohne wesentliche Zusätze angewandt werden. Die Abweichungen des Ganges der Schraube von dem obigen Gesetz lassen sich in zwei Klassen theilen: 1. fortschreitende Fehler, d. s. Ungleichheiten der linearen Fortbewegung, wenn die Schraube an verschiedenen Stellen in der Mutter um dieselbe volle Anzahl von Umdrehungen gedreht wird; 2. periodische Fehler oder Ungleichheiten in der linearen Be-

---

[1]) Vergl. W. Wislicenus, Ueber die Anwendung von Mikrometermessungen bei physischen Beobachtungen des Mars. Astr. Nachr. Bd. 120.

[2]) F. W. Bessel, Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln, welche in den Jahren 1835—1838 durch die Einheit des Preussischen Längenmaasses veranlasst worden sind. Berlin 1839.

[3]) F. W. Bessel, Astronomische Untersuchungen Bd. I, auch in Engelmann's Abhandlungen. Bd. II.

wegung, wenn die Schraube innerhalb einer Umdrehung um gleiche Winkel gedreht wird. Sehen wir zunächst von den letzteren ab und bezeichnen die lineare Bewegung, welche dem zwischen den Ablesungen der Trommel und der Scale enthaltenen Drehungswinkel $a - a_0$ entspricht, mit s, so wird

$$s = (a - a_0)\, l_0 + \varphi\,(a - a_0),$$

wo l_0 eine constante Grösse und $\varphi\,(a - a_0)$ die Correction ist, welche dem nach dem mathematischen Gesetz der Schraube berechneten Betrage des durchlaufenen linearen Weges zugefügt werden muss. Unter der für eine einigermaassen sorgfältig hergestellte Schraube gewiss gültigen Annahme, dass die fortschreitenden Fehler klein und von regelmässigem Verlauf sind, wird man für $\varphi\,(a - a_0)$ die Form einer Potenzreihe $\alpha l_0 (a - a_0)^2 + \beta l_0 (a - a_0)^3 + \ldots$ ansetzen dürfen; ist zugleich die Anzahl der benutzten Umdrehungen klein, so wird man, da der Gang der Schraube durch die grössere Anzahl von Windungen, die sich zugleich in der Mutter befinden, bestimmt wird, auf das erste Glied sich beschränken und folglich setzen können:

$$s = l_0\,[(a - a_0) + \alpha\,(a - a_0)^2 \ldots].$$

Hierzu treten noch die periodischen Fehler, deren allgemeinster Ausdruck eine nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der Ablesung fortschreitende Reihe ist, welche erfahrungsmässig in den meisten Fällen auf die vom einfachen und doppelten Winkel abhängigen Glieder beschränkt werden kann. Fügt man diese Glieder zu dem obigen Ausdruck hinzu, so erhält man:

$$s = l_0 \{ (a - a_0) + \alpha (a - a_0)^2 + \alpha' (\cos a - \cos a_0) + \beta' (\sin a - \sin a_0) \\ + \alpha'' (\cos 2a - \cos 2a_0) + \beta'' (\sin 2a - \sin 2a_0) \}.$$

Der lineare Weg der Schraube oder des durch sie bewegten Schlittens, welcher dem Drehungswinkel $a' - a$ entspricht, ist folglich:

$$s' - s = l_0 \{ (a' - a) + \alpha (a' - a)(a' + a - 2a_0) + \alpha' (\cos a' - \cos a) + \beta' (\sin a' - \sin a) \\ + \alpha'' (\cos 2a' - \cos 2a) + \beta'' (\sin 2a' - \sin 2a) \}$$

oder, wenn man $a' - a = b$ setzt

$$s' - s = l_0 \{ b + \alpha b (2a + b - 2a_0) + \alpha' (\cos (a + b) - \cos a) + \beta' (\sin (a + b) - \sin a) \\ + \alpha'' (\cos (2a + 2b) - \cos 2a) + \beta'' (\sin (2a + 2b) - \sin 2a) \}.$$

Um die hier auftretenden unbekannten Grössen α, α', β', α'', β'' zu bestimmen, verfährt man nach dem Vorgange Bessel's am zweckmässigsten so, dass man einen gewissen übrigens unbekannten Zwischenraum, welcher aber nicht einer oder mehreren ganzen Umdrehungen der Schraube gleich sein darf, von verschiedenen Punkten aus, die regelmässig über die zu untersuchende Strecke der Schraube vertheilt sind, ausmisst. Man bezeichne dieses Intervall mit f; die Messung habe, indem der Anfangspunkt um je $\frac{1}{n}$ Umdrehung geändert und die Untersuchung auf m Windungen ausgedehnt werde, die folgenden Differenzen der Ablesungen bei Einstellung auf die das Intervall begrenzenden Punkte oder Striche ergeben[1]):

1.	Windung	$b_{1,1}\ b_{1,2} \ldots b_{1,n}$
2.	„	$b_{2,1}\ b_{2,2} \ldots b_{2,n}$
. . .	. . .	. . .
m.	„	$b_{m,1}\ b_{m,2} \ldots b_{m,n}$,

so hat man, indem man für die 1., 2., ... m. Windung $a = a_0,\ a_0 + 1, \ldots$

[1]) Vergl. G. Müller, Untersuchungen über Mikrometerschrauben in Berl. Beob. Bd. V.

$a_0 + m - 1$ setzt und dadurch die fortschreitenden Fehler auf den Anfangspunkt a_0 bezieht:

$$f = b_{1,1} + \alpha b_{1,1}(b_{1,1}) + \alpha'[\cos(a_0 + b_{1,1}) - \cos a_0] + \beta'[\sin(a_0 + b_{1,1}) - \sin a_0) + \dots$$

$$f = b_{1,2} + \alpha b_{1,2}\left(\frac{2}{n} + b_{1,2}\right) + \alpha'\left[\cos\left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{1,2}\right) - \cos\left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$
$$+ \beta'\left[\sin\left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{1,2}\right) - \sin\left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + \dots$$

. . . .

$$f = b_{1,n} + \alpha b_{1,n}\left(\frac{2(n-1)}{n} + b_{1,n}\right) + \alpha'\left[\cos\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n} + b_{1,n}\right) - \cos\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right] +$$
$$+ \beta'\left[\sin\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n} + b_{1,n}\right) - \sin\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right] + \dots$$

$$f = b_{2,1} + \alpha b_{2,1}(2 + b_{2,1}) + \alpha'[\cos(a_0 + b_{2,1}) - \cos a_0] + \beta'[\sin(a_0 + b_{2,1}) - \sin a_0] + \dots$$

$$f = b_{2,2} + \alpha b_{2,2}\left[\frac{2(n+1)}{n} + b_{2,2}\right] + \alpha'\left[\cos\left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{2,2}\right) - \cos\left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$
$$+ \beta'\left[\sin\left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{2,2}\right) - \sin\left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + \dots$$

. . . .

$$f = b_{2,n} + \alpha b_{2,n}\left[\frac{2(2n-1)}{n} + b_{2,n}\right] + \alpha'\left[\cos\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n} + b_{2,n}\right) - \cos\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$
$$+ \beta'\left[\sin\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n} + b_{2,n}\right) - \sin\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right] + \dots$$

. . . .

. . . .

$$f = b_{m,1} + \alpha b_{m,1}[2(m-1) + b_{m,1}] + \alpha'[\cos(a_0 + b_{m,1}) - \cos a_0) + \beta'[\sin(a_0 + b_{m,1}) - \sin a_0] + \dots$$

$$f = b_{m,2} + \alpha b_{m,2}\left[2(m-1) + \frac{2}{n} + b_{m,2}\right] + \alpha'\left[\cos\left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{m,2}\right) - \cos\left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$
$$+ \beta'\left[\sin\left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{m,2}\right) - \sin\left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + \dots$$

. . . .

$$f = b_{m,n} + \alpha b_{m,n}\left[\frac{2(mn-1)}{n} + b_{m,n}\right] + \alpha'\left[\cos\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n} + b_{m,n}\right) - \cos\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$
$$+ \beta'\left[\sin\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n} + b_{m,n}\right) - \sin\left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right] + \dots$$

Die strenge Auflösung dieser Gleichungen würde, selbst wenn man sich — was häufig ausreicht — auf die hier ausgeschriebenen Glieder vom Einfachen des Winkels beschränken wollte, sehr beschwerlich sein; man kann aber ohne erhebliche Einbusse an Genauigkeit die Unbekannten von einander trennen und zunächst den Coëfficienten α bestimmen, indem man die Gleichungen einer jeden Abtheilung summirt und dabei berücksichtigt, dass die Summen der Cosinus und Sinus nach bekannten Sätzen entweder strenge gleich Null werden oder bei den gemeiniglich geringen Unterschieden zwischen den gemessenen b-Grössen so klein sein werden, dass ihre Producte mit den Coëfficienten α', β', α'', β'' als verschwindend betrachtet werden können. Bezeichnet dann b den mittleren Werth der beobachteten Grössen und setzt man

$$B_1 = \frac{1}{n}(b_{1,1} + b_{1,2} + \ldots + b_{1,n})$$
$$B_2 = \frac{1}{n}(b_{2,1} + b_{2,2} + \ldots + b_{2,n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_m = \frac{1}{n}(b_{m,1} + b_{m,2} + \ldots + b_{m,n}),$$

so erhält man

$$f = B_1 + \alpha b\left(b + \frac{n-1}{n}\right)$$
$$f = B_2 + \alpha b\left(b + \frac{n-1}{n} + 2\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f = B_m + \alpha b\left(b + \frac{n-1}{n} + 2(m-1)\right),$$

woraus durch Abzug der ersten von der letzten, der zweiten von der vorletzten Gleichung, u. s. w. folgt:

$$0 = B_m - B_1 + 2\alpha b(m-1)$$
$$0 = B_{m-1} - B_2 + 2\alpha b(m-3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und damit zur Bestimmung von α:

$$\frac{(m-1)m(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,2\alpha b = (m-1)(B_1 - B_m) + (m-3)(B_2 - B_{m-1}) + \ldots.$$

Die Reihe auf der rechten Seite bricht bei geradem m mit dem Gliede $B_{\frac{m}{2}} - B_{\frac{m}{2}+1}$, bei ungeradem m mit $2\left(B_{\frac{m-1}{2}} - B_{\frac{m+3}{2}}\right)$ ab, in letzterem Falle bleibt das mittlere B unberücksichtigt. Strenger ist die Auflösung der obigen Gleichungen mit den Unbekannten f und αb nach der Methode der kleinsten Quadrate, doch wird praktisch dadurch wohl selten mehr erreicht.

Ist auf diese Weise die Grösse α ermittelt, so kann man für die Bestimmung der periodischen Glieder den Gleichungen eine einfachere Form geben, indem man das von α abhängige Glied gemäss dem Ausdruck $b + \alpha b[b + 2(a - a_0)]$ mit den beobachteten Werthen vereinigt und aus den denselben Werthen von n angehörigen Gleichungen die Mittelwerthe bildet. Bezeichnet man dann die bekannten Glieder mit $b_1, b_2, \ldots b_n$ und setzt $f = \frac{\Sigma b}{n} - x$, so werden die Gleichungen:

$$x + \alpha'[\cos(a_1 + b_1) - \cos a_1] + \beta'[\sin(a_1 + b_1) - \sin a_1] + \alpha''[\cos 2(a_1 + b_1) - \cos 2a_1]$$
$$+ \beta''[\sin 2(a_1 + b_1) - \sin 2a_1] = \frac{\Sigma b}{n} - b_1$$
$$x + \alpha'[\cos(a_2 + b_2) - \cos a_2] + \beta'[\sin(a_2 + b_2) - \sin a_2] + \alpha''[\cos 2(a_2 + b_2) - \cos 2a_2]$$
$$+ \beta''[\sin 2(a_2 + b_2) - \sin 2a_2] = \frac{\Sigma b}{n} - b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x + \alpha'[\cos(a_n + b_n) - \cos a_n] + \beta'[\sin(a_n + b_n) - \sin a_n] + \alpha''[\cos 2(a_n + b_n) - \cos 2a_n]$$
$$+ \beta''[\sin 2(a_n + b_n) - \sin 2a_n] = \frac{\Sigma b}{n} - b_n$$

welche leicht nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden können, wobei die Bestimmung von x im Allgemeinen nur von untergeordneter Bedeutung ist, aber zur Prüfung der numerischen Rechnung dienen kann. Sind, wie es seit einigen Jahrzehnten bei den feineren Messschrauben meistens der Fall ist, die periodischen Fehler klein, so darf man unter den *cos* und *sin* statt der einzelnen

b ihren Mittelwerth substituiren und folglich $x = 0$ setzen, und die Gleichungen nehmen dann nach Umwandlung der Differenzen der *cos* und *sin* in Producte die Form an:

$$2\alpha' \sin\frac{f}{2} \sin\left(a_1 + \frac{f}{2}\right) - 2\beta' \sin\frac{f}{2} \cos\left(a_1 + \frac{f}{2}\right) + 2\alpha'' \sin f \sin(2a_1 + f)$$
$$- 2\beta'' \sin f \cos(2a_1 + f) = b_1 - \frac{\Sigma b}{n}$$

. . . .

$$2\alpha' \sin\frac{f}{2} \sin\left(a_n + \frac{f}{2}\right) - 2\beta' \sin\frac{f}{2} \cos\left(a_n + \frac{f}{2}\right) + 2\alpha'' \sin f \sin(2a_n + f)$$
$$- 2\beta'' \sin f \cos(2a_n + f) = b_n - \frac{\Sigma b}{n}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ergiebt, unter Berücksichtigung, dass $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$

$$n \sin\frac{f}{2} \cdot \alpha' = \sum_1^n \left(b_q - \frac{\Sigma b}{n}\right) \sin(a_q + \tfrac{1}{2}f) \qquad n \sin f \cdot \alpha'' = \sum_1^n \left(b_q - \frac{\Sigma b}{n}\right) \sin(2a_q + f)$$
$$n \sin\frac{f}{2} \cdot \beta' = -\sum_1^n \left(b_q - \frac{\Sigma b}{n}\right) \cos(a_q + \tfrac{1}{2}f) \qquad n \sin f \cdot \beta'' = -\sum_1^n \left(b_q - \frac{\Sigma b}{n}\right) \cos(2a_q + f)$$

mit den Gewichten

$$g(\alpha') = g(\beta') = 2n \sin^2\frac{f}{2}$$
$$g(\alpha'') = g(\beta'') = 2n \sin^2 f,$$

wenn das Gewicht der Grössen $b_1 b_2, \ldots$ als Einheit angenommen wird.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens möge eine aus der Bessel'schen Abhandlung über das preussische Längenmaass entnommene Untersuchung einer Schraube dienen. Bessel legte eine, von zwei zu zwei Zehntel einer Linie getheilte Scala auf den Schlitten des Mikrometers, dessen Schraube untersucht werden sollte, und stellte ein mit Kreuzfäden versehenes Mikroskop darüber auf, so dass er die Strecke zwischen zwei bestimmten Strichen derselben mittelst der Mikrometerschraube durch die Absehenslinie des Mikroskops führen und seine Grösse dadurch messen konnte; nachdem eine, von dem Anfangspunkt der Theilung der Schraubentrommel ausgehende Messung gemacht war, wurden durch Verschiebung der Scala nach und nach die anderen Zehntel ihres Umfanges zu Anfangspunkten der Messung gemacht. Das Resultat ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt, zu welcher noch zu bemerken ist, dass die angesetzten Zahlen Mittelwerthe aus je 10 Einzelmessungen sind:

Anfang	Gem. Strecke	Anfang	Gem. Strecke	Anfang	Gem. Strecke	Anfang	Gem. Strecke
u	u	u	u	u	u	u	u
25·0	1·6493	26·0	1·6452	27·0	1·6413	28·0	1·6407
·1	1·6517	·1	1·6476	·1	1·6428	·1	1·6436
·2	1·6606	·2	1·6610	·2	1·6562	·2	1·6550
·3	1·6784	·3	1·6720	·3	1·6732	·3	1·6707
·4	1·6909	·4	1·6886	·4	1·6865	·4	1·6852
·5	1·6984	·5	1·6978	·5	1·6989	·5	1·6952
·6	1·7032	·6	1·7027	·6	1·7012	·6	1·6986
·7	1·6923	·7	1·6906	·7	1·6914	·7	1·6871
·8	1·6733	·8	1·6683	·8	1·6716	·8	1·6672
·9	1·6519	·9	1·6524	·9	1·6502	·9	1·6508

Aus diesen Zahlen findet man:

$$B_1 = \overset{u}{1{\cdot}67500}$$
$$B_2 = 1{\cdot}67262$$
$$B_3 = 1{\cdot}67133$$
$$B_4 = 1{\cdot}66941$$

und hieraus

$$20 \times 1{\cdot}6721\,\alpha = +\overset{u}{0{\cdot}01806}$$

oder

$$\alpha = +\overset{u}{0{\cdot}00054}.$$

Die ursprünglichen Zahlen müssen demnach, um rein periodisch zu werden, noch um folgende Beträge verbessert werden:

$(a_0 = 25{\cdot}0,\ a = 25{\cdot}0,\ 25{\cdot}1\ \ldots\ 28{\cdot}9,\ b = 1{\cdot}67\ \ldots)$

u	4. Dec.	u	4. Dec.	u	4. Dec.	u	4. Dec.
25·0	+ 15	26·0	+ 33	27·0	+ 51	28·0	+ 69
·1	+ 17	·1	+ 35	·1	+ 53	·1	+ 71
·2	+ 19	·2	+ 37	·2	+ 55	·2	+ 73
·3	+ 21	·3	+ 39	·3	+ 57	·3	+ 75
·4	+ 22	·4	+ 40	·4	+ 58	·4	+ 77
·5	+ 24	·5	+ 42	·5	+ 60	·5	+ 78
·6	+ 26	·6	+ 44	·6	+ 62	·6	+ 80
·7	+ 28	·7	+ 46	·7	+ 64	·7	+ 82
·8	+ 30	·8	+ 48	·8	+ 66	·8	+ 84
·9	+ 31	·9	+ 49	·9	+ 68	·9	+ 86

Werden die so verbesserten Zahlen für jedes Zehntel einer Umdrehung zu einem Mittel zusammengezogen, so erhält man

u	b	u	b
·0	1·6483	·5	1·7027
·1	1·6508	·6	1·7067
·2	1·6628	·7	1·6958
·3	1·6784	·8	1·6758
·4	1·6927	·9	1·6572

Bei dem starken Betrage der periodischen Fehler ist es angezeigt, die Gleichungen strenge aufzulösen; man erhält:

$$f = \overset{u}{1{\cdot}6779} \qquad m.\ F. = \pm\,\overset{u}{0{\cdot}00029}$$
$$\alpha' = -\,0{\cdot}0113 \qquad \pm\,0{\cdot}00024$$
$$\beta' = -\,0{\cdot}0127 \qquad \pm\,0{\cdot}00025$$
$$\alpha'' = +\,0{\cdot}0002\text{[1]} \qquad \pm\,0{\cdot}00023$$
$$\beta'' = +\,0{\cdot}0022 \qquad \pm\,0{\cdot}00023$$

während aus den genäherten Ausdrücken die Werthe folgen:

$$\alpha' = -\,0{\cdot}0114 \qquad \alpha'' = -\,0{\cdot}0002$$
$$\beta' = -\,0{\cdot}0128 \qquad \beta'' = +\,0{\cdot}0013,$$

für die beiden letzten Coëfficienten also merklich verschieden.

---

[1]) Bessel erhielt, anscheinend auf demselben Wege, für den Coëfficienten α'' den abweichenden Werth $+\,0{\cdot}0008$.

Die Ablesungen der Schraube erfordern demnach die Correctionen (in Theilen einer Umdrehung):

$(a - 25{\cdot}0)^2\, 0{\cdot}00054 - 0{\cdot}0113 \cos a - 0{\cdot}0127 \sin a + 0{\cdot}0002 \cos 2a + 0{\cdot}0022 \sin 2a.$

Es sei hier noch bemerkt, dass man nach einem von E. LAMP[1]) aufgestellten Kriterium von vornherein leicht erkennen kann, ob die strenge Auflösung der Gleichungen nothwendig ist oder nicht; es ist ersteres der Fall, wenn die Grösse $U = \frac{\pi}{8}(B_1 - B_2)^2 cotang \frac{1}{2} b_0$, wo B_1 und B_2 den grössten und kleinsten, und b_0 den mittleren Werth der b bezeichnen, einen merklichen Betrag hat. In dem obigen Falle ist $b_0 = 1''{\cdot}677$ oder $\frac{1}{2} b_0 = 301°{\cdot}86$, $B_1 - B_2 = 0''{\cdot}0584$, mithin U (absolut) $= 0''{\cdot}0008$, so dass die Gleichungen strenge aufgelöst werden müssen.

Statt nach der oben auseinander gesetzten Methode wird man in vielen oder den meisten Fällen zweckmässiger verfahren, wenn man die Bestimmung der fortschreitenden und periodischen Schraubenfehler trennt und für beide die jedesmal günstigsten Bedingungen benutzt. Es ist dies der von BESSEL bei der Untersuchung der Schrauben des Königsberger Heliometers eingeschlagene Weg. Was zunächst die periodischen Fehler angeht, so folgt aus den obigen Gleichungen unmittelbar, dass die Glieder, welche vom einfachen Winkel abhängen, am sichersten bestimmt werden, wenn der gemessene Zwischenraum nahe $m + \frac{1}{2}$ Umdrehungen beträgt, wo $m = 0, 1, 2 \ldots$, dass dagegen die Coëfficienten der *cos* und *sin* des doppelten Winkels als günstigste Wahl ein Intervall von $m \pm \frac{1}{4}$ verlangen; im ersteren Fall erhält man α', β' mit dem Gewicht $2n$, α'', β'' mit dem Gewicht 0, im letzteren werden die Gewichte bezw. n und $2n$. Man gewinnt daher auf diese Weise zwei Bestimmungen von α' und β', die man gemäss ihren Gewichten combinirt. Es lassen sich ferner die vier Coëfficienten gleichzeitig und mit demselben Gewicht bestimmen, indem man ein Intervall von $m \pm \frac{1}{3}$ Umdrehungen benutzt, aber das Gewicht dieser Bestimmung wird in Bezug auf die günstigste Wahl im Verhältniss von 3 zu 4 verkleinert. Bei allen diesen Bestimmungen empfiehlt es sich, die Untersuchung nicht auf eine Windung zu beschränken, sondern auf mehrere auf einander folgende Windungen, und falls die Schraube über eine grössere Strecke benutzt zu werden pflegt, an verschiedenen Stellen derselben auszudehnen. Man kann dabei die oben abgeleitete Formel von α benutzen, um den jedesmaligen Antheil der fortschreitenden Fehler aus den Messungen wegzuschaffen.

Es wird nicht undienlich sein, an einigen weiteren, der Praxis entlehnten Untersuchungen die verschiedenen Verfahren und Kunstgriffe zu zeigen, die für die Ausführung der Messungen dienlich sein können. Bei der Untersuchung der Schraube des Fadenmikrometers eines 7zölligen MERZ'schen Refractors ging KAISER in der folgenden Weise vor. Er befestigte an einer schweren, eichenen Platte vier kupferne Arme, welche eine zu ihr senkrechte Büchse trugen. In diese Büchse wurde ein Mikroskop eingeführt und unter demselben auf der Platte das Mikrometer festgeklemmt; ein geneigter Spiegel warf durch eine Durchbohrung Tageslicht in das Mikroskop. Als Vergleichsobject diente eine Glasscala, welche aus einem in 100 Theile getheilten Millimeter bestand. Es wäre nun das einfachste gewesen, dieselbe unmittelbar auf der Ocularröhre zu befestigen und die Ocularschiebung zur Verstellung der Scala gegen die beweg-

---

[1]) E. LAMP, Ueber die BESSEL'sche Correctionsformel für Mikrometerschrauben. Astr. Nachr. Bd. 87 u. 88.

liche Fadenplatte zu benutzen. Da aber bei diesem Mikrometer abweichend von der meist üblichen Construction das Ocular sich gleichzeitig mit der beweglichen Fadenplatte verschob, so musste ein anderer Weg eingeschlagen werden. KAISER entfernte den Ocularschieber und befestigte auf der Fadenplatte eine einem anderen Instrument entlehnte Ocularröhre, welche ein mittelst Schraube bewegliches Diaphragma hatte, und brachte auf diesem die Glasscala an. Indem nun die Trommel der zu untersuchenden Schraube der Reihe nach auf 0·0 0·1 . . . 0·9 gestellt wurde, wurden jedesmal nach einander der Anfangsstrich des $\frac{1}{4}$ Umdrehungen betragenden Intervalls mit der Hülfsschraube, der Endstrich mit der Messschraube auf den Kreuzungspunkt der Mikroskopfäden gebracht. Diese Untersuchung KAISER's[1]) ist auch um deswillen von geradezu klassischer Bedeutung, weil sie zuerst eine bis dahin kaum beachtete Fehlerquelle aufdeckte. Aussergewöhnlich starke und von dem Coincidenzpunkt abhängige Unterschiede — bis zu 0''·9 — bei einer Reihe von Doppelsternmessungen hatten es wahrscheinlich gemacht, dass die Schraube starke periodische Fehler habe, und in der That fand KAISER aus einer vorläufigen Bestimmung:

Anfangspunkt	Fehler u
0·00	0·000
0·25	— 0·025
0·50	— 0·001
0·75	+ 0·013

Er vermuthete sogleich, dass diese starken Fehler nicht der Schraube selbst zur Last fallen konnten, und seine Vermuthung wurde bestätigt, als das Mikrometer auseinander genommen und die Stützfläche der Schraube näher betrachtet wurde. Zwar schien der Stützpunkt in der Schraubenachse zu liegen, aber der Steincylinder war schief in seiner Höhlung gebettet und auf seiner Stirnfläche zeigte sich eine Unebenheit; ferner war der Stein in seinem Lager nicht fest, sondern konnte verschiedene Lagen darin einnehmen. KAISER drehte den Cylinder herum, so dass die Unebenheit, welche vorher dem Stützpunkt nahe gelegen hatte, weiter davon entfernt bleiben musste, und stellte seine Grundfläche, so gut es anging, senkrecht auf die Schraubenachse. Die Wiederholung der Messungen führte nun zu folgendem Ausdruck:

$$\varphi(a) = -0{\cdot}00136 \cos a - 0{\cdot}00724 \sin a + 0{\cdot}00110 \cos 2a + 0{\cdot}00134 \sin 2a.$$

Es zeigte sich also, dass die periodischen Fehler durch die vorgenommene Operation ganz erheblich vermindert worden waren, wenngleich sie auch jetzt noch einen merklichen Betrag erreichten; das Ueberwiegen des Sinus-Coëfficienten deutete darauf hin, dass die frühere Fehlerquelle, schiefer Stand der Stützfläche in Verbindung mit einer Excentricität des Stützpunktes, zum geringeren Theil auch nach der Verbesserung fortbestand.

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Schraubenfehler wurde von DUNÉR befolgt[2]). Ein mit einer Messschraube versehenes Mikroskop wurde auf passende Weise über dem mit einem starken Ocular versehenen Mikrometer und in der

---

[1]) Eenige Opmerkingen omtrent de periodieke Fouten van Mikrometer Schrouven door F. KAISER (in »Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen Afd. Natuurkunde 2. Reeks Deel I« Amsterdam 1866. Auch französisch in »Archives Néerlandaises« T. IV 1869.

[2]) N. C. DUNÉR, Mesures Micrométriques d'étoiles doubles. Lund 1876.

Richtung der zu untersuchenden Schraube verschiebbar aufgestellt und so justirt, dass das stark vergrösserte Bild des beweglichen Fadens im Gesichtsfeld des Mikroskops deutlich sichtbar war. Mittelst der Schraube des Mikroskops wurde der auf $\cdot^{u}0$ eingestellte bewegliche Faden in die Mitte der beiden engen Fäden des Mikroskops gebracht und nach Ablesung der Trommel eine zweite Einstellung auf den auf $\cdot^{u}1$ verschobenen Faden gemacht. Nachdem das Fadenpaar des Mikroskops wieder auf die erste Ablesung zurückgeführt und das Mikroskop selbst soweit verschoben war, dass der auf $\cdot^{u}1$ gestellte bewegliche Faden in der Mitte des Fadenpaars war, wurde in derselben Weise das Intervall ·1 bis ·2, ·2 bis ·3 und so fort bis zum letzten Zehntheil ausgemessen. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass auch mit dem Ocularschieber gefolgt wurde, damit der bewegliche Faden stets in der Mitte des Gesichtsfeldes des Mikroskops und des Oculars sich befand. Da alle Messungen an derselben Stelle der Mikroskopschraube gemacht wurden, so bleiben die Fehler der letzteren ohne Einfluss auf das Resultat, dagegen müssen ihre Angaben in Theile einer Umdrehung der zu untersuchenden Schraube umgesetzt werden, wozu die Bemerkung dient, dass die Summe der Bewegungen der Trommel des Mikroskops gleich einer ganzen Umdrehung der Messschraube des Mikrometers ist. Das Verfahren weicht hier insofern von dem früher erörterten ab, als die Grösse der einzelnen Zehntheile der Schraubenwindung, mithin eine in Folge der periodischen Fehler veränderliche Grösse gemessen wird. Es werden folglich auch die Gleichungen zur Bestimmung der α', β', . . Coëfficienten in etwas anderer Weise aufzustellen sein. Ist das ausgemessene Intervall $\frac{1}{n}$ des Umfangs und geben die Messungen mittelst des Mikroskops, ausgedrückt in Theilen der Umdrehung der zu untersuchenden Schraube bezw. $\frac{1}{n} - s_0$, $\frac{1}{n} - s_1$, . . . $\frac{1}{n} - s_{n-1}$, so werden die Coëfficienten aus den Gleichungen erhalten:

$$2\alpha' \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} - 2\beta'\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + 2\alpha''\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} - 2\beta''\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} = s_0$$

$$2\alpha' \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n} - 2\beta'\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n} + 2\alpha''\sin\frac{2\pi}{n}\sin 3\frac{2\pi}{n} - 2\beta''\sin\frac{2\pi}{n}\cos 3\frac{2\pi}{n} = s_1$$

. . . .

$$2\alpha' \sin\frac{\pi}{n}\sin(2n-1)\frac{\pi}{n} - 2\beta'\sin\frac{\pi}{n}\cos(2n-1)\frac{\pi}{n} + 2\alpha''\sin\frac{2\pi}{n}\sin(2n-1)\frac{2\pi}{n} - 2\beta''\sin\frac{2\pi}{n}\cos(2n-1)\frac{2\pi}{n} = s_{n-1},$$

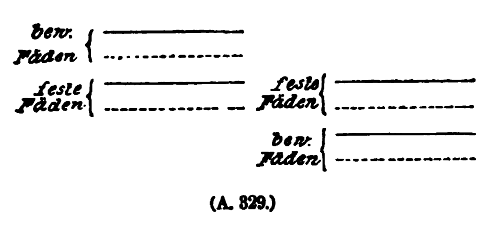
die eine ebenso einfache Auflösung, wie die früheren Gleichungen zulassen.

Auf diese Weise bestimmte DUNÉR die periodischen Fehler der Schraube des Mikrometers des 9zölligen MERZ'schen Refractors in Lund und erhielt aus 26 Messungsreihen, die sich über zwei Umdrehungen der Schraube erstreckten und zur einen Hälfte mit directer, zur anderen mit rückläufiger Drehung gemacht waren,

für directe Drehung $+0^{u}\!\cdot\!0090\sin(220^\circ\!\cdot\!7 + n\cdot 360^\circ) + 0^{u}\!\cdot\!0006\sin(217^\circ + 2n\cdot 360^\circ)$
für rückläufige Drehung $+\ 0\!\cdot\!0059\sin(221\!\cdot\!4 + n\cdot 360) + 0\!\cdot\!0012\sin(348 + 2n\cdot 360)$

wo n die Ablesung der Trommel in Theilen einer Umdrehung ist.

Sehr zweckmässig für derartige Untersuchungen hat sich das von H. C. VOGEL bei einer Untersuchung der Mikrometerschraube des Leipziger Aequatoreals[1]) benutzte achromatische Mikroskop erwiesen, dessen Ocular mit einem feinen Glasmikrometer versehen war. Durch Aenderung des Abstandes des Objectivs und Oculars kann die Bildgrösse leicht derart variirt werden, dass das Bild der bei einer halben oder einer viertel Umdrehung der Schraube vom Faden durchlaufenen Strecke dem Zwischenraum zwischen zwei Strichen der Glasscala nahe gleich ist. Verf. liess für die Strassburger Sternwarte zu demselben Zweck ein Mikroskop herstellen, in welchem statt der Glasscala zwei enge Fadenpaare sich befinden, die mittelst Schrauben in beliebige Abstände von einander gebracht werden können. Eine sehr einfache und sinnreiche Vorrichtung für die Untersuchung der periodischen Schraubenfehler ist von WINNECKE[2]) angegeben. Dieselbe besteht in einem achromatisirten Bergkrystallprisma, welches auf dem Augendeckel des Oculars des Mikrometers befestigt wird. Durch dieses Prisma gesehen erscheinen die Fäden doppelt und es lässt sich der Abstand zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Fadenbild durch Drehen des Oculars bezw. Prismas von der völligen Coincidenz bis zu einem Maximum, welches von dem brechenden Winkel und der Vergrösserung abhängt, verändern. Man kann dadurch den Zwischenraum zwischen den beiden Bildern eines festen Fadens mittelst des gleichfalls doppelt erscheinenden beweglichen Fadens, von verschiedenen Anfangspunkten aus, messen, wenn man mit der Widerlagschraube den Coincidenzpunkt ändert. Wenn der Abstand der beiden Bilder, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, zu klein ist, um denselben mit dem einen Bild des beweglichen Fadens auf die übliche Weise, durch Herstellung eines *minimum visibile* auf beiden Seiten zu bestimmen, so kann man die Messungen auf dem durch die Fig. 329 angedeuteten Wege machen, indem man die beweglichen Fäden einmal auf der einen, das andere Mal auf der anderen Seite der festen Fäden, in eine dem Abstand ihrer Bilder gleiche Entfernung bringt.



(A. 329.)

Bei der Benutzung eines solchen Prismas ist aber wegen der im Allgemeinen gegen einander geneigten Fadenbilder sorgfältig darauf zu achten, dass die Einstellungen stets an derselben Stelle des Gesichtsfeldes gemacht werden, weil nur dann das Intervall als constant angesehen werden kann. Als Beispiel möge hier eine Bestimmung der periodischen Fehler der Schraube eines der Strassburger Sternwarte gehörigen Positionsmikrometers von REPSOLD (1895) dienen. Das Intervall, welches gemessen wurde, war das vierfache des Zwischenraums zwischen dem ordentlichen und ausserordentlichen Bild und betrug rund $\frac{1}{4}$ Umdrehungen der Schraube. Im Mittel aus 12 Messungen ergaben sich die in der zweiten Columne befindlichen Zahlen, entsprechend den links stehenden Werthen des jedesmaligen Anfangspunktes; die übrigen Columnen sind durch ihre Ueberschriften verständlich.

---

[1]) H. C. VOGEL, Beobachtungen von Nebelflecken und Sternhaufen am 6füssigen Refractor nnd 12füssigen Aequatoreal der Leipziger Sternwarte. 1867.

[2]) A. WINNECKE, Ueber ein neues Hülfsmittel, die periodischen Fehler von Mikrometerschrauben zu bestimmen. Astr. Nachr. Bd. 91.

Anfangspunkt	Gem.-Interv.	$a+\frac{1}{2}f$	$2a+f$	$(b-f)\sin(a+\frac{1}{2}f)$	$(b-f)\cos(a+\frac{1}{2}f)$		$(b-f)\sin(2a+f)$	$(b-f)\cos(2a+f)$
R R	R			R	R		R	R
19·6767—0·0	0·7532	18°51'	37°42'	+0·00062	+0·00183		+0·00118	+0·00153
—0·1	0·7509	342 51	325 42	+0·00011	—0·00035		+0·00021	—0·00031
—0·2	0·7507	306 51	253 42	+0·00046	—0·00034		+0·00055	+0·00016
—0·3	0·7521	270 51	181 42	—0·00083	+0·00001		—0·00002	—0·00083
—0·4	0·7501	234 51	109 42	+0·00096	+0·00067		—0·00110	+0·00039
—0·5	0·7502	198 51	37 42	+0·00035	+0·00101		—0·00065	—0·00085
—0·6	0·7507	162 51	325 42	—0·00017	+0·00054		+0·00032	—0·00047
—0·7	0·7496	126 51	253 42	—0·00134	+0·00100		+0·00160	+0·00047
—0·8	0·7522	90 51	181 42	+0·00093	—0·00001		—0·00003	—0·00093
—0·9	0·7530	54 51	109 42	+0·00141	+0·00100		+0·00163	—0·00058
Mittel	f=0·75127	Summe		+0·00250	+0·00536		+0·00369	—0·00142
	=270°27'	*log* „		7·3979	7·7292		7·5670	7·1523$_n$
	$\frac{1}{2}f$=135°14'	*log* 10 *sin* $\frac{1}{2}f$		0·8477	0·8477	*log* 10 *sin* f	1·0000$_n$	1·0000$_n$
				α' +0·00035	β' —0·00076		α'' —0·00037	β'' —0·00014

Die Ablesungen der Schraube erfordern hiernach die Correction:

$$+\ 0{\cdot}00035\cos a - 0{\cdot}00076\sin a - 0{\cdot}00037\cos 2a - 0{\cdot}00014\sin 2a$$

oder

$$+\ 0{\cdot}00084\sin(a + 155^\circ{\cdot}0) - 0{\cdot}00040\sin(2a + 69^\circ{\cdot}0)$$

und die verbesserten Intervalle sind:

	Abw. v. Mittel	Quadrate der Abw.
0·7518	+ 5	25
07	— 6	36
11	— 2	4
23	+ 10	100
03	— 10	100
11	— 2	4
22	+ 9	81
05	— 8	64
15	+ 2	4
12	— 1	1
Mittel 0·75127	Summe	419
	log „	2·6222
	log 6	0·7782
		1·8440
	log ε	0·9220
	log $\sqrt{10}$	0·5000
	log $\sqrt{20}$	0·6505.

Der mittlere Fehler eines gemessenen Intervalls ergiebt sich hiermit ± 0·00084, woraus die mittleren Fehler von α' und β' je zu ± 0·00026, von α'' und β'' zu ± 0·00019 folgen. Obwohl die Summe der Quadrate der Abweichungen von 1437 auf 419 herabgegangen ist, so kann man nach Massgabe dieser mittleren Fehler den obigen Werthen der Coëfficienten, etwa denjenigen von β' ausgenommen, kaum eine Realität zuerkennen und darf die Schraube als fast frei von periodischen Fehlern ansehen. Die Vernachlässigung der obigen Werthe der periodischen Glieder würde bei der Höhe des Schraubenganges von 0·22 *mm* nur einen Maximal-Betrag von 0·0004 *mm* linear und bei dem Fernrohr von 1·85 *m* Brennweite, für welches das Mikrometer dient, von 0''·04 ergeben.

Auch die Anordnung der Fäden im Mikrometer bietet häufig ein einfaches Mittel zur Bestimmung der periodischen Fehler dar, wenn zufällig oder vorbedachter Weise unter den festen oder beweglichen Fäden geeignete

Abstände vorkommen. Von diesem Verfahren haben u. a. G. Müller in der vorerwähnten Untersuchung und Brünnow bei der Bestimmung der Schraubenfehler des Dubliner Refractors[1]) ausgiebigen Gebrauch gemacht. Endlich mag noch darauf hingewiesen werden, dass sich die periodischen Fehler auch aus Durchgangsbeobachtungen von Sternen ermitteln lassen, ein Verfahren, welches am besten mit der Bestimmung des Winkelwerthes der Schraube vereinigt wird.

Um hier nochmals auf den doppelten Ursprung zurückzukommen, den die periodischen Schraubenfehler haben können, so scheint aus der Vergleichung der von verschiedenen Künstlern und nach verschiedenen Verfahren hergestellten Schrauben hervorzugehen[2]), dass in den meisten Fällen die fehlerhafte Lagerung der Schraube die überwiegende Fehlerquelle ist, andererseits sind auch Fälle nachweisbar — und namentlich bei Schrauben aus früherer Zeit — wo die Unvollkommenheiten in der Lagerung gegenüber den Fehlern der Schraube selbst zurückgetreten sind. Ein eclatantes Beispiel bietet in dieser Hinsicht die Untersuchung[3]) der Mikroskopschrauben des Repsold'schen Meridiankreises der Pulkowaer Sternwarte durch Winnecke (1862).

Es mag an dieser Stelle noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die einmal ermittelten periodischen Fehler, abgesehen von allen durch Abnutzung der Schraube oder Verschiedenheiten in der Lagerung beim Auseinandernehmen und Wiederzusammensetzen der Mikrometer entstehenden Aenderungen nur so lange ihre Gültigkeit behalten, als die Trommel in unveränderter Lage zur Schraubenspindel bleibt; sind beide nicht unveränderlich mit einander verbunden, so ist es rathsam, ihre gegenseitige Stellung durch eine Marke zu fixiren.

Obwohl eine genaue Untersuchung der Schraube eine unabweisbare Forderung für alle Präcisionsmessungen ist, so wird man doch in allen denjenigen Fällen, wo es thunlich ist, vorziehen, die Fehler aus der Messung zu eliminiren. Die meisten Mikrometer der neueren Zeit sind, indem sie eine Veränderung des Coincidenzpunktes über mindestens eine Umdrehung gestatten, darauf eingerichtet (vergl. pag. 115). Man sieht aus den obigen Ausdrücken sogleich, dass, wenn die Ausgangspunkte des zu messenden Bogens über n äquidistante Punkte des Umfangs vertheilt werden, nur diejenigen Glieder in der für die periodischen Fehler angenommenen Reihe übrig bleiben, welche vom n, $2n$, $3n$ . . fachen der Ablesung abhängen. Combinirt man zwei Messungen, bei denen die Anfangspunkte $-\cdot^{R}25$ und $+\cdot^{R}25$ sind, so werden die von allen ungeraden Vielfachen des Winkels abhängenden Fehler eliminirt, es bleiben dagegen die Fehler vom 2, 4, . . fachen in der Messung enthalten. Eine Dreizahl bei $-\frac{1}{3}$, 0, $+\frac{1}{3}$ Umdrehung lässt die Fehler mit dem Winkel $3a$, $6a$, . . übrig u. s. f. Wird überhaupt eine grössere Anzahl von Einzeleinstellungen gemacht, so empfiehlt sich am meisten die Combination — 0·4 — 0·2 0·0 + 0·2 + 0·4.

Das vorher angegebene Verfahren zur Bestimmung der fortschreitenden Fehler setzt voraus, dass man es nur mit einem kleinen Theil der Schraube zu thun hat. Müssen aber diese Fehler über die ganze Schraube bestimmt werden, so ist ein anderer Weg einzuschlagen, welcher dem für die Bestimmung der periodischen Fehler analog ist. Man verschafft sich eine Strecke, welche sehr nahe einem Vielfachen der Schraubenumdrehung gleich ist und misst dieselbe

---

[1]) Astronomical Observations and Researches made at Dunsink, Dublin I.

[2]) Vergl. Westphal, Uebersicht über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen von Mikrometerschrauben. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Mai 1881.

[3]) Mém. de l'Acad. Imp. de St. Pétersbourg VII Série Tome VI, No. 7.

von verschiedenen, über die ganze Ausdehnung der Schraube gleichmässig vertheilten Anfangspunkten aus. Sei w die Anzahl der nutzbaren Schraubenwindungen, $\frac{w}{n}$ ein aliquoter Theil derselben, so messe man eine Distanz, welche sehr nahe gleich $\frac{w}{n}$ ist, nach einander ausgehend von a, $a + \frac{w}{n}$, $a + \frac{2w}{n}$, . . $a + \frac{n-1}{n} w$; die gefundenen Werthe seien $\frac{w}{n} + l_1$, $\frac{w}{n} + l_2$, . . . $\frac{w}{n} + l_n$, der wahre Werth $\frac{w}{n} + x$; bezeichnet man dann die gesuchten Correctionen mit $\varphi(a)$, $\varphi(a + \frac{w}{n})$, . . . so hat man die Gleichungen

$$x = l_1 + \varphi(a + \frac{w}{n}) - \varphi(a)$$
$$x = l_2 + \varphi(a + \frac{2w}{n}) - \varphi(a + \frac{w}{n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x = l_n + \varphi(a + w) - \varphi(a + \frac{(n-1)w}{n}).$$

Offenbar kann man aber zwei der Correctionen φ gleich 0 annehmen, weil es hier nur auf das Verhältniss eines Theils der Schraube zu dem übrigen ankommt. Setzt man daher $\varphi(a)$ und $\varphi(a + w)$ gleich 0, so wird:

$$x = \frac{\Sigma l}{n}$$
$$\varphi(a + \frac{w}{n}) = \frac{\Sigma l}{n} - l_1$$
$$\varphi(a + \frac{2w}{n}) = \frac{2\Sigma l}{n} - (l_1 + l_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(a + \frac{mw}{n}) = \frac{m\Sigma l}{n} - (l_1 + l_2 + \ldots + l_m).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es sind dies dieselben Gleichungen, auf die man bei der Bestimmung der Theilungsfehler eines geradlinigen Massstabes oder eines Kreises geführt wird, und es gilt hier wie dort der unmittelbar aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz folgende Satz, dass das Gewicht der Bestimmungen von den Enden nach der Mitte zu abnimmt. Ist g_m das Gewicht der Correction für die $m$te Windung (gerechnet von a aus) und g das Gewicht einer Messung l, so findet man leicht

$$g_m = g \frac{n}{(n-m)m}.$$

Bestimmt man also die fortschreitenden Fehler einer 40^{w} langen Schraube durch Messung eines nahe 5^{w} betragenden Intervalles, so werden die mittleren Fehler, wenn mit ε_0 der mittlere Fehler eines l bezeichnet wird,

$$\varepsilon_5 = 0{\cdot}94\,\varepsilon_0 = \varepsilon_{35}$$
$$\varepsilon_{10} = 1{\cdot}22\,\varepsilon_0 = \varepsilon_{30}$$
$$\varepsilon_{15} = 1{\cdot}37\,\varepsilon_0 = \varepsilon_{25}$$
$$\varepsilon_{20} = 1{\cdot}41\,\varepsilon_0.$$

Um diese Anhäufung der Fehler nach der Mitte zu vermeiden, theilt man nach dem Vorschlage von Bessel die zu untersuchende Strecke zunächst in zwei Theile, halbirt hierauf jede Hälfte u. s. f. Die Anwendung dieses Verfahrens würde in dem obigen Falle zu folgenden mittleren Fehlern führen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_5 &= 0{\cdot}81\,\varepsilon_0 = \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{10} &= 0{\cdot}79\,\varepsilon_0 = \varepsilon_{30} \\ \varepsilon_{15} &= 0{\cdot}88\,\varepsilon_0 = \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{20} &= 0{\cdot}71\,\varepsilon_0, \end{aligned}$$

welche nicht nur an sich kleiner sind, als die obigen, sondern auch unter einander keine so erheblichen Unterschiede zeigen. Auch die Dreitheilung giebt noch brauchbare Resultate.

Bessel hat noch ein anderes Verfahren angegeben, welches gleichfalls einer zu starken Anhäufung der Fehler vorbeugt. Es besteht darin, dass man Intervalle, welche gleich $\frac{w}{n} + x_1$, $\frac{2w}{n} + x_2$, $\frac{3w}{n} + x_3 \ldots$, wo $x_1 x_2 x_3 \ldots$ kleine Grössen sind, von den Anfangspunkten a, $a + \frac{w}{n}$, $a + \frac{2w}{n}$, .. aus misst. Man erhält so folgende Systeme von Gleichungen:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 = l_1 + \varphi(a + \frac{w}{n}) & x_2 = l_1' + \varphi(a + \frac{2w}{n}) & \ldots & x_i = l_1^{(i-1)} + \varphi(a + \frac{iw}{n}) \\ - \varphi(a) & - \varphi(a) & & - \varphi(a) \\ x_1 = l_2 + \varphi(a + \frac{2w}{n}) & x_2 = l_2' + \varphi(a + \frac{3w}{n}) & & x_i = l_2^{(i-1)} + \varphi(a + (i+1)\frac{w}{n}) \\ - \varphi(a + \frac{w}{n}) & - \varphi(a + \frac{w}{n}) & \ldots & - \varphi(a + \frac{w}{n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 = l_n + \varphi(a + w) & x_2 = l'_{n-1} + \varphi(a + w) & & x_i = l_{n-(i-1)}^{(i-1)} + \varphi(a + w) \\ - \varphi(a + (n-1)\frac{w}{n}) & - \varphi(a + (n-2)\frac{w}{n}) & \ldots & - \varphi(a + (n-i)\frac{w}{n}) \end{array}$$

welche unter Annahme von $\varphi(a) = \varphi(a + w) = 0$ nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden.

Die Grösse der Intervalle, für welche die Correctionen direct bestimmt werden, muss sich nach der grösseren oder geringeren Regelmässigkeit der Schraube richten; bei den besseren Schrauben der Neuzeit wird es meist genügen, die Correctionen von 5 zu 5 Windungen nach einem der obigen Verfahren direct zu ermitteln und die Zwischenwerthe durch numerische oder graphische Interpolation abzuleiten.

Für die Ausführung der Messungen dient ein feststehendes, mit Fadenkreuz oder besser einem engen Fadenpaar versehenes Mikroskop und eine Vorrichtung, — wenn vorhanden, leistet eine Theilmaschine gute Dienste, — mittelst deren das Mikrometer oder das Mikroskop parallel verschoben werden können; als auszumessende Strecken eignen sich Zwischenräume zwischen Strichen, welche auf dem beweglichen Schlitten gezogen sind. Auch das oben erwähnte, mit einer Glasscala oder mit zwei gegeneinander verstellbaren Fadenpaaren versehene Mikroskop lässt sich, wenn es an Stelle des Oculars gesetzt wird, unter Benutzung der Ocularschiebung verwenden, man muss aber, weil die Einstellungen ausserhalb der Mitte des Gesichtsfeldes gemacht werden müssen, für eine sehr genaue Focussirung Sorge tragen und sich weiter versichern, dass die Bewegungen des beweglichen Schlittens und des Ocularschiebers genau parallel erfolgen. Vielfach bietet auch die Ausmessung der Intervalle der festen oder beweglichen Fäden ein geeignetes Mittel zur Bestimmung der fortschreitenden Ungleichheiten. Ein Beispiel dieser Art entnehmen wir der Müller'schen Unter-

suchung des FRAUNHOFER'schen Fadenmikrometers des Berliner 9zölligen Refractors. Von den 80 Windungen der Schraube wurden die am meisten benutzten vierzig mittleren, 20 bis 60, der Untersuchung auf fortschreitende Fehler unterzogen und hierfür die festen Fäden I—III, II—III, III—IV benutzt, deren Distanzen von verschiedenen durch die zweite Schraube hergestellten und um nahe 5^R auseinander liegenden Anfangspunkten aus mit der Messschraube bestimmt wurden. Der Einfluss der periodischen Fehler wurde eliminirt, indem jedesmal fünf Messungen bei $-0^R\cdot4$ $-0^R\cdot2$ $0^R\cdot0$ $+0^R\cdot2$ $+0^R\cdot4$ zu einem Mittel vereinigt wurden. So ergab sich:

Anfang	III—IV	Anfang	II—III	Anfang	I—III
R	R	R	R	R	R
24·8	5·1998	19·3	10·4327	19·3	20·7403
29·7	·1986	24·6	·4326	24·6	·7398
35·0	·2006	29·6	·4306	29·6	·7437
40·0	·2021	34·9	·4301	34·6	·7450
45·3	·2013	39·9	·4353	39·6	·7440
50·3	·2026	44·9	·4335		
55·3	·2000	49·9	·4335		

Hieraus folgen unter der gewiss berechtigten Annahme, dass die Correction für fortschreitende Fehler innerhalb einiger Zehntel einer Windung als constant angesehen werden darf, und indem die Verbesserungen für die Windungen 20 und 60 gleich Null angenommen werden, die Gleichungen:

	v		v
$x_1 = -0\cdot0002 + \varphi(30) - \varphi(25)$	-4	$x_2 = +0\cdot0027 + \varphi(30)$	$+2$
$= -0\cdot0014 + \varphi(35) - \varphi(30)$	-15	$= +0\cdot0026 + \varphi(35) - \varphi(25)$	$+13$
$= +0\cdot0006 + \varphi(40) - \varphi(35)$	$+11$	$= +0\cdot0006 + \varphi(40) - \varphi(30)$	0
$= +0\cdot0021 + \varphi(45) - \varphi(40)$	$+7$	$= +0\cdot0001 + \varphi(45) - \varphi(35)$	-18
$= +0\cdot0013 + \varphi(50) - \varphi(45)$	-7	$= +0\cdot0053 + \varphi(50) - \varphi(40)$	$+9$
$= +0\cdot0026 + \varphi(55) - \varphi(50)$	$+7$	$= +0\cdot0035 + \varphi(55) - \varphi(45)$	-13
$= 0\cdot0000 - \varphi(55)$	0	$= +0\cdot0035 - \varphi(50)$	$+7$

	v
$x_3 = +0\cdot0003 + \varphi(40)$	-3
$= -0\cdot0002 + \varphi(45) - \varphi(25)$	-9
$= +0\cdot0037 + \varphi(50) - \varphi(30)$	$+12$
$= +0\cdot0050 + \varphi(55) - \varphi(35)$	$+7$
$= +0\cdot0040 - \varphi(40)$	-8

deren Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate die Werthe der Unbekannten giebt:

$$x_1 = +0\cdot0008 \qquad \varphi(25) = -0\cdot0005 \qquad \varphi(45) = +0\cdot0014$$
$$x_2 = +0\cdot0026 \qquad \varphi(30) = +0\cdot0001 \qquad \varphi(50) = +0\cdot0002$$
$$x_3 = -0\cdot0027 \qquad \varphi(35) = +0\cdot0008 \qquad \varphi(55) = -0\cdot0008$$
$$\varphi(40) = +0\cdot0021$$

Die nach Einsetzung dieser Werthe übrig bleibenden Fehler sind in den Columnen »v« in Einheiten der 4. Decimale angegeben.

Bei vielen oder wohl der Mehrzahl der Mikrometer-Constructionen hat die zweite oder Coincidenzschraube nur einen sehr beschränkten Spielraum, so dass das eben beschriebenene Verfahren nicht angewandt werden kann; in solchen Fällen können aber bisweilen aus den Coincidenzen verschiedener Fäden des festen und beweglichen Systems Relationen zur Bestimmung der fortschreitenden

Fehler abgeleitet werden. Ein Beispiel einer solchen Behandlung bietet die eingehende Untersuchung der Schraube des Hamburger Refractors durch HELMERT[1]). Endlich kann auch hier die Ermittlung der Fehler der Schraube mit der Bestimmung ihres Winkelwerthes aus Sternbeobachtungen verbunden werden.

Bestimmung des Winkelwerthes der Schraube.

Der Winkelwerth einer Mikrometerschraube kann nach drei verschiedenen Methoden bestimmt werden.

1. Man bestimmt die Aequatorealdistanzen der festen Fäden aus Durchgängen von Sternen und vergleicht dieselben mit den durch die Schraube in Schraubenumdrehungen gemessenen Entfernungen. Bezeichnen $F_2 F_1 F_{-1} F_{-2}$ . . die äquatorealen Distanzen, gerechnet von dem mittleren Faden in Bogensecunden, . . $l_2 l_1 l_{-1} l_{-2}$ . . die entsprechenden Abstände in Schraubenwindungen, so hat man zur Bestimmung des Winkelwerthes r oder der Anzahl Secunden, die auf eine Umdrehung gehen, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\cdots\cdots\cdots \\ &u + l_2 r - F_2 = 0 \\ &u + l_1 r - F_1 = 0 \\ &u + l_{-1} r - F_{-1} = 0 \\ &u + l_{-2} r - F_{-2} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wo u eine constante Grösse bedeutet.

Benutzt man bei der Bestimmung der Distanzen Sterne von höherer Declination, so kann es nothwendig werden, die Instrumentalfehler in Rechnung zu ziehen. Bezeichnen $90 - m$ und $90 - n$ den Stundenwinkel und den Polabstand des Kreisendes der Declinationsachse, $90 - k$ und $90 - (k + F)$ die Winkel, welche die durch Mittelfaden und Seitenfaden dargestellten Absehenslinien mit der Declinationsachse (Kreisende) machen, t und t' die Stundenwinkel des Sterns zu den Zeiten, zu denen er sich bei feststehendem Fernrohr unter jenen befand, so ist

$$\sin k = \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (m + t)$$
$$\sin (k + F) = \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (m + t')$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, mit Vernachlässigung höherer Glieder, den Ausdruck zur Bestimmung von F:

$$F = \frac{\sin (t' - t) \cos \delta}{\sin 1''} + \frac{Fn(F + 2k)}{2 \cos^2 \delta} \sin^2 1'' \sin \delta - \frac{Fn^2 \sin^2 1''}{2 \cos^2 \delta} - \frac{Fk(F + k) \sin^2 1''}{2 \cos^2 \delta}.$$

Die Grösse n berechnet sich aus dem Winkel zwischen der Stunden- und der Declinationsachse $90 - i'$ und den Coordinaten des Poles x und y nach der Gleichung:

$$n = i' + x \sin t - y \cos t.$$

Bei der Berechnung von F muss aber noch auf die Strahlenbrechung Rücksicht genommen werden, welche einerseits bewirkt, dass $t' - t$ nicht dem Zeitintervall gleich ist, welches der Stern gebraucht, um von dem einen Faden zum andern zu gelangen und andererseits verlangt, dass in dem obigen Ausdruck für δ die scheinbare Declination angewandt wird. Es ist aber, wenn die Zwischenzeit mit τ^s und der Einfluss der Strahlenbrechung auf Stundenwinkel und Declination mit Δt und $\Delta\delta$ bezeichnet wird,

---

[1]) F. R. HELMERT, a. a. O. Publicationen der Hamburger Sternwarte No. 1.

$$t' - t = 15\tau\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right)$$
$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta,$$

wo δ_0 die von Strahlenbrechung befreite Declination ist. Substituirt man diese Werthe, so erhält man — hier unter Weglassung der von n und k abhängigen Correctionsglieder —

$$F = \frac{\sin 15\tau \cos\delta_0 R}{\sin 1''}, \quad \text{wo} \quad R = 1 + \frac{d\Delta t}{dt} - \tang\delta\Delta\delta,$$

oder unter Einführung der früher abgeleiteten Werthe

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -\frac{dp}{dt} = -\frac{\varkappa \cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta)} - \frac{\varkappa \sin N}{\sin(N+\delta)\cos\delta}$$
$$\Delta\delta = q = \varkappa \cotang(N+\delta)$$
$$R = 1 - \varkappa\left(1 + \frac{\cotang^2 n}{\sin^2(N+\delta)}\right).$$

Setzt man also $\frac{\cotang n}{\sin(N+\delta)} = \tang\psi$, so wird $R = 1 - \varkappa \sec^2\psi$,

folglich, wenn $F_0 = \frac{\sin 15\tau\cos\delta_0}{\sin 1''}$ eingeführt wird,

$$F = F_0 - F_0\,\varkappa \sec^2\psi$$

Befindet sich der Stern im Meridian, so wird $\tang\psi = 0$ und der Correctionsfactor für alle Declinationen constant $= 1 - \varkappa = 1 - 0{\cdot}00028$.

Zur Berechnung von F_0 schreibt man besser

$$\log F_0'' = \log\tau^s + \log 15 + \log\cos\delta_0 - d,$$

wo d die Reduction des Log Sinus auf den Log Bogen ist und einer Hülfstafel[1]) entnommen wird.

In den Berliner Hülfstafeln[2]) ist zur Berechnung der äquatorealen Fadendistanz (daselbst mit f bezeichnet) aus Sterndurchgängen von Polsternen der folgende Ausdruck gegeben:

$$f = \cos\delta\sin(t'-t)\frac{f}{\sin f} - \varkappa\cos\delta\sin(t'-t)[1 + \cotang^2\varphi\sin^2 t] - 2\varkappa\cotang\varphi\sin t\sin^2\frac{t'-t}{2}$$

wo t und t' die Beobachtungs-Sternzeiten am Mittel- und Seitenfaden, δ die (wahre) Declination, φ die Polhöhe und $\varkappa$ den in Bogensecunden verwandelten Refractionscoëfficienten bezeichnen. Dieser Ausdruck, welcher für Distanzen von weniger als 10′ bis zu etwa 15° Poldistanz ausreicht, ist von V. Knorre[3]) durch den umfassenderen ersetzt worden:

$$f = \cos\delta\sin(t'-t)\frac{f}{\sin f} - \varkappa\cos\delta\sin(t'-t)\left(1 + \frac{\cotang^2\varphi\sin^2 t}{\sin^2\delta}\right) - \frac{2\varkappa\cotang\varphi\sin t}{\sin\delta}\sin^2\frac{t'-t}{2}.$$

Statt der festen Fäden kann man sich auch von vornherein des beweglichen Fadens bedienen. Man bringt denselben zuerst auf der einen Seite in eine geeignete Entfernung von dem ihm parallelen und in den Stundenkreis gestellten Mittelfaden und beobachtet eine Anzahl von Sterndurchgängen durch beide Fäden; wiederholt man hierauf dieselben Beobachtungen auf der anderen Seite des

[1]) u. a. in Th. Albrecht, Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig 1894.

[2]) W. Foerster, Sammlung von Hülfstafeln der Berliner Sternwarte. Berlin 1869.

[3]) Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft 29. Jahrgang, pag. 100 u. 30. Jahrgang, pag. 141.

Mittelfadens, so fällt die Coincidenzstellung heraus und die Summe der beiderseitigen Distanzen entspricht der Differenz der Ablesungen der Schraube. Es ist hierbei zweckmässig, den beweglichen Faden beiderseits auf volle Umdrehungen einzustellen, den Abstand aber von Zeit zu Zeit zu variiren, um nicht in constante Fehler zu verfallen. Benutzt man einen Polstern, so beobachtet man besser die Durchgänge ausschliesslich durch den beweglichen Faden, den man successive um eine oder mehrere volle Umdrehungen, oder bei sehr hohen Declinationen, wie z. B. *α Urs. min.*, um aliquote Theile verschiebt. Im ersteren Falle lassen sich dann zugleich mit dem Winkelwerth die fortschreitenden, im letzteren auch die periodischen Fehler bestimmen. Sei, um dies kurz zu erläutern, w_m die Mittelstellung des beweglichen Fadens und man habe aus den beobachteten Zeiten nach den obigen Ausdrücken und nach Verbesserung für Strahlenbrechung folgende Distanzen gefunden:

Stellung des beweglichen Fadens	Distanz
. .	.
. .	.
u	
$w_{m-2} + 0{\cdot}6$	$\mp F_{-2,6}$
$w_{m-2} + 0{\cdot}8$	$\mp F_{-2,8}$
w_{m-1}	$\mp F_{-1,0}$
$w_{m-1} + 0{\cdot}2$	$\mp F_{-1,2}$
$w_{m-1} + 0{\cdot}4$	$\mp F_{-1,4}$
$w_{m-1} + 0{\cdot}6$	$\mp F_{-1,6}$
$w_{m-1} + 0{\cdot}8$	$\mp F_{-1,8}$
w_m	0
$w_m + 0{\cdot}2$	$\pm F_{0,2}$
$w_m + 0{\cdot}4$	$\pm F_{0,4}$
$w_m + 0{\cdot}6$	$\pm F_{0,6}$
$w_m + 0{\cdot}8$	$\pm F_{0,8}$
w_{m+1}	$\pm F_{1,0}$
$w_{m+1} + 0{\cdot}2$	$\pm F_{1,2}$
$w_{m+1} + 0{\cdot}4$	$\pm F_{1,4}$
. .	.
. .	.

Vereinigt man nun die den Stellungen 0·6, 0·8, 0·0, 0·2, 0·4 des beweglichen Fadens entsprechenden Distanzen zu Mittelwerthen, so sind diese frei von dem Einflusse der periodischen Fehler und nur noch mit den fortschreitenden Ungleichheiten behaftet. Leitet man daher aus diesen Mittelwerthen gemäss der Gleichung $v + n\,r = F$, worin v eine unbekannte constante Grösse und n die Anzahl der Schraubenumdrehungen, gezählt von der Mittelstellung aus, bezeichnen, den Winkelwerth r ab, so werden die nach Einsetzung von v und r übrig bleibenden Abweichungen die fortschreitenden Fehler, natürlich behaftet mit den zufälligen Beobachtungsfehlern, darstellen; um sie von diesen zu befreien, unterzieht man sie einer Ausgleichung, welche — bei der Unkenntniss des Gesetzes, welches sie befolgen, — am besten auf graphischem Wege erfolgt. Werden hierauf die einzelnen F von diesen fortschreitenden Fehlern befreit und die mit dem gefundenen Winkelwerth berechneten Distanzen davon abgezogen, so giebt jeder einzelne Unterschied $\Delta =$ Beob. — Rechnung eine Gleichung von der Form:

$$v' + \alpha' \cos a + \beta' \sin a + \alpha'' \cos 2a + \beta'' \sin 2a + \ldots = \Delta,$$

wo v' wieder eine unbekannte constante Grösse darstellt. Aus der Gesammtheit dieser Gleichungen werden dann, indem sie ganz oder gruppenweise für denselben

Bruchtheil einer Windung in Mittel zusammengezogen werden, die Coëfficienten α', β', α'', β'' . . . abgeleitet.

Die Bestimmung des Schraubenwerthes durch Sterndurchgänge setzt voraus, dass das Fernrohr während der Dauer der Beobachtung eines Durchganges seine Lage nicht verändert und namentlich keine Drehung um die Stundenachse erleidet; man muss daher auch thunlichst jede Drehung des Fernrohres um die Declinationsachse vermeiden, da eine solche leicht mit kleinen Verstellungen im Stundenwinkel verknüpft ist.

Ein 2. Verfahren zur Bestimmung des Schraubenwerthes besteht in der Ausmessung einer Distanz von bekannter Grösse, die entweder ein Bogen am Himmel oder durch terrestrische Marken hergestellt sein kann. Um im ersteren Falle einem etwa zu befürchtenden Fehler in der Distanz einen möglichst geringen Einfluss auf die Bestimmung des Winkelwerthes einzuräumen, wählt man eine grössere Declinationsdifferenz zwischen zwei Sternen, die man vermittelst eingeschalteter Zwischensterne stufenweise ausmisst. Sehr geeignet für diese Bestimmung ist der »*AZ*« Bogen im Sternhaufen *h* Persei, welcher eine Amplitude in Declination von 18′·6 umfasst, die durch 8 zwischenliegende Sterne in Differenzen von durchschnittlich 2′ getheilt wird. Da dieser Bogen, sowohl bei grösseren, als bei kleineren Instrumenten häufig angewandt wird, so mögen hier die für die Beobachtung und die Berechnung des Schraubenwerthes nöthigen Angaben folgen. Die Positionen der Sterne für das mittlere Aequinoctium 1900 sind:

Stern	Grösse	AR.	Jährl. Präc.	Decl.	Jährl. Präc.
A	7·2	2^h 12^m 53^s·1	$+4^s$·194	+56° 51′ 26″·0	+16″·78
B	9·5	12 36·5	+4·190	48 32·2	+16·79
C	9·1	11 46·5	+4·183	46 39·5	+16·83
D	8·1	11 26·6	+4·179	44 43·1	+1·684
E	6·5	12 12·1	+4·183	42 26·2	+16·81
F	6·5	12 2·8	+4·180	40 23·5	+16·82
G	9·1	11 39·2	+4·176	38 17·4	+16·84
H	8·6	11 46·9	+4·175	36 16·9	+16·83
I	9·0	11 22·3	+4·171	34 33·0	+16·85
Z	8·4	11 22·5	+4·170	32 49·5	+16·85

Der Unterschied der Declinationen der beiden Endsterne, auf dessen genaue Kenntniss es hier allein ankommt, beträgt nach Beobachtungen am Pulkowaer Verticalkreise und Meridiankreisbeobachtungen eben dort und in Strassburg für das mittlere Aequinoctium des Jahres *t*:

$$\Delta\delta = 18'\,36''\!\cdot\!49 + (t - 1900)\left(-\,0''\!\cdot\!072 - 0''\!\cdot\!005 \cdot \frac{t - 1900}{200}\right).$$

Um den beobachteten Declinationsunterschied *AZ* auf den mittleren Unterschied zu Beginn des Jahres zu reduciren, hat man:

$$\text{Red. auf Jahresanfang} = Aa' + Bb' + Cc' + Dd',$$

wo *A*, *B*, *C*, *D*, die bekannten Bessel'schen Grössen sind, welche in allen grösseren astronomischen Ephemeriden, im Berliner Jahrbuch oder unter der umgekehrten Bezeichnung *C*, *D*, *A*, *B* im Nautical Almanac oder der Connaissance des Temps gegeben werden und die a', b', c', d' die folgende Bedeutung haben:

$$a' = n \sin\alpha_0 \sin\Delta\alpha$$
$$b' = \cos\alpha_0 \sin\Delta\alpha$$
$$c' = \cos\alpha_0 \sin\delta_0 \sin\Delta\alpha + \tang\,\varepsilon \sin\delta_0 \sin\Delta\delta + \sin\alpha_0 \cos\delta_0 \sin\Delta\delta$$
$$d' = \sin\alpha_0 \sin\delta_0 \sin\Delta\alpha - \cos\alpha_0 \cos\delta_0 \sin\Delta\delta.$$

α_0 und δ_0 sind hier die Mittel der Rectascensionen und Declinationen der beiden Endsterne, $\Delta\alpha$ ihr Rectascensions-, $\Delta\delta$ ihr Declinations-Unterschied, ε die Schiefe der Ecliptik, n die bekannte Präcessionsgrösse (20″·05). Die numerischen Werthe dieser Coëfficienten sind

	log a'	*log b'*	*log c'*	*log d'*	*d'*
1895	8·8559	7·7422	7·9136	6·6942	0·00049
1905	8·8591	7·7425	7·9141	6·7224	0·00053

von welchen Logarithmen der Logarithmus der Anzahl von Secunden, die auf eine Umdrehung gehen, subtrahirt werden muss, wenn man die Reduction unmittelbar an den gemessenen Unterschied anbringen will.

Beispiel. Am 9. October 1896 wurde aus Beobachtungen des Perseusbogens der Winkelwerth der Schraube eines REPSOLD'schen Mikrometers am 6zölligen Strassburger Refractor bestimmt. Scheinbarer Parallel. Mitte der Beobachtungszeit $23^h\ 25^m$ St. Zt. Vergrösserung = 175, Focus 48·86, Temperatur + 16°·0 C.

Es wurden folgende Differenzen gefunden, wobei die fortschreitenden und die periodischen Fehler als verschwindend angenommen wurden:

		u
	AB	7·5999
	BC	4·8849
	CD	5·0604
	DE	5·9749
	EF	5·3931
	FG	5·5959
	GH	5·2714
	HI	4·4234
	IZ	4·5879
Summe	*AZ* =	48·7918
Refraction		+ 0·0136
Red. auf 1896·0		+ 0·0077
		48·8131

Die Declinationsdifferenz in Bogensecunden ergiebt sich nach obigem Ausdruck für 1896·0 zu 1116·78 und hiermit eine Umdrehung der Schraube $= \frac{1116 \cdot 78}{48 \cdot 8131}$ = 22″·879.

Der nach diesem Verfahren erhaltene Winkelwerth darf nun strenge nur für solche Distanzen angewandt werden, welche nahe von derselben Grösse sind, wie der mittlere Betrag der gemessenen Unterschiede, und es bleibt zu untersuchen, ob und welche Aenderungen er in Folge der Krümmung und etwaiger Verzerrung des Gesichtsfeldes für kleinere oder grössere Distanzen erleidet. In dem obigen Falle gilt der abgeleitete Schraubenwerth für den mittleren Betrag von $5^u \cdot 4$ symmetrisch zur Mittelstellung, man kann aber denselben Bogen auch benutzen, um das Verhalten des Winkelwerthes für grössere Beträge zu prüfen. Theilt man den Bogen in 5 Theile, *AB*, *BD*, *DF*, *FH*, *HZ*, so wird die mittlere Distanz $9^u \cdot 8$, die Dreitheilung *AD*, *DG*, *GZ* ergiebt im Mittel $16^u \cdot 3$ und die Halbirung *AE* und *EZ* eine mittlere Distanz von $24^u \cdot 4$. Aus der Vergleichung der hieraus bestimmten Schraubenwerthe wird man dann erkennen, in wie weit eine Abhängigkeit von der gemessenen Distanz stattfindet, und im gegebenen Falle eine Interpolationsformel dafür aufstellen. Es darf hierbei aber nicht vergessen werden, dass auch ein constanter Messungsfehler Unterschiede von systematischem

Charakter hervorrufen kann; denn bezeichnet s die Summe der gemessenen Declinationsdifferenzen in Schraubenumdrehungen, d den bekannten Unterschied zwischen den beiden Endsternen, n die Anzahl der partiellen Bögen und v einen constanten Fehler, so wird der wahre Schraubenwerlh $= \frac{d}{s} + \frac{n}{s} \cdot v$, sodass für das obige Beispiel unter Voraussetzung eines constanten Fehlers von 0″·2 in jeder Bestimmung einer Declinationsdifferenz die aus der 9- 5- 3- und 2-Theilung hervorgehenden Werthe um bezw. 0″·037, 0″·020, 0″·012 und 0″·008 fehlerhaft sein würden. Wie dem aber auch sein möge, in allen Fällen wird man, mögen die für verschiedene Distanzen gefundenen Werthe ganz oder nur theilweise aus der Distorsion des Gesichtsfeldes hervorgehen, wenn anders sie hinreichend verbürgt sind, bei der Berechnung von Beobachtungen jedesmal denjenigen Werth annehmen, welcher für die betreffende Zone ermittelt worden ist.

Ein Beispiel der Bestimmung des Winkelwerthes einer Schraube durch terrestrische Objecte bietet die Untersuchung der Schraube des Mikrometers des 15zölligen Pulkowaer Refractors durch O. STRUVE[1]). Auf einer hölzernen Tafel waren auf dunklem Hintergrund fünf weisse Kreise von 0·4 Zoll Durchmesser gezeichnet, deren unter sich nahe gleiche Abstände (etwa 2 Fuss) scharf ausgemessen wurden. Die Tafel wurde in einer gewissen Entfernung vom Fernrohr, welche durch sorgfältige Triangulirung genau bestimmt war (8852 Fuss), senkrecht zur Gesichtslinie aufgestellt und hierauf die Distanz der Mittelpunkte der kleinen Kreise, die unter einem Winkel von 0″·8 erschienen, mit der Schraube gemessen. Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass ein aus derartigen Messungen an terrestrischen Objecten abgeleiteter Schraubenwerth (r') für die Anwendung auf coelestische Beobachtungen noch der Reduction auf Entfernung ∞ bedarf; ist die Hauptbrennweite des Objectivs $= f$ und die Differenz der Focalstellung terrestrisches Object — Sterne $= \Delta f$, so beträgt die Reduction $\Delta r = r' \frac{\Delta f}{f}$.

Ein 3. sehr empfehlenswerthes Verfahren, welches die genaue Kenntniss der Declinationsdifferenz zweier Sterne ganz umgeht, beruht auf der Messung der Declinationsbewegung eines kleinen Planeten gegen einen und denselben genähert bekannten Fixstern. Es habe die Beobachtung zu den Zeiten $t, t', t'', \ldots$ die Unterschiede ergeben $\Delta\delta, \Delta\delta', \Delta\delta'', \ldots$ ausgedrückt in Schraubenrevolutionen, ferner seien die aus der Ephemeride unter Berücksichtigung der Aberrationszeit interpolirten und mittelst der Parallaxe auf den Beobachtungsort reducirten Declinationen des Planeten $\delta, \delta', \delta'', \ldots$ die mittlere Declination des Sternes für den Jahresanfang sei $D + x$ und die Reduction auf den scheinbaren Ort bezw. $R, R', R'', \ldots$ endlich sei $r = r_0 + y$, wo r_0 ein sehr genäherter Werth ist; setzt man dann

$$\begin{aligned} \delta &- (D + R) - \Delta\delta \cdot r_0 = n \\ \delta' &- (D + R') - \Delta\delta' \cdot r_0 = n' \\ \delta'' &- (D + R'') - \Delta\delta'' \cdot r_0 = n'' \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so hat man zur Bestimmung der Verbesserung y die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x + \Delta\delta\, y &= n \\ x + \Delta\delta'\, y &= n' \\ x + \Delta\delta''\, y &= n'' \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

[1]) Observations de Poulcova, Vol. IX.

Für die Anwendung dieser Methode werden hauptsächlich solche Planeten geeignet sein, welche gemäss ihrer Bahnlage eine starke Bewegung in Declination haben, und zugleich hell genug sind, um eine scharfe Einstellung (im hellen Feld) zuzulassen. Da die Sicherheit in der Bestimmung von r von der Genauigkeit der durch die Ephemeride gegebenen Bewegung abhängt, so muss man aus den in den Wochen vor und nachher anderweitig gemachten Ortsbestimmungen die Ephemeridencorrectionen bestimmen und mittelst einer daraus abgeleiteten Interpolationsformel, etwa in der Form $a + bt + ct^2$, die Planetendeclinationen vorher verbessern.

Reduction des Schraubenwerthes auf die Normalstellung der Fadenebene und seine Abhängigkeit von der Temperatur.

Als Normalstellung wird die Stellung der Fadenebene zum Objectiv bezeichnet, bei welcher gleichzeitig mit den Fäden das Sternbild die grösste Schärfe erlangt. Sie ist von der Sehweite des Auges unabhängig[1]) und wird durch eine Scala fixirt, welche sich auf dem im Rohr verschiebbaren Ocularauszug befindet; da aber die Brennweite des Objectivs und die Rohrlänge mit der Temperatur veränderlich sind, so wird auch die Ablesung der Scala für das Zusammenfallen der Bild- und der Fadenebene sich als Function der Temperatur darstellen. Um die hier stattfindende Relation zu ermitteln, bestimmt man unter möglichst verschiedenen Temperaturen in der pag. 140 angegebenen Weise den Focus und leitet unter Annahme der Beziehung zwischen der Normalstellung der Fadenebene (N) und der Temperatur (t) $N = a + bt$ die wahrscheinlichsten Werthe von a und b ab. Kennt man so die einer bestimmten Temperatur zukommende Normalstellung, so verbessert man die einzelnen für den Schraubenwerth gefundenen Resultate, wegen der Abweichung der Stellung der Fadenebene bei der jedesmaligen Beobachtung von der Normalstellung, die ihr gemäss der jeweiligen Temperatur zugekommen wäre, und erhält darauf aus dem Mittel der reducirten Werthe den normalen Winkelwerth der Schraube, welcher dem Mittel der Temperaturen entspricht. Der Einfluss der Temperatur auf diesen Normalwerth ergiebt sich nunmehr aus der Gleichung $\frac{dr}{r} = \frac{ds}{s} - \frac{df}{f}$, wenn s die Höhe eines Schraubenganges und f die Hauptbrennweite bezeichnen. $\frac{ds}{s}$ ist aber gleich dem Ausdehnungscoëfficienten des Materials (Stahl), aus dem die Schraube gefertigt ist, und df oder die Aenderung der Brennweite wird aus der Ausdehnung des Rohres dl plus der Aenderung der Stellung der Ocularzugröhre do, je pro 1° Temperaturänderung gefunden, wobei do positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem der Ocularstutzen heraus- oder hineingeschraubt werden muss. Zur Erläuterung mag die folgende Untersuchung des Schraubenwerthes am 18 zölligen Refractor der Strassburger Sternwarte dienen. Aus zahlreichen an Doppelsternen vorgenommenen Focussirungen in den Jahren 1886 und 1887 war die Normalstellung des Ocularstutzens von Kobold gefunden $N = 2{\cdot}28 - 0{\cdot}0214t$, wo t die Temperatur in C° bezeichnet; ferner hatte sich im Mittel aus 13 Beobachtungen des Perseusbogens, nachdem die gemessenen Amplituden Δ wegen des Unterschiedes zwischen der

[1]) Es gilt dies strenge nur für ein und dieselbe Art der Sichtbarmachung der Fäden; die Einstellung des Auges auf helle und dunkle Fäden ist häufig nicht unbeträchtlich verschieden, und es sollte daher auch die Normalstellung für beide Fälle ermittelt werden.

jedesmaligen Ablesung o der Scala und der für die betreffende Temperatur gültigen Normalstellung N gemäss dem Ausdruck $d\Delta = \frac{(N-o)^{mm}}{f} \cdot \Delta$ verbessert worden waren, die Gleichung ergeben:

$$49{\cdot}4659 r = 1117''{\cdot}49 \text{ oder } r = 22''{\cdot}591 \text{ für } t = +15^\circ{\cdot}8\,\text{C und } N = 1{\cdot}95.$$

Nun ist $\frac{ds}{s} = 11.10^{-6}$, ferner, da das Rohr aus Stahlblech hergestellt ist, $dl = 6916.11.10^{-6}$, und da die Ablesung der Ocularscala abnimmt, wenn das Mikrometer vom Objectiv entfernt wird, $do = +0^p{\cdot}0214$ oder wegen $1^p = 1{\cdot}26\,mm'$ $do = +0{\cdot}027\,mm$, mithin $\frac{df}{f} = (11+4)\ 10^{-6}$ und $\frac{dr}{r} = (11-15)\ 10^{-6}$ oder

$$dr = -0{\cdot}000004 \times 22{\cdot}591.$$

Der Schraubenwerth ergiebt sich also aus dieser Untersuchung

$$r = 22''{\cdot}591 - 0''{\cdot}000090(t^\circ - 15^\circ{\cdot}8);$$

es wird hierbei vorausgesetzt, dass das Ocular sich in der der Temperatur t entsprechenden Normalstellung befindet; für eine Beobachtung, die in einer anderen Stellung o gemacht wäre, würde noch hinzukommen:

$$dr = -\frac{r}{f}(N-o)\,1{\cdot}26 = -0''{\cdot}0041(N-o).$$

III. Doppelbildmikrometer.

Es ist bereits an anderer Stelle auf die aus der Beugung des Lichtes an den materiellen Fäden oder Lamellen entspringenden Nachtheile hingewiesen worden, welche dem Fadenmikrometer und mit ihm allen denjenigen Apparaten anhaften, bei welchen die Messvorrichtung in der Focalebene des Objectives sich befindet. Auch nach einer anderen Richtung geben die bisher besprochenen Mikrometer zu Aussetzungen Anlass. In Folge der ungleichmässigen und wechselnden Erwärmung der Luftschichten und der meist unvollkommenen Ausgleichung der äusseren Temperatur und derjenigen des Beobachtungsraumes sind die zu beobachtenden Objecte nur ganz selten in Ruhe, gewöhnlich oscilliren sie um eine mittlere Lage, von der aus sie sich um grössere oder geringere Ausschläge periodisch entfernen. Sind die zu vergleichenden Objecte einander scheinbar sehr nahe, wie es bei mikrometrischen Messungen engerer Doppelsterne der Fall ist, dann werden die Ausschläge zu derselben Zeit in demselben Sinn und Betrag erfolgen und man wird von ihrem Einfluss mehr oder weniger frei, wenn die Einstellung auf beide Objecte eine nahe gleichzeitige ist; werden sie aber zu verschiedenen Zeiten pointirt oder werden ihre Antritte an einem Faden beobachtet, so werden die Bilder zur Zeit der Beobachtung im Allgemeinen in verschiedenen Phasen sein, und die unvermeidliche Folge ist eine Vergrösserung des zufälligen Fehlers. In derselben Weise wirkt bei den Messungen mit dem Positionsmikrometer ein ungleichförmiger Gang des Uhrwerks, wenngleich hier bei einem einigermaassen guten Regulator die Schwankungen langsamer erfolgen und ihr Einfluss durch rasches und abwechselndes Wenden des Auges von einem Object zum andern leichter aufgehoben werden kann. Von diesen Mängeln sind die Messungen mittelst der Doppelbildmikrometer frei. Das Princip, welches diesen Apparaten zu Grunde liegt, besteht kurz in Folgendem.

Von dem auszumessenden Gegenstand, z. B. einer Planetenscheibe, wird ein doppeltes Bild entworfen, in der Weise, dass der Abstand der beiden Bilder

durch eine an zweckmässig angebrachten Scalen bestimmbare Lagenänderung des sie erzeugenden Apparates oder seiner einzelnen Theile zu einander innerhalb gewisser Grenzen variirt und gemessen werden kann. Bringt man nun die beiden Bilder soweit auseinander, dass der eine Rand des einen und der entgegengesetzte Rand des anderen Bildes sich berühren, so ist der Abstand der Centren beider Bilder gleich dem in der Trennungsrichtung gemessenen Durchmesser. Dasselbe gilt natürlich für die Ausmessung des scheinbaren Abstandes zweier Sterne, wenn die beiden Bilder eines jeden in der Richtung des die Sterne verbindenden Bogens gr. Kr. getrennt und das Bild *a* beziehungsweise *a'* des ersten Sternes und das Bild *b'* beziehungsweise *b* des zweiten Sterns zur Deckung gebracht werden. Zugleich lässt sich daraus die Lage des Bogens oder der Positionswinkel bestimmen, wenn die Drehung des die Verdoppelung erzeugenden Apparates um die Fernrohrachse an einem Positionskreise abgelesen werden kann. Man erkennt sogleich die Vortheile, welche die Messung auf diesem Wege gewährt; indem man es nur mit Bildern zu thun hat, welche zur Coincidenz oder zur Berührung gebracht werden, fallen jene lästigen Beugungserscheinungen weg, ferner braucht das Auge nur auf eine und dieselbe Stelle im Gesichtsfeld gerichtet zu werden, und — was von wesentlicher Bedeutung ist — eine Beeuchtung des Gesichtsfeldes wird nicht erfordert. Diesen Vortheilen steht allerdings der Nachtheil gegenüber, dass durch die Verdoppelung des Bildes die Helligkeit auf die Hälfte reducirt wird.

Das Verdienst, dieses für die Entwickelung der Mikrometrie ungemein wichtige Princip der Doppelbilder zuerst erkannt zu haben, muss dem Engländer SERVINGTON SAVERY zugesprochen werden, wenngleich seine in einer der Royal Society in London 1743 vorgelegten Abhandlung ausgesprochenen Ideen erst geraume Zeit später (1752) gewürdigt wurden, nachdem bereits der Franzose BOUGUER unabhängig von ihm im Jahre 1748 der Pariser Akademie dieselben Gedanken vorgetragen und ihre Ausführbarkeit durch Beobachtungen nachgewiesen hatte. In beiden Fällen ging der Zweck auf eine genaue Bestimmung der Grösse des Sonnendurchmessers und der Veränderungen aus, die er beim Umlauf der Erde um die Sonne erleidet; auch wurde übereinstimmend die Verdoppelung des Sonnenbildes durch zwei Objective oder Objectivsegmente bewirkt, deren Achsen gegeneinander geneigt waren. Während dieselben aber bei SAVERY in einer Röhre fest angebracht waren und der kleine Zwischenraum zwischen den beiden entgegengesetzten Rändern der Sonnenbilder mittelst eines Fadenmikrometers bestimmt werden musste, machte BOUGUER eine der beiden Linsen senkrecht zur Achse verschiebbar und benutzte ihre mittelst einer Schraube gemessene Verstellung zur directen Bestimmung der gesuchten Variationen. Gleichwohl war die Benutzung des BOUGUER'schen Instrumentes, welches nach seinem Vorschlag den Namen »Heliometer« erhielt, sehr beschränkt; denn da die Achsen der beiden Linsen und folglich auch die beiden Bilder nicht zur Coincidenz gebracht werden konnten, so konnte der Nullpunkt weder direct bestimmt noch eliminirt werden und auf die Ausmessung von kleinen Distanzen musste ganz verzichtet werden. Es war daher ein überaus glücklicher Gedanke von J. DOLLOND, an Stelle der zwei Objective ein einziges zu setzen, welches durch einen diametralen Schnitt in zwei Hälften zerlegt war, die längs der Schnittlinie gegeneinander verschoben und um die Rohrachse gedreht werden konnten. Dabei wurde das eigentliche Objectiv des Fernrohrs als ganzes beibehalten und die getheilte Linse, welche eine negative Brennweite erhielt, vor dasselbe gestellt; DOLLOND erreichte dadurch, dass die Brennweite des ganzen Systems und damit auch das Verhältniss

der linearen Verschiebung der Hälften zu dem correspondierenden Winkel grösser wurde, als es sonst der Fall gewesen wäre. Auch wurden diese Objectivmikrometer, wie sie von DOLLOND bezeichnet wurden, vielfach mit Spiegeltelescopen verbunden. Im Uebrigen verblieben sie wesentlich in dieser Gestalt bis auf FRAUNHOFER, der, wie HANSEN treffend bemerkt, in seinem Wirken nicht sich genügend, in die Fusstapfen zu treten, die seine Vorgänger ihm vorgezeichnet hatten, wichtige Verbesserungen schuf. Vor allem verwarf FRAUNHOFER das zweite Objectiv ganz und ersetzte beide durch ein durchschnittenes achromatisches Objectiv; an Stelle der früheren gezahnten Räder führte er feine Schrauben ein, die zur Fortbewegung der Hälften und zur Ausmessung der Verschiebungen dienten; das Instrument wurde mit einem Positionskreis versehen und parallaktisch montirt. Dadurch erlangte das Heliometer mehr und mehr eine selbständige Bedeutung, welche ihm bis auf den heutigen Tag nicht nur geblieben, sondern durch die Erweiterung der ihm gestellten Aufgaben und Dank der Vervollkommnung, die es in den letzten Jahrzehnten in der REPSOLD'schen Werkstätte für Präcisionsmechanik erhalten hat, noch mehr und mehr zugenommen hat.

Indem für eine ausführlichere Beschreibung des Instrumentes und seines Gebrauches auf den Abschnitt »Heliometer« verwiesen wird, sollen hier die Apparate besprochen werden, bei denen dasselbe Princip benutzt, die Verdoppelung der Bilder aber auf eine andere Weise bewirkt wird. Man nennt sie gewöhnlich Ocularheliometer, weil das Bild entweder durch das Ocular selbst oder durch eine in der Nähe des Oculars eingeschaltete getheilte Linse oder durch ein Prisma verdoppelt wird.

Als erstes dieser Ocularheliometer mag genannt werden das

Doppelbildmikrometer von AMICI.

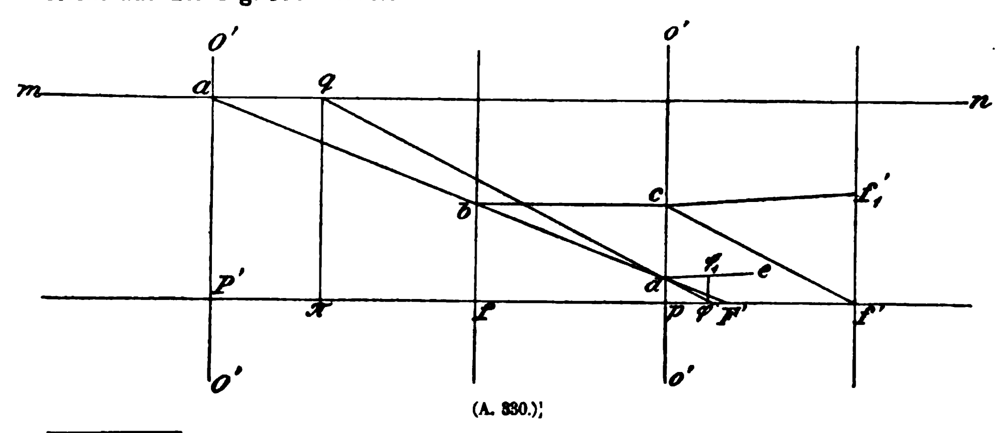
AMICI schaltete in der Nähe des Oculars, zwischen diesem und dem Objectiv eine getheilte positive oder negative Linse, deren beide Hälften längs der Schnittlinie nach der einen oder anderen Seite verschoben werden konnten, in den Strahlenkegel ein[1]), und versah sie mit Scala und Positionskreis zur Bestimmung der Grösse der Verschiebung und ihrer Richtung. ENCKE, welcher einen derartigen, übrigens leicht mit jedem Instrument zu verbindenden Apparat für die Berliner Sternwarte erworben hatte, hebt hervor, dass der Unterschied in der Qualität der Bilder mit und ohne getheilte Linse nur gering und meistens nur durch gewisse Beugungserscheinungen, d. h. Strahlen, die senkrecht auf der Schnittlinie stehen, merklich sei. Um die farbigen Ränder, welche die einfache Linse erzeugt, zu vermeiden, machte v. STEINHEIL die Zwischenlinse achromatisch und gab zugleich den beiden Hälften eine gleichzeitige symmetrische Bewegung nach entgegengesetzten Seiten. Es wurden dadurch »vollkommen scharfe achromatische Bilder« erzielt, und, was sehr wichtig war, die Coincidenzen konnten stets in der Achse des Hauptobjectivs beobachtet werden. Was ersteres betrifft, so scheinen die Erfolge nicht ganz den Erwartungen entsprochen zu haben,

---

[1]) KAISER sagt im III. Band der Annalen der Leidener Sternwarte bei Besprechung des AMICI'schen Mikrometers, der Gedanke wäre nicht neu gewesen, schon LAMBERT habe ein ähnliches Mikrometer erfunden und angewandt und in seinem Werke »Beiträge zum Gebrauche der Mathematik«, pag. 221, beschrieben. Das LAMBERT'sche Mikrometer ist aber nicht ein Ocular- sondern ein Objectivmikrometer gewesen, hergestellt aus einem durchschnittenen Brillenglase von 10 Zoll Brennweite, welches als Objectiv diente, und einer $1\frac{1}{2}$zölligen Ocularlinse. LAMBERT hat dasselbe benutzt, um den Abstand des Kometen vom Jahre 1769 von nahe gelegenen Sternen zu bestimmen.

wenigstens liess das von v. STEINHEIL mit besonders grosser Sorgfalt für die Pulkowaer Sternwarte hergestellte Mikrometer in optischer Hinsicht viel zu wünschen übrig und konnte wegen der geringen Schärfe der. Bilder an dem 15zölligen Refractor nur mit Vergrösserungen bis zu 300 benutzt werden; gleichwohl zeigten die mit demselben ausgeführten Messungen eine befriedigende Uebereinstimmung. W. R. DAWES[1]) hat bei Anwendung des nachher zu beschreibenden AIRY'schen Doppelbildmikrometers eine Bemerkung gemacht, welche auch für das AMICI'sche Mikrometer von Nutzen sein kann. Wenn durch Entfernung der Achsen der beiden Hälften einer durchschnittenen Linse zwei Bilder eines Sterns erzeugt werden, so sind diese Bilder nicht vollkommen rund, sondern durch zerstreutes Licht, welches sich in der auf der Durchschnittslinie senkrechten Richtung und zwar mehr nach der Seite der zugehörigen Linsenhälfte, als nach der entgegengesetzten zeigt, entstellt, sie nehmen eine nahezu ovale Figur an. Es ist dies einerseits die Folge davon, dass durch die Hälfte einer Linse eine Compensation der Aberrationen nicht eintritt und hat anderseits seinen Grund in der Beugung der Lichtstrahlen an der Durchschnittslinie der Linse. Nach den Erfahrungen von DAWES kann man aber die Bilder vollkommen rund machen, wenn man vor das Objectiv des Fernrohrs eine geeignete Blende setzt. Dieselbe muss so beschaffen sein, dass das Licht nur durch zwei kreisrunde Oeffnungen einfällt, die einander berühren, und je einen Durchmesser gleich dem Radius des Objectivs haben; die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte muss senkrecht zur Schnittlinie sein. Dasselbe würde zufolge DAWES ein Schirm leisten, dessen Oeffnung von einer Ellipse begrenzt wird, deren Hauptachsen gleich dem Durchmesser und dem Radius des Objectivs sind. Natürlich lässt die Anwendung einer solchen Blende nur die Hälfte des Objectivs zur Geltung kommen und sie ist daher nur bei grösseren Objectiven und bei helleren Objecten möglich, aber gerade hier pflegt auch die Deformation am störendsten zu sein. Statt das Objectiv selbst mit einer solchen Blende zu versehen, könnte man auch einen ähnlichen Schirm vor die getheilte Linse setzen und sich zugleich mit ihr drehen lassen; man würde dann der jedesmaligen neuen Justirung beim Uebergang von einem Object zum andern überhoben sein.

Die Beziehung zwischen der Verschiebung der beiden Hälften der getheilten Linse und dem Winkel, unter dem die beiden Bilder vom Hauptpunkt des aus ihr und dem Hauptobjectiv gebildeten optischen Systems erscheinen, geht leicht aus der Fig. 330 hervor.



(A. 330.)

[1]) Monthly Notices, Vol. XVIII.

Es mögen bezeichnen $O'O'$ die zweite Hauptebene des Objectivs, P' den zweiten Hauptpunkt, F' den zweiten Hauptbrennpunkt, $o'o'$ die (als unendlich dünn angenommene) getheilte Linse, p ihren Durchschnittspunkt mit der Achse, f und f' die beiden Brennpunkte der in der Hauptachse liegenden Hälfte, f_1' den zweiten Brennpunkt der um die Strecke $f'f_1'$ senkrecht zur Achse verschobenen Hälfte — man ziehe eine Gerade mn parallel zu $P'p$ und verbinde ihren Durchschnittspunkt mit $O'O'$ (a) mit F', diese Gerade treffe die erste Brennebene der zweiten Linse in b und diese selbst in d; durch b ziehe man eine Parallele zur Achse, verbinde ihren Durchschnittspunkt mit $o'o'$ (c) mit f' und ziehe durch d eine Parallele zu cf'; der Schnittpunkt mit der Achse φ ist der Hauptbrennpunkt des vereinigten Systems; ist ferner q der Schnittpunkt der rückwärts verlängerten Geraden $d\varphi$ mit mn, so fälle man eine Senkrechte auf $P'p$, der Fusspunkt π ist alsdann der zweite Hauptpunkt des Systems und $\pi\varphi$ die Hauptbrennweite. Die parallel zur Achse auffallenden Strahlen vereinigen sich demnach durch die erste Hälfte der getheilten Linse im Punkte φ; um den Ort der Vereinigung durch die zweite Hälfte zu erhalten, ziehe man de parallel zu cf_1', und errichte in φ eine Senkrechte auf der Achse, so ist der Durchschnittspunkt φ_1 der gesuchte Ort.

Setzt man

$$P'F' = p$$
$$pf' = pf = q$$
$$pF' = \alpha$$
$$p\varphi = \beta$$

die Verschiebung der einen Linsenhälfte $= f'f_1' = \Delta$

die Verschiebung des zugehörigen Bildes $= \varphi\varphi_1 = \delta$

den Winkel, unter welchem die Verschiebung des Bildes vom Hauptpunkt π des Systems aus erscheint, $= \psi$,

so erhält man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $dp\varphi$ und cpf', dpF' und bfF':

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{q}{q+\alpha} = \frac{q-\beta}{q},$$

ferner aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $d\varphi\varphi_1$ und $cf'f_1'$

$$\delta = \frac{\Delta\beta}{q}$$

und da die Brennweite des Systems $= \frac{pq}{q+\alpha}$ ist, so wird

$$tang\,\psi = \frac{\delta(q+\alpha)}{pq} \text{ oder in Bogensecunden } \psi = \frac{\delta(q+\alpha)}{pq\,sin\,1''} = \frac{\alpha\Delta}{pq\,sin\,1''}.$$

Bei dem von STEINHEIL für den Pulkowaer Refractor construirten Mikrometer war $p = 2880^l$, $q = 720^l$, $\beta = 114^l$, hieraus folgt $\alpha = 135^l{\cdot}44$, die Brennweite des Systems $= 2424^l$ und $\Delta = 0{\cdot}0744\,\psi''$. Durch eine Umdrehung der Schraube wurden die beiden Hälften um $0{\cdot}62^l$ symmetrisch von einander entfernt, die Bilder erschienen mithin um einen Winkelbetrag von 8·35 Secunden getrennt. Da die beiden Hälften bis zu 36^l auseinander geschoben werden konnten, so betrug hiernach der grösste messbare Winkel 8 Minuten; praktisch wird indessen die Grenze erheblich tiefer liegen. Uebrigens sieht man aus der obigen Gleichung, und ist auch ohne Weiteres einleuchtend, dass man durch Vergrösserung oder Verkleinerung von α auch den Winkelwerth der Scala vergrössert oder verkleinert, ein Umstand, von dem DAWES bei seinen Doppelsternmessungen mit dem AMICI'schen Mikrometer Gebrauch gemacht hat[1]).

---

[1]) Mikrometer nach dem Princip von AMICI werden von J. BROWNING in London verfertigt.

Statt die Verdoppelung des Bildes durch eine zwischen Objectiv und Ocular eingeschaltete getheilte Linse hervorzubringen, wollte Ramsden (1779) ein doppeltes Bild dadurch erzeugen, dass er eine der Ocularlinsen selbst in zwei Theile zerlegte, oder, um ein günstigeres Verhältniss zwischen der linearen Verschiebung und dem Winkelwerth zu erzielen und die chromatische und sphärische Aberration möglichst aufzuheben, eine fünfte getheilte Linse in den zweiten Brennpunkt der ersten Ocularlinse (vom Objectiv aus gerechnet) setzte. Ein Vorzug dieses Mikrometers gegenüber dem Objectivmikrometer sollte darin bestehen, dass das Bild bereits vor der eigentlichen Mikrometerlinse stark vergrössert war und die Unvollkommenheiten in der Gestalt der letzteren durch die übrigen Linsen nicht mehr merklich vergrössert wurden, während bei dem Objectivmikrometer die Fehler des zerlegten Glases sich mit der Vergrösserung des ganzen Fernrohres multiplicirten. Uebrigens gab Ramsden selbst seinem katoptrischen Mikrometer, bei welchem der kleine Spiegel eines Cassegrain'schen Reflectors durchschnitten war, den Vorzug. Erst mehrere Jahrzehnte, nachdem Ramsden seinen Vorschlag veröffentlicht hatte, construirte G. Dollond, ohne hiervon Kenntniss zu haben, ein Ocularmikrometer, welches sich wesentlich nur darin von demjenigen von Ramsden unterschied, dass die getheilte Linse sich zwischen der 2. und 3. Linse des Oculars befand, aber noch mit allen aus der Theilung des Lichtkegels hervorgehenden Mängeln behaftet war. Glücklicher und erfolgreicher erwies sich der Gedanke, die zweite Linse (vom Objectiv aus gerechnet) eines viertheiligen terrestrischen Oculars zu durchschneiden und als Mikrometerlinse zu verwenden. Wie erwähnt, hatte Ramsden bereits eine derartige Construction angedeutet; nach Angabe von Pearson[1]), der sich auf Troughton stützt, würde aber die erste Anregung dazu einem Zufall zu verdanken sein, indem man bei einem terrestrischen Ocular, dessen zweite Linse zerbrochen war, die Beobachtung gemacht habe, dass ein mehrfaches Bild eines Lichtpunktes gesehen wurde, wenn die Stücke der zerbrochenen Linse wieder zusammengefügt wurden, ohne sich genau an einander zu schliessen. Wie dem auch sei, der Gedanke wurde aufgenommen und unter anderen von Jones zur Herstellung eines Doppelbildmikrometers verwendet. Es zeigte sich aber bald, dass auch dieser Apparat an zwei Fehlern litt, welche seiner Benutzung zu scharfen Messungen im Wege standen. Der erste Fehler bestand darin, dass die vom Objectiv kommenden Lichtkegel der einzelnen leuchtenden Punkte eines Objectes nach der Brechung durch die erste Linse die zweite getheilte Linse an verschiedenen Stellen trafen und folglich durch die Trennung der beiden Hälften ungleich getheilt wurden. Eine und dieselbe Hälfte erhielt daher von den verschiedenen Punkten des leuchtenden Objectes ungleich viel Licht und die beiden Bilder einer gleichmässig erleuchteten Scheibe erschienen daher ungleichförmig hell und änderten ihre gegenseitige Helligkeit mit dem Orte, den sie im Gesichtsfeld einnahmen. Hierzu kam die Unsauberkeit der Bilder in Folge der Farbenzerstreuung und insbesondere desjenigen Theiles, welcher in der Richtung der Schnittlinie lag. Mochte bei zusammengeschraubten Hälften das Ocular auch durchaus farbenfreie Bilder geben, so musste nothwendig, wenn die eine Hälfte aus der Achse entfernt wurde, der auffallende Theil des Strahlenkegels durch die zur Erzeugung des zweiten Bildes erforderliche Brechung auch eine in derselben Richtung fallende Dispersion erleiden.

---

[1]) Pearson, Practical Astronomy.

AIRY's Doppelbildmikrometer.

AIRY hat bei dem nach ihm benannten Mikrometer die im vorhergehenden erwähnten Schwierigkeiten in sehr sinnreicher und zugleich einfacher Weise beseitigt. Ausgehend von der Erwägung, dass, für die einzelnen Objectpunkte die Achsen der Lichtkegel nahezu parallel auf die erste Linse auffallen und sich im zweiten Brennpunkt derselben vereinigen, brachte er die getheilte Linse in den Brennpunkt der ersten und erreichte dadurch, dass alle Lichtkegel durch die Schnittlinie in je zwei gleiche Theile zerlegt wurden. Dadurch war der erste grosse Uebelstand gehoben. Das AIRY'sche Doppelbildmikrometer in seiner ursprünglichen Form, sowie es von 1840 ab mehrere Jahre auf der Greenwicher Sternwarte benutzt worden ist, ist hiernach ein achromatisches, terrestrisches Ocular, bei welchem die zweite Linse von der ersten dem Objectiv zugekehrten Linse um deren Brennweite absteht. Diese Linse ist durch einen durch die Achse des Fernrohrs gehenden Schnitt getheilt, die eine Hälfte ist fest, die andere durch eine Schraube mit getheiltem Kopf längs der Schnittlinie beweglich. Der ganze Apparat ist mittelst eines gezahnten Rades und eines Triebes um die Fernrohrachse drehbar und die Stellung der Schnittlinie kann an einem getheilten Kreise abgelesen werden. Die Vergrösserung wird durch Austausch der dem Auge nächsten Linse geändert. In vielen Fällen ist es nothwendig, die Helligkeit des durch die eine Hälfte entworfenen Bildes im Vergleich zu derjenigen des anderen Bildes moderiren zu können, und dies geschieht einfach dadurch, dass durch eine geringe Drehung des ganzen Apparates um eine der Schnittlinie parallele Axe der Querschnitt des auffallenden Lichtkegels in einem anderen Verhältniss getheilt wird.

Was die Farbenzerstreuung angeht, so hatte AIRY bei dieser ersten Construction zunächst dafür gesorgt, dass das Ocular an sich, wenn die beiden Hälften zusammengeschraubt waren und nur eine Linse bildeten, völlig achromatisch war, oder dass die verschiedenfarbigen Strahlen, in die ein auf die erste Linse auffallender weisser Strahl zerlegt wurde, in paralleler Richtung in das Auge gelangten und so ein farbenfreies Bild erzeugten. Es ist mit Rücksicht auf das Folgende von Interesse hierauf etwas näher einzugehen[1]). Seien die Brennweiten der 1., 2., 3., 4. Linse beziehungsweise p, q, r, s und die Abstände zwischen der 1. und 2., der 2. und 3., der 3. und 4. Linse a, b, c, dann wird ein Lichtstrahl, der die 1. Linse in einem Abstand m von der Achse trifft, unter der Voraussetzung, dass er als parallel zur Achse angesehen werden kann, nach der Brechung durch die vier Linsen die Achse in einem Punkte schneiden, der — wie aus bekannten Formeln der Dioptrik leicht hervorgeht — um die Grösse

$$v = \frac{sA}{B},$$

wo

$$A = abc - bcp - (a+b)cq - (b+c)ar + cpq + (b+c)pr + (a+b+c)qr - pqr$$

$$B = abc - bcp - (a+b)cq - (b+c)ar - abs + cpq + (b+c)pr$$
$$+ (a+b+c)qr + bps + (a+b)qs + ars - pqr - pqs - prs - qrs$$

von der letzten Linse absteht; und ebenso findet man leicht den Abstand des Punktes, wo er die 4. Linse trifft, von der Achse:

$$u = \frac{mA}{pqr},$$

folglich wird die Tangente des Winkels, den der Strahl nach seinem Austritt aus der 4. Linse mit der Achse des Fernrohrs macht

[1]) Memoirs of the Royal Astronomical Society of London, Vol. XV.

$$= m\left\{\frac{abc}{pqrs} - \frac{bc}{qrs} - \frac{(a+b)c}{prs} - \frac{(b+c)a}{pqs} - \frac{ab}{pqr} + \frac{c}{rs} + \frac{b+c}{qs} + \frac{a+b+c}{ps}\right.$$
$$\left. + \frac{b}{qr} + \frac{a+b}{pr} + \frac{a}{pq} - \frac{1}{s} - \frac{1}{r} - \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right\}.$$

Soll die Bedingung der Achromasie erfüllt sein, so darf dieser Ausdruck sich nicht ändern, wenn der Brechungsindex um ein weniges variirt. Nun ist

$$\delta\frac{1}{p} = \frac{1}{p}\,\frac{\delta n}{n-1}$$
$$\delta\frac{1}{pq} = \frac{2}{pq}\,\frac{\delta n}{n-1}$$
$$\delta\frac{1}{pqr} = \frac{3}{pqr}\,\frac{\delta n}{n-1}$$

u. s. w. und damit wird die zu erfüllende Bedingung, wenn man zugleich die oben geforderte Gleichheit $a = p$ einträgt,

$$o = p\{bc - cq - (b+c)r - bs + qr + qs + rs\} + q\{-3bc + 2(b+c)r + 2bs - rs\}.$$

Ist diese Gleichung erfüllt, was auf unendlich viele Arten möglich ist, so ist das Ocular achromatisch, jedoch nur unter der Annahme, dass die optischen Mittelpunkte der beiden Hälften der 2. Linse zusammen und in die gemeinschaftliche Achse des Oculars fallen. Wird aber die eine oder andere Hälfte verschoben, so wird der Lichtstrahl sie in Punkten treffen, wo die beiden Oberflächen einen grösseren oder kleineren Winkel mit einander bilden, und folglich in einem von der Grösse der Verschiebung abhängigen Grade gebrochen und zerlegt werden. Die daraus hervorgehende Dispersion wird im allgemeinen durch die folgenden Linsen nicht aufgehoben, so dass die beiden Bilder, wo sie sich auch im Gesichtsfeld befinden, farbig erscheinen und zwar da, wo es für die Messung am meisten hinderlich ist, in der Richtung der Schnittlinie selbst.

Um dieser Unvollkommenheit, die auch den früheren Constructionen, insbesondere derjenigen von Jones angehaftet hatte, nach Möglichkeit abzuhelfen, entwickelte Airy in ähnlicher Weise, wie vorher, die Bedingung der Achromasie, wenn die 2. Linse lateral verschoben wird. Bezeichnet α den Winkel, den die Flächenelemente an der Stelle, wo ein in der Richtung der Fernrohrachse auffallender Strahl sie trifft, einschliessen, so wird der austretende Strahl mit der Achse einen Winkel $\vartheta = (n-1)\alpha$ machen und die Aenderung dieses Winkels für einen Strahl vom Brechungsindex $n + \delta n$ wird $\delta\vartheta = \frac{\delta n}{n-1}\cdot\vartheta$.

Die Tangente des Winkels, den dieser Strahl nach der Brechung durch die 3. und 4. Linse mit der Achse einschliesst, ist nun

$$\vartheta\left(\frac{bc}{rs} - \frac{b+c}{s} - \frac{b}{r} + 1\right).$$

Damit dieselbe von kleinen Variationen des Brechungsindex unabhängig sei, muss folglich

$$\left(\frac{bc}{rs} - \frac{b+c}{s} - \frac{b}{r} + 1\right)\delta\vartheta + \vartheta\delta\left(\frac{bc}{rs} - \frac{b+c}{s} - \frac{b}{r} + 1\right) = 0,$$

oder nach kurzer Entwickelung $3bc - 2(b+c)r - 2bs + rs = 0$ sein.

Diese Gleichung gilt zwar nur für einen bestimmten Strahl strenge, kann aber auch für andere Strahlen als nahe richtig angesehen werden. Hält man dieselbe mit der zuerst entwickelten Gleichung zusammen, so reducirt sich diese auf den ersten Theil und der Factor p wird unbestimmt. Man kann folg-

lich die Brennweite der ersten Linse beliebig wählen und hat im Uebrigen die zwei Bedingungen zu erfüllen:

$$bc - cq - (b + c)r - bs + qr + qs + rs = 0$$
$$3bc - 2(b + c)r - 2bs + rs = 0.$$

Da hier zwischen 5 Grössen nur 2 Gleichungen bestehen, so kann man den Bedingungen der Aufgabe noch immer auf viele verschiedene Weisen genügen. AIRY wählte die folgenden Werthe, ausgedrückt in einer beliebigen Einheit:

Brennweite der 1. Linse $= p$ (willkürlich)
Abstand der 1. von der 2. (getheilten) Linse $= p$
Brennweite der 2. Linse $= 5$
Abstand der 2. von der 3. Linse $= 2$
Brennweite der 3. Linse $= 1$
Abstand der 3. von der 4. Linse $= \frac{7}{4}$
Brennweite der 4. Linse $= 1$.

Die äquivalente Linse dieses Oculars hat eine Brennweite von $\frac{4}{5}p$, und die Aenderung der Vergrösserung geschieht hier durch Austausch der dem Objectiv nächsten Linse.

Nachdem die Brennweiten und gegenseitigen Abstände der Linsen festgelegt waren, blieb für die Aufhebung oder möglichste Einschränkung der sphärischen Aberration nur die Wahl der Linsenform übrig; auf Grund einer früheren Untersuchung[1]) gab AIRY den beiden ersten Linsen eine aequiconvexe, den beiden anderen eine planconvexe Form, wobei die ebenen Flächen dem Auge zugekehrt lagen. Waren bei dem nach diesen Grundsätzen construirten Mikrometer die Mängel der früheren Form gehoben, so musste es auf der andern Seite als ein Uebelstand empfunden werden, dass die zweite Linse eine verhältnissmässig grosse Brennweite hatte und daher der Schraube zur Bewegung ihrer Hälften eine starke Steigung gegeben werden musste; auch das Gesichtsfeld war ziemlich beschränkt.

Diesen Mängeln wurde auf Vorschlag von VALZ in Marseille dadurch abgeholfen, dass der zweiten (getheilten) Linse eine negative Brennweite gegeben und an Stelle der obigen Combination die folgende gesetzt wurde, welche auch die Bedingungsgleichungen erfüllt.

Brennweite der 1. Linse $= p$ (willkürlich)
Entfernung der 1. von der 2. Linse $= p$
Brennweite der 2. Linse $= -1$
Entfernung der 2. von der 3. Linse $= 1$
Brennweite der 3. Linse $= 1$
Entfernung der 3. von der 4. Linse $= 3$
Brennweite der 4. Linse $= 1$.

Dieses System ist einer Linse von der Brennweite p äquivalent.

Auch die Form der Linsen wurde etwas verschieden von der früheren Bestimmung gewählt. Die Aberration hatte sich einerseits in einer Unsauberkeit und schlechten Definition der Bilder, andererseits in einer gewissen Verzerrung derselben geäussert. Da beide Fehler sich nicht gleichzeitig wegschaffen liessen und die völlige Aufhebung der Distorsion eine zu grosse Unsauberkeit der Bilder mit sich brachte, so stellte AIRY die Schärfe der Bilder in erste Linie und gelangte so zu den folgenden Formen:

[1]) G. B. AIRY, On the Spherical aberration of the eye-pieces of telescopes, Cambridge Transactions Vol. III.

1. Linse aequiconvex,
2. „ aequiconcav,
3. „ planconvex, mit der ebenen Fläche nach der getheilten Linse zu,
4. „ aequiconvex.

Die für die 2. Linse gewählte Form hatte zugleich den Vortheil des geringeren Lichtverlustes.

Das Airy'sche Mikrometer nimmt unter denjenigen Ocular-Mikrometern, welche auf dem Princip der Linsentheilung beruhen, unstreitig auch heute noch den ersten Rang ein, und über seine Leistungsfähigkeit kann nach den ausgezeichneten Arbeiten Kaiser's kein Zweifel bestehen. Gleichwohl hat es seine bereits von Airy hervorgehobenen Mängel, die glücklicherweise aber nur der Art sind, dass sie die Verwendung des Mikrometers in engere Grenzen einschliessen; Airy selbst und auch Kaiser haben bei ihren Apparaten als Grenze der messbaren Distanzen 90″ angenommen.

Airy hebt unter den seinem Mikrometer anhaftenden Unvollkommenheiten insbesondere folgende hervor:

1) Durch die vier Linsen wird ein Lichtverlust erzeugt, welcher bei schwachen Objecten störend werden kann.

2) Der die zwei Hälften der zweiten Linse trennende Raum hat je nach der Feinheit, mit welcher das Durchschneiden ausgeführt ist, einen grösseren oder geringeren Lichtverlust zur Folge, der um so empfindlicher ist, je stärker die Vergrösserung und je kleiner das auffallende Lichtbüschel ist.

An dem für die Sternwarte in Leiden von Simms in London (1855) hergestellten Exemplar war nach dem Berichte Kaiser's das Durchschneiden der Linse mit einer ganz besonderen Vollkommenheit ausgeführt, so dass man mit unbewaffnetem Auge nur eine äusserst feine Linie zwischen den beiden Glashälften zu sehen vermochte. Auch mit einer stark vergrössernden Lupe konnte man noch kaum einen Zwischenraum entdecken, dagegen sah man bei jeder Hälfte einen schmalen, matten Rand von ungleicher Breite. Kaiser fand die ganze Breite des für das Licht undurchlässigen Streifens im Mittel zu 0·096 *mm*; der Lichtverlust, der daraus unter Anwendung der dem Apparat beigegebenen vier verschiedenen austauschbaren Linsen und bei Benutzung eines 7-zölligen Merz'schen Refractors von 3·2649 *m* Brennweite hervorging, betrug:

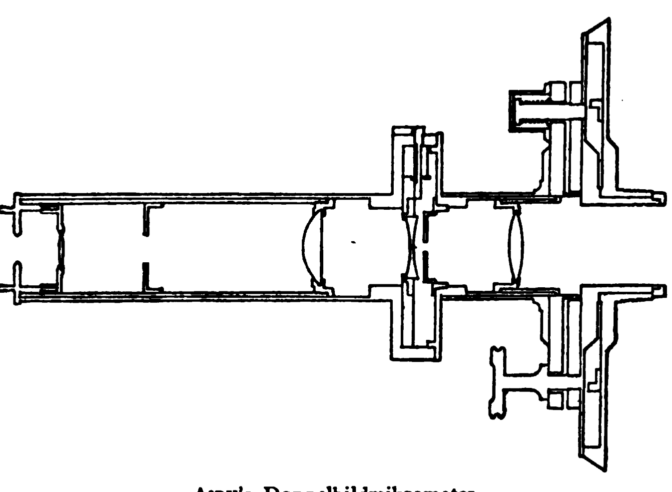
Brennweite der 1. Linse	Vergrösserung	Durchmesser d. Lichtcylinders	Lichtverlust
8·3 *mm*	413	0·482	0·254
13·0	278	0·754	0·162
20·4	178	1·184	0·103
27·2	137	1·579	0·077

Wie man sieht, ist der Lichtverlust namentlich bei den beiden stärksten Vergrösserungen sehr beträchtlich, in runden Zahlen $\frac{1}{4}$ bezw. $\frac{1}{6}$.

3) Ein dritter Nachtheil, den das Mikrometer mit allen auf der Theilung einer Linse beruhenden mikrometrischen Apparaten gemein hat, entspringt daraus, dass jedes der beiden Bilder durch ein Strahlenbüschel mit halbkreisförmigem Querschnitt erzeugt wird. Es wird dadurch, wie bereits früher erwähnt, einerseits die Farbenzerstreuung in der auf der Schnittlinie senkrechten Richtung nicht aufgehoben und zweitens werden die Bilder durch die Beugung des Lichtes an den Rändern der Hälften senkrecht zum Durchschnitt eine längliche Form annehmen und an

Schärfe verlieren. Diese beiden Unvollkommenheiten haben indessen auf die Messung von Distanzen keinen Einfluss, weil die Bilder in der Richtung der Schnittlinie scharf bleiben, sie können aber auf das Urtheil hinsichtlich der nebeneinander zu stellenden Bilder einwirken und daher die Messung von Positionswinkeln beeinträchtigen.

Indem auf die Beobachtungsmethoden selbst weiter unten wird zurückgekommen werden, möge hier nach KAISER[1]) eine kurze Beschreibung des mechanischen Theiles des Apparates gegeben werden, welcher durch die vorzüglichen Messungen dieses Astronomen eine Berühmtheit erlangt hat. Die Fig. 331 a, b, c[2]) werden dabei zur Erläuterung dienen können.

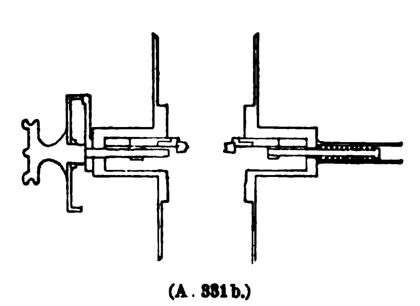


AIRY's Doppelbildmikrometer

(A. 331 a.)

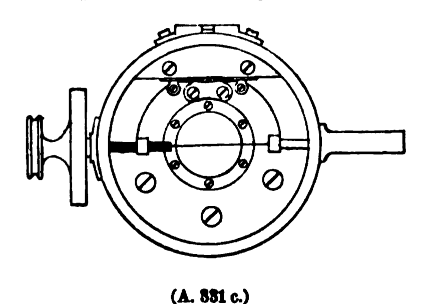
a) Durchschnitt durch die optische Achse senkrecht zur Trennungslinie der beiden Hälften der 2. Linse.

Der Positionskreis des Instrumentes ist eine Scheibe von Messing, mit einem Durchmesser von 4½ Engl. Zoll = 0·115 *m*, welche unmittelbar am Ocularrohr des Fernrohrs angeschraubt wird. Diese Scheibe trägt die Theilung auf ihrem mit



(A. 331 b.)

b) Durchschnitt durch die optische Achse, parallel zur Trennungslinie



(A. 331 c.)

c) Durchschnitt senkrecht zur Achse (2. Linse)

einer Neigung von 45° abgedrehten Rande, so dass die Theilung auf einer Kegelfläche liegt und sich also mit dem Auge senkrecht auf der Fläche der Scheibe und in ihrer Verlängerung gleich leicht ablesen lässt. Um den Mittelpunkt dieser Scheibe dreht sich eine andere, welche zwei schräge Nonien und die übrigen Theile des Mikrometers trägt. Diese Bewegung wird ausgeführt durch

---

[1]) F. KAISER, Annalen der Sternwarte in Leiden, Bd. III, pag. 116 ff. Die Bezeichnung der Linsen ist dort die umgekehrte.

[2]) Verf verdankt dieselben der freundlichen Mittheilung von Herrn H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN

einen Kopf, welcher aus der zweiten Scheibe hervortritt, mittelst Rädern, welche zwischen den Scheiben verborgen sind, und ist gerade so leicht und so schnell als bei Messungen von Positionswinkeln am erwünschtesten erscheint. Auf der zweiten und drehbaren Scheibe liegt ein Metallstück, welches mit zwei Spitzen darauf ruht und an der einen Seite durch eine Schraube an der Scheibe angezogen wird. Dreht man diese Schraube, so lässt sich die Neigung des Metallstücks gegen die Scheibe, in einem auf die Trennung der getheilten Linse senkrechten Sinne ein wenig ändern. Dieses Metallstück hat in seiner Mitte ein Rohr mit einem inneren Durchmesser von 0·025 *m*, welches sich bis zu 0·037 *m* über die Scheibe erhebt. In diesem Rohre wird das eigentliche Mikrometer eingeschoben und mit einer Schraube und einem Klemmring in der gehörigen Lage befestigt. Das eigentliche Mikrometer ist ein Rohr, welches eine Länge von 0·159 *m* und einen Durchmesser von 0·027 *m* hat. An einem Ende dieses Rohres wird ein kurzes Rohr, welches die erste Linse enthält, eingeschoben und durch eine Bajonettschliessung festgehalten. Zur Aenderung der Vergrösserung sind dem Instrumente vier Linsen, mit ihren kürzeren Rohren von gehöriger Länge, beigegeben, wovon jede für sich als erste Linse dienen kann. Diese Linsen haben Brennweiten von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ und 1 Engl. Zoll. Der Theil des grösseren Rohres, worin sich die erste Linse befindet und welcher im Rohre der drehbaren Scheibe eingeschoben wird, hat eine Länge von 0·030 *m*. Hineingeschoben stösst es gegen das feste Rohr durch einen Cylinder, welcher das grössere Rohr umgiebt und eine Höhe von 0·011 *m* bei einem Durchmesser von 0·058 *m* hat. Dieser Cylinder enthält die getheilte Linse, wovon jede Hälfte in einer starken Metallplatte befestigt ist. Die eine Platte ist am Cylinder festgeschraubt, so dass der Mittelpunkt der Glashälfte, welche sie trägt, in die Achse des Rohres fällt. Die andere Platte lässt sich, parallel mit der Basis des Cylinders, verschieben, und wird an der einen Seite durch eine cylindrisch gewundene Feder, an der anderen Seite durch die Mikrometerschraube angezogen. Die Trommel der Mikrometerschraube ist in 100 gleiche Theile getheilt und neben derselben findet sich ein Zeiger, dem Auge des Beobachters zugewandt. Die bewegliche Platte trägt einen Index, welcher durch einen Schlitz am Rande des Cylinders geht und dort auf eine Scala zeigt, welche 50 Windungen der Schraube umfasst. Die Platte lässt sich aber nicht über diesen ganzen Raum bewegen. Die Scala von 50 Schraubenwindungen hat eine Länge von 0·0122 *m*, so dass jede Schraubenwindung 0·24 *mm* beträgt. Die beiden anderen Linsen sind in einem besonderen Rohre befestigt, welches eine Länge von 0·097 *m* hat und an dem Augenende in das grössere Rohr hineingeschoben wird. Dieses Rohr ist in zwei Exemplaren dem Instrumente beigegeben; das eine mit, und das andere ohne Faden im Brennpunkt der dem Auge zugewandten Linse. Das erstgenannte Rohr wird hineingeschoben, wenn man den Aequatorpunkt des Positionskreises zu bestimmen hat.

Bei dem eben beschriebenen Exemplar ist nur die eine Hälfte der getheilten Linse — nach beiden Seiten, wie es die Elimination des Nullpunkts erfordert — beweglich; die andere Hälfte ist dagegen fest, ein Mangel, den der Beobachter um so mehr empfunden hat, als die periodischen Fehler der Schraube, welche, vielleicht durch einen Unfall, ungewöhnlich gross waren, nicht eliminirt werden konnten, sondern durch langwierige Messungsreihen bestimmt werden mussten. Aber auch abgesehen hiervon, würde die Bewegung beider Hälften den Vortheil gewähren, dass die Grenzen, innerhalb deren die Qualität der Bilder Messungen gestattet, geradezu verdoppelt würden. Dabei würde nur die

eine Hälfte mit einer eigentlichen Messschraube ausgestattet zu werden brauchen, wenn sich beide Hälften zusammen auf einer besonderen Platte vor den übrigen Linsen verschieben liessen.

Damit die Bilder, welche von den beiden Linsenhälften entworfen werden, sich vollständig zur Deckung bringen lassen, müssen die optischen Mittelpunkte bei der Verschiebung genau durcheinander gehen. Während bei den (älteren) Objectivmikrometern besondere Correctionsschrauben hierfür angebracht waren, wird bei dem AIRY'schen Mikrometer die kürzeste Entfernung der Bilder geändert, wenn man das ganze Mikrometer ein wenig hinein- oder herausschiebt; man kann daher diese Eigenschaft benutzen, um die Bilder zur Deckung zu bringen, auch wenn die optischen Mittelpunkte nicht genau zusammenfallen. Es könnte allerdings scheinen, dass der Winkelwerth der Schraube sich dadurch ändert; dies ist aber nicht der Fall, wenn nur der Abstand der ersten von der zweiten Linse nahe gleich der Brennweite der ersten Linse ist. Bezeichnet nämlich y den Abstand eines Punktes der Hauptbrennebene des Objectivs von der optischen Achse, e den Abstand von der ersten Linse, und setzt man $e - p = \varepsilon$ und $a = p + \delta a$, so ist die lineare Verschiebung ρ der zweiten Linse, welche erfordert wird, um das Bild in der Fernrohrachse erscheinen zu lassen durch die Gleichung gegeben $\rho = \frac{yq}{p} \frac{1}{1 - \frac{\delta a}{p} \cdot \frac{\varepsilon}{p}}$. Nun wird zwar δa nicht genau gleich Null sein, aber doch bei sorgfältiger Ausführung des Apparates so wenig sich davon unterscheiden, dass, da auch ε im Allgemeinen sehr klein sein wird, das Produkt $\frac{\delta a}{p} \cdot \frac{\varepsilon}{p}$ praktisch als verschwindend angesehen werden kann[1]). Bezeichnet man daher mit F die Hauptbrennweite des Objectivs und lässt nunmehr ρ die Steighöhe der Schraube sein, welche die eine Hälfte verschiebt, so ist $\frac{y}{F \sin 1''} = r = \frac{\rho}{F \sin 1''} \frac{p}{q}$ der Winkelwerth der Schraube. Derselbe ist der Brennweite der ersten Linse proportional und muss für die verschiedenen Linsen, bezw. Vergrösserungen, nach dem später angegebenen Verfahren bestimmt werden. Uebrigens ist es rathsam, die Stellung der Mikrometerröhre mittelst einer kleinen Scala unter Controlle zu halten.

Beobachtungsmethoden.

Es handle sich zunächst um die Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier Sterne. Die Bilder der beiden Sterne, welche von der einen Linsenhälfte entworfen werden, seien (Fig. 332) m und n, die von der anderen Hälfte erzeugten m' und n'. Man bringt durch Drehung des vorderen Theiles des Mikrometers die vier Bilder in dieselbe Gerade und macht mittelst der Schraube der zweiten Linse den Abstand der Bilder n und m' gleich der Entfernung mn oder $m'n'$, hierauf wiederholt man nach Ablesung der

m n m' n'

m' n' m n

(A 332.)

[1]) Vergl. auch J. A. C. OUDEMANS, On the condition, that in a double-image micrometer the value of a revolution of the micrometer screw be independent of the accomodation of the eye M. N. XLVIII.

Schraubentrommel die Beobachtung auf der anderen Seite, indem man nunmehr $n'm$ gleich mn oder $m'n'$ macht. Die Differenz der beiden zugehörigen Ablesungen ist dann gleich der vierfachen Distanz, ausgedrückt in Schraubentheilen. Ferner giebt das Mittel der beiden Ablesungen des Positionskreises den Winkel, den die Richtung des Sternpaares mit der Richtung durch den Nullpunkt des Kreises macht. Bei der Beurtheilung der Gleichheit der Intervalle empfiehlt es sich, die Strecke nm' bezw. $n'm$ sowohl mit mn als auch mit $m'n'$ zu vergleichen und erst diejenige Stellung als definitiv anzusehen, bei welcher die drei neben einander liegenden Strecken unter sich gleich sind. Noch sicherer ist die Anwendung eines total reflectirenden Prismas vor dem Ocular, dessen brechende Kante einmal senkrecht zur Verbindungslinie der Sterne, und dann derselben parallel gestellt wird; im ersteren Falle wird das Bild umgekehrt, und das Mittel aus beiden Einstellungen ist von einem etwaigen systematischen Bisectionsfehler frei. Die Methode der vierfachen Distanzen wird mit Vortheil angewandt, so lange die Entfernung der beiden Objecte eine gewisse Grenze, etwa 10″ bis 15″ nicht übersteigt.

Für grössere Distanzen ist die Messung doppelter Distanzen vorzuziehen, indem man (Fig. 333) die Sterne n und m' einmal auf der einen und ein zweites Mal auf der anderen Seite sich berühren lässt. Dieses Verfahren ist im allgemeinen weniger constanten Fehlern ausgesetzt, als das vorige.

(A. 333.)

Eine dritte Methode, welche unter denselben Umständen anwendbar, an Genauigkeit den anderen Verfahren aber vielleicht nachsteht, erfordert eine verschiedene Einstellung für Positionswinkel und Distanz. Zur Bestimmung der Richtung werden die Bilder (Fig. 334) wieder in dieselbe Gerade gebracht und zwar m' nahe an n gestellt; für die Messung der Distanz dagegen wird m' so gestellt, dass die Verbindungslinie nm' senkrecht steht auf der Linie mn'; die entstehende Figur ist eine Raute, und folglich, wenn die Beobachtung auf der anderen Seite des Nullpunktes wiederholt wird, die halbe Differenz der Ablesungen die gesuchte Entfernung.

(A. 334.)

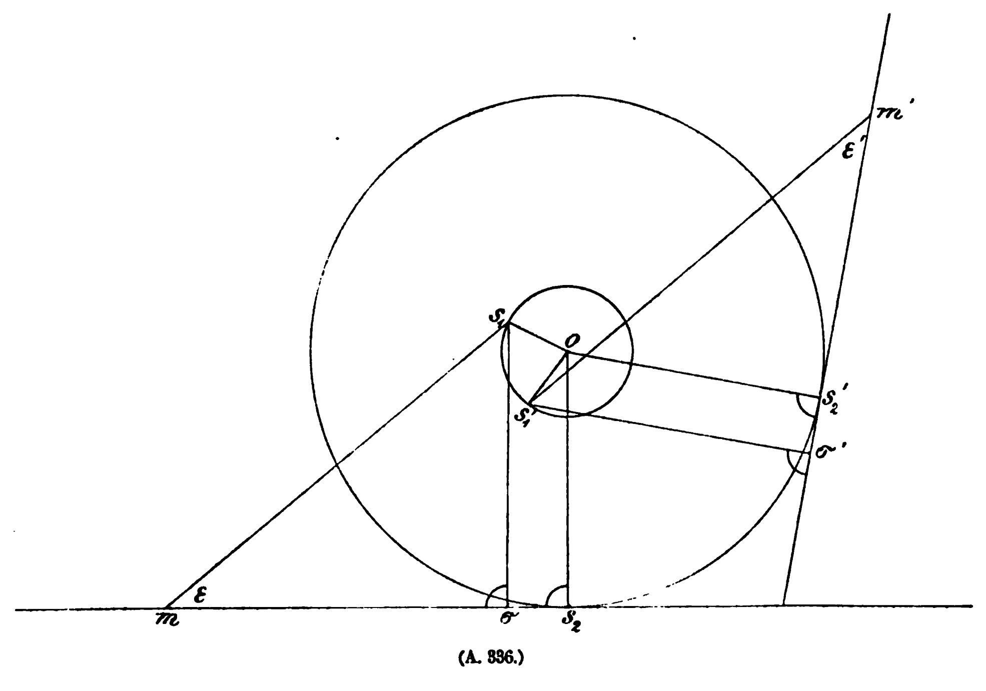
Man kann endlich auch die ungleichnamigen Bilder zur directen Deckung bringen, verfährt dann aber zweckmässig so, dass man die Messung der einen Coordinate durch die andere prüft. Will man Entfernungen messen, so schiebe man die Hälften so weit auseinander, bis bei kleinen Drehungen am Positionskreis das Bild m' genau durch n und in der anderen Lage n' durch m durchschlägt; bei der Messung der Richtungen drehe man den vorderen Theil so lange, bis bei Hin- und Herschieben der einen Linsenhälfte das Bild m' central durch n, bezw. n' central durch m hindurchgeht.

Sind die Entfernungen relativ sehr gross, so kann man sich des Verfahrens einfacher Distanzen bedienen (Fig. 335), indem man die vier Bilder in eine Gerade und m' in die Mitte von m und n bezw. m in die Mitte von m' und

(A. 335.)

n' stellt. Abgesehen von der Unsicherheit, der die Bisection einer grossen Strecke ausgesetzt ist, ist hier, falls die beiden Sterne ungleich an Helligkeit sind, ein constanter Fehler zu befürchten, der auch durch Umkehrung mittelst eines Prismas nicht weggeschafft wird. Bei Durchmesserbestimmungen von Scheiben werden die äusseren Berührungen zu beiden Seiten des Nullpunktes hergestellt; es empfiehlt sich dabei, die Einstellungen jedes Mal in doppelter Weise zu machen, einmal indem man die getrennten Bilder auf einander zu und zweitens indem man die übergreifenden Bilder sich auseinander bewegen lässt, wobei natürlich die Fehler der Schraube sowohl für Vorwärts- als für Rückwärtsbewegung untersucht sein müssen. Sicherer ist es sowohl hier, als bei allen anderen Messungen, die Schraubenfehler dadurch zu eliminiren, dass die Beobachtungen mit verschiedenen regelmässig über eine Umdrehung vertheilten Stellungen der zweiten Linsenhälfte ausgeführt werden. Es ist hier noch auf zweierlei aufmerksam zu machen. Bisher ist vorausgesetzt worden, dass das Mikrometer in Bezug auf das Fernrohr nach dem oben beschriebenen Verfahren so justirt sei, dass die beiden Bilder eines Objectes bei Verschiebung der Linsenhälften genau über einander hinweggehen, oder dass bei einer bestimmten Stellung eine vollkommene Deckung stattfindet. Es wird indessen auch bei sorgfältigster Justirung leicht ein kleiner Fehlerrest bestehen bleiben, den man durch die Anordnung der Beobachtungen und ihre Berechnung wegzuschaffen trachten muss.

Bezeichne in Fig. 336 s_1 den optischen Mittelpunkt der einen (sogen. festen) Linsenhälfte, s_2 den optischen Mittelpunkt der beweglichen Hälfte bei seinem



(A. 336.)

kürzesten Abstand von dem Drehungsmittelpunkt o, σ seinen Ort, wenn er die kürzeste Entfernung von s_1 hat, endlich m seine Lage bei der Messung, dann wird ms_1 eine je nach der angewandten Methode verschiedene Function der Entfernung der beiden Objecte sein, welche, wenn man den Winkel $s_1 m s_2 = \varepsilon$ setzt, ausgedrückt wird durch

$$f(d) = m\sigma \sec \varepsilon.$$

Um die Messung auf der anderen Seite des Nullpunktes zu wiederholen, muss man dem ganzen Apparat eine Drehung um o geben, und es mögen hierbei s_1 und s_2 in s_1' und s_2', m in m' übergehen. Da ms_1 gleich und parallel $s_1'm'$ und $s_1\sigma = s_1'\sigma_1'$, ferner $s_1\sigma m = s_1'\sigma'm' = \frac{\pi}{2}$, so folgt $\varepsilon = \varepsilon'$ und $s_2 o s_2' = 2\varepsilon$ und es wird daher auch $f(d) = m'\sigma' \sec \varepsilon$. Sind die Ablesungen der Schraube bei den Einstellungen bezw. a und a', so ist $m\sigma = \frac{a'-a}{2}$ und folglich

$$f(d) = \frac{a'-a}{2} \sec \varepsilon.$$

Der Winkel, den die Richtung der beiden Sterne mit der Nullrichtung des Kreises macht, ergiebt sich aus den Ablesungen n und n' vermöge der Gleichungen:

$$q = n + \varepsilon$$
$$q = n' - \varepsilon$$

mithin im Mittel $q = \frac{n+n'}{2}$ und $\varepsilon = \frac{n'-n}{2}$

Es geht hieraus hervor, dass das Mittel der zwei Bestimmungen der Richtung, welche bei Verschiebung der einen oder beiden Linsenhälften nach entgegengesetzten Seiten erhalten werden, frei von dem Fehler der unvollständigen Deckung der Bilder ist, dass dagegen die gemessene Distanz mit der Secante des halben Unterschiedes der beiden Kreisablesungen multiplicirt werden muss, um in die wahre Distanz überzugehen. Zugleich folgt hieraus ein einfaches und sicheres Mittel zur Focussirung des Apparates. Man bestimmt auf beiden Seiten des Nullpunktes die Richtung zweier Sterne und stellt das Mittel an den Nonien des Positionskreises ein; hierauf schiebt man das ganze Mikrometer hinein oder hinaus, bis die Richtung, in welcher die Bilder getrennt werden, mit der Richtung von einem Stern zum anderen zusammenfällt.

Wie oben bemerkt wurde, ist nur ein Theil der sphärischen Aberration aufgehoben; zu Gunsten der grösstmöglichen Schärfe der Bilder ist eine Verzerrung übrig geblieben, die sich darin äussert, dass die Bilder eines Doppelsterns sich gegenseitig versetzen, wenn sie an verschiedene Stellen des Gesichtsfeldes gebracht werden. Hat man z. B. das Bild der einen Componente eines Doppelsterns in der Mitte des Gesichtsfeldes mit dem Bilde der anderen zur Deckung gebracht, so gehen die Bilder nicht unbeträchtlich auseinander, wenn man sie in der Richtung der Trennungslinie auch nur ein wenig aus der Mitte des Gesichtsfeldes entfernt. Kaiser hat ausdrücklich auf diesen Umstand aufmerksam gemacht und es für eine zum Gelingen der Beobachtung unerlässliche Vorsichtsmassregel erklärt, alle Messungen an derselben Stelle des Feldes, am besten in der Mitte und symmetrisch dazu auszuführen. Da die gegenseitige Versetzung auf beiden Seiten der Mitte die entgegengesetzte Richtung hat, so hebt sich der Einfluss kleiner, zufälliger Abweichungen aus der Mitte im Mittel aus einer grösseren Anzahl von Messungen auf.

Bestimmung des Winkelwerthes der Schraube.

Die Bestimmung des Winkelwerthes der Schraube eines Airy'schen Doppelbildmikrometers erfordert sehr eingehende Untersuchungen; denn neben der eben erwähnten Versetzung des Bildes hat die Distorsion auch den Effect,

dass die Verschiebung der Bilder der relativen Bewegung der Linsenhälften nicht genau proportional und für verschiedene Distanzen verschieden ist. Auch die Führung der Linse auf einer ebenen Platte muss kleine Ungleichheiten, die von ihrem Abstand von der Coincidenzstellung abhängen, erzeugen, und von ähnlicher Art sind die fortschreitenden Fehler der Schraube. Man könnte letztere nach einer der an anderer Stelle gegebenen Methoden besonders ermitteln und in Rechnung ziehen; es ist aber einfacher und auch sicherer, den Einfluss der optischen Fehler zugleich mit den fortschreitenden Fehlern der Schraube in Function des Abstandes der Linsenhälften von dem Nullpunkt zu untersuchen.

Als einfachstes Mittel zur Bestimmung des Schraubenwerthes bietet sich die Beobachtung des Durchganges der beiden in die Richtung der täglichen Bewegung und in einen gewissen Abstand von einander gestellten Bilder eines Sternes durch einen dazu senkrechten Faden dar. Wiederholt man die Beobachtung bei der entgegengesetzten Stellung der Hälften, so fällt der Nullpunkt heraus, auch ist leicht ersichtlich, dass und auf welche Weise man sich von den periodischen Schraubenfehlern unabhängig machen kann. Wegen des kleineren mittleren Antrittsfehlers wird man hierbei Sternen von höherer Declination den Vorzug geben.

Hat man ein Fadenmikrometer, dessen Schraube genau untersucht ist, zur Verfügung, so lässt sich der Winkelwerth der Schraube des Airy'schen Mikrometers durch Ausmessung der Entfernungen, in welche der bewegliche Faden in Bezug auf die festen Fäden gebracht wird, für beliebige Intervalle bestimmen. Dieser Weg ist nicht nur kürzer, sondern auch mit Rücksicht darauf, dass der Winkelwerth der Schraube des Fadenmikrometers meist aus einem grösseren Bogen ermittelt zu werden pflegt, sicherer. Man kann hierbei von dem Umstand Nutzen ziehen, dass das Object bei dem Airy'schen Mikrometer ausserhalb der Linsen liegt, und daher, wenn keine anderen Hindernisse sind, das Doppelbildmikrometer unmittelbar an Stelle des Mikrometeroculars setzen. Dieses Verfahren wurde von Kaiser eingeschlagen, war aber direct nur bei den beiden schwächsten Vergrösserungen anwendbar; für die anderen stärkeren Oculare wurden die beiden Mikrometer an zwei Fernröhren angebracht, die mit den Objectiven auf einander gerichtet waren. Um die Abhängigkeit des auf diese Weise ermittelten Winkelwerthes von der Grösse des ausgemessenen Bogens zu zeigen, mögen hier die Werthe angeführt werden, welche Kaiser für die Vergrösserung 278 am 7zölligen Refractor von Merz erhielt.

Abgelesene Entfernung u	Winkelwerth für eine Umdrehung
16·85	7''·608
7·09	·567
6·00	·534
5·00	·503
4·02	·471
2·04	·390

Aehnliche Unterschiede wurden auch bei den übrigen Vergrösserungen gefunden, und es schien hiernach der Winkelwerth mit der Grösse der gemessenen Entfernung (bis etwa 10^u) merklich zu wachsen. Indessen durfte dieser Schluss nicht ohne Weiteres aus den auf die angegebene Weise angestellten Beobachtungen gezogen werden; denn wie schon an anderer Stelle erwähnt wurde, konnte das Vorhandensein eines constanten Beobachtungsfehlers auch ohne jede

Distorsion dieselbe Erscheinung hervorrufen. Ist es daher schon aus diesem Grunde nothwendig, bei der Bestimmung des Winkelwerthes sich nicht auf eine einzelne Methode zu beschränken, so machen sich noch andere Gründe dafür geltend. Auch hier werden die Reductionselemente am vortheilhaftesten aus solchen Messungen ermittelt, die mit den anzustellenden Beobachtungen nahe gleichartig sind. Da das AIRY'sche Mikrometer vornehmlich für die Ausmessung der Dimensionen von Planetenscheiben und für Doppelsternbeobachtungen geeignet ist, so wird man seine Untersuchung auch vorzugsweise auf Beobachtungen dieser Art gründen müssen. KAISER benutzte dazu künstliche Scheiben und Doppelsterne, deren anguläre Werthe durch lineare Ausmessung ihrer Durchmesser und Abstände und Bestimmung der Entfernung vom Fernrohr auf das schärfste abgeleitet waren. Auf diesem Wege überzeugte er sich, dass nach den drei von ihm angewandten Methoden der Winkelwerth der Schraube sich mit der Grösse des Bogens veränderlich erwies und sein analytischer Ausdruck die Einführung selbst eines quadratischen Gliedes erforderte. Zugleich ergab sich mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass die indirecten Messungen mittelst des Fadenmikrometers durch einen constanten Fehler entstellt waren, und dass die daraus gefundenen Abweichungen nahe zur Hälfte diesem Einflusse, im Uebrigen der Distorsion zugeschrieben werden mussten. Aber auch dann blieb letztere noch sehr bedeutend; für die zweitstärkste Vergrösserung fand sich der Winkelwerth für Distanzen zwischen 0″ und 75″ $= 7''\cdot4587 + 0''\cdot023719\,u - 0''\cdot0005616\,u^2$, so dass ohne Berücksichtigung der Verzerrung eine Distanz von 52″ mit einem Fehler von 1″ behaftet gewesen sein würde, wenn eine Distanz innerhalb einer Umdrehung richtig gefunden wurde. Für die Messung von Scheiben erhielt KAISER für dieselbe Vergrösserung den (bis etwa 7^u gültigen) Ausdruck: $7''\cdot466 + 0''\cdot0176\,u$, im Ganzen etwas kleiner, was vielleicht darin seine Ursache hat, dass die Bilder im Fernrohr niemals vollkommen scharf sind und vom Beobachter eher zu gross als zu klein gemessen werden, übrigens auch durch die Beugung des Lichtes etwas vergrössert sein können.

Bestimmung des Nullpunktes des Positionskreises.

Um den Nullpunkt des Positionskreises, d. i. die Ablesung zu bestimmen, bei welcher die Trennung der Bilder in der Richtung des Stundenkreises geschieht hat AIRY folgendes Verfahren angewandt. Die schon früher erwähnte zweite Ocularröhre, welche im Brennpunkt der dem Auge nächsten Linse einen dicken (auch ohne künstliche Beleuchtung sichtbaren) Metallfaden enthält, wird an Stelle der gewöhnlichen eingesetzt und so lange gedreht, bis die Trennungsrichtung der Bilder dem Faden genau parallel ist. Man erreicht dies leicht, wenn man nach angenäherter Einstellung einen Stern in das Gesichtsfeld bringt und bei gehendem Uhrwerk die Ocularröhre dreht, bis das Sternbild während des Hin- und Herschraubens der beweglichen Hälfte auf dem Faden bleibt. Hierauf wird das Uhrwerk gehemmt und nunmehr der ganze Apparat gedreht, bis der Stern bei seiner täglichen Bewegung genau auf dem Faden läuft oder — in höheren Declinationen — in gleichen Entfernungen von der Mitte vom Faden bisecirt wird. Ist dies erreicht, so ist offenbar die Richtung des Fadens und folglich auch die Trennungsrichtung der täglichen Bewegung parallel und die Ablesung des Kreises + 90° entspricht dem gesuchten Polpunkt. Da bei diesem Verfahren das Bild des Sterns möglichst weit ausserhalb der Mitte des Feldes beobachtet werden muss, dasselbe hier aber schon sehr unscharf ist, so hat KAISER

eine andere Methode angegeben, welche von diesem Mangel frei ist. Die Röhre wird statt mit einem Metallfaden mit zwei auf einander senkrechten Spinnenfäden versehen und so eingesetzt, dass die Fäden einen Winkel von nahe 45° mit der täglichen Bewegung einschliessen. Zugleich werden die Linsenhälften auseinander geschraubt, jedoch nicht weiter, als es die Schärfe der Bilder in der Mitte des Gesichtsfeldes zulässt. Man dreht nun den beweglichen Theil des Mikrometers so lange hin und her, bis die tägliche Bewegung die beiden Bilder desselben Sterns genau durch den Kreuzungspunkt der Fäden führt. Da der letztere durch die Drehung im Allgemeinen etwas versetzt wird und das Fernrohr von neuem in Declination eingestellt werden muss, so kann man nur durch wiederholte Versuche zum Ziel gelangen, aber das Verfahren ist sicher und verdient namentlich für grössere Distanzen den Vorzug. Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass die gefundene Richtung in beiden Fällen dem scheinbaren Parallel entspricht und die Verbesserung der Beobachtungen wegen der Strahlenbrechung ganz in der Weise ausgeführt wird, wie dies bei dem Positionsmikrometer auseinandergesetzt worden ist.

Berücksichtigung der Phase bei Durchmesserbestimmungen.

Es mögen hier noch die Ausdrücke angeführt werden, welche zur Berücksichtigung der Phase bei Durchmesserbestimmungen dienen. Ist der durch Auseinanderschrauben der beiden Hälften bis zur äusseren Berührung der Bilder in dem Positionswinkel p gefundene Durchmesser σ, so ist nach BESSEL[1])

$$\sigma = 2a' \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \pi} (1 - \cos^2 (\pi - w) \sin^2 \tfrac{1}{2} d),$$

wo π aus der Gleichnng bestimmt wird

$$\tang \pi = \cos \varepsilon \tang (p - P)$$

und die übrigen Buchstaben die frühere Bedeutung (pag. 167 ff.) haben. Mittelst dieses Ausdruckes kann man den in einer beliebigen Richtung gemessenen Durchmesser von der Phase befreien; insbesondere hat man für den polaren Durchmesser wegen $p - P = 0$ und $\pi = 0$

$$\sigma = 2a' \cos \varepsilon (1 - \cos^2 w \sin^2 \tfrac{1}{2} d),$$

oder als Verbesserungsfactor des gemessenen Polardurchmessers

$$\frac{1}{1 - \cos^2 w \sin^2 \frac{1}{2} d}$$

und für den äquatorealen Durchmesser wegen $p - P = \pi = 90°$

$$\sigma = 2a'(1 - \sin^2 w \sin^2 \tfrac{1}{2} d),$$

oder als Verbesserungsfactor des gemessenen Aequatorealdurchmessers

$$\frac{1}{1 - \sin^2 w \sin^2 \frac{1}{2} d}.$$

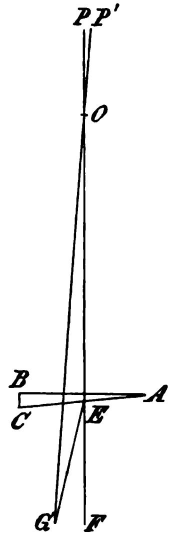
MASKELYNE's Prismenmikrometer.

Das unter diesem Namen construirte Mikrometer beruht auf der Verdoppelung des Bildes mittelst eines Prismas, welches zwischen Objectiv und Ocular in veränderlichem Abstand so eingeschaltet wird, dass ein Theil der Strahlen durch Brechung von ihrem Wege abgelenkt wird und an einer anderen Stelle der Hauptbrennebene (oder genauer einer derselben sehr nahe gelegenen Ebene) zur Vereinigung gelangt.

---

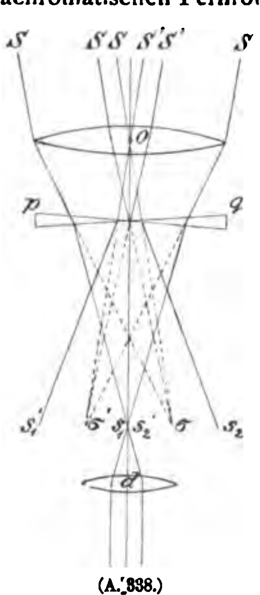
[1]) F. W. BESSEL, Ueber die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe. Astr. Unters. Bd. I. (ENGELMANN, Abh. Bd. I.)

Ist in Fig. 337 O der optische Mittelpunkt des Objectivs, PO die Achse eines senkrecht auf das Objectiv fallenden Strahlenbüschels, F der Vereinigungspunkt der durch das Prisma nicht hindurchgegangenen Strahlen, G der Vereinigungspunkt der abgelenkten Strahlen, und wird der brechende Winkel BAC mit γ, der Winkel FOG mit δ, die Brennweite des Objectivs mit F, der Abstand EF mit f bezeichnet, so ist, vorausgesetzt, dass γ hinreichend klein, $\delta = \frac{(n-1)\gamma f}{F}$. Variirt man demnach den Abstand f, bis dass das abgelenkte Bild eines Objectes P mit dem directen Bild eines zweiten Objectes P' zur Deckung gelangt, so ist die scheinbare Distanz der beiden Objecte $\delta = C \cdot f$, wo C eine für dasselbe Fernrohr und dasselbe Prisma constante Grösse ist, deren Werth leicht durch Beobachtung bestimmt werden kann. Der grösste auf diese Weise messbare Winkel beträgt nahe $\frac{1}{2}\gamma$.



(A. 337.)

Statt eines einzelnen Prismas, welches einen Theil der Strahlen auffängt, kann man auch zwei Prismen in entgegengesetzten Lagen einschalten, in der Weise, dass die einfallenden Strahlen zu einem Theil durch das eine Prisma nach der einen, zum anderen durch das zweite Prisma nach der entgegengesetzten Seite abgelenkt werden. Von dieser Art war die mikrometrische Vorrichtung, welche P. DOLLOND 1776 für MASKELYNE verfertigte[1]); die beiden Prismen waren in Grösse dem Durchmesser des Objectives eines $2\frac{1}{2}$ füssigen achromatischen Fernrohrs gleich und berührten sich mit den brechenden Kanten (s. Fig. 338). Die von einem Objecte S kommenden Strahlen, welche durch das Prisma p gehen, vereinigen sich in s_1, diejenigen, welche durch das Prisma q abgelenkt werden in s_2, und entsprechend werden von dem Objecte S' Bilder in s_1' und s_2' entworfen, je von den Strahlen, welche das Prisma p oder q passiren; mit σ und σ' sind die Orte der Bilder bezeichnet, welche ohne Ablenkung durch die Prismen erzeugt werden. Durch Bewegung des prismatischen Apparates in der Richtung der optischen Achse werden die Bilder s_1 und s_2' zur Deckung gebracht, und aus der an einer Scala ablesbaren Stellung der Prismen kann dann in ähnlicher Weise wie oben die scheinbare Distanz der beiden Objecte abgeleitet werden. Die von MASKELYNE zuerst benutzten Prismen wurden bald hernach, um die Farbenzerstreuung zu vermeiden, durch achromatische ersetzt, und zwar kamen zwei Sätze zur Anwendung, der eine diente für grosse Winkel, zur Bestimmung der Durchmesser von Sonne und Mond, der Entfernung der Hörnerspitzen bei Finsternissen u. s. w., der andere mit kleinerem brechenden Winkel war für Winkel bis zu einer Minute, insbesondere für die Messung von Planetenscheiben bestimmt. Es war dies schon deshalb nothwendig, weil bei zu grosser Annäherung an den Focus ein erheblicher Theil des an sich schon kleinen Querschnittes des Lichtkegels an der Stelle, wo die Prismen zusammenstiessen, ver-



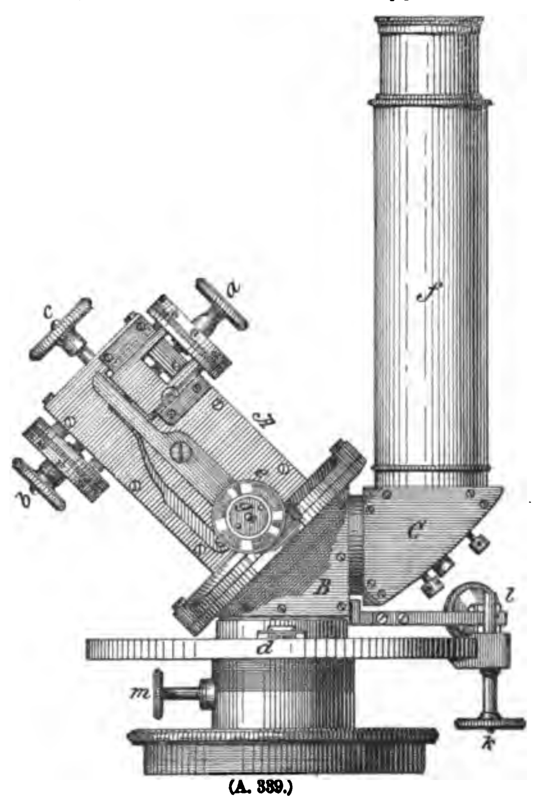
(A. 338.)

[1]) Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1777.

loren ging. Anstatt den Abstand der Bilder durch die Verschiebung der Prismen längs der Fernrohrachse zu ändern, machte BOSCOVICH[1]) den Vorschlag, innerhalb des Fernrohres (oder auch unmittelbar vor dem Objectiv) ein Doppelprisma anzubringen in Form von zwei achromatischen Prismen von gleicher Brechung, von denen das eine auf dem anderen um messbare Winkel gedreht werden konnte, so dass die Ablenkung sich zwischen den Grenzen 0 und dem doppelten Betrag der Brechung jedes einzelnen Prismas bewegten. Ausserdem sollte die Bewegung in der Richtung der optischen Achse beibehalten werden, um kleinere Aenderungen in der Entfernung der Bilder hervorbringen zu können. Weder dieser Vorschlag, noch auch das MASKELYNE'sche Mikrometer ist für die mikrometrischen Messungen von Bedeutung geworden.

STEINHEIL's Ocular-Prismen-Mikrometer.

Bei dem von C. A. v. STEINHEIL construirten Doppelbildmikrometer[2]) werden die doppelten Bilder durch Reflection an spiegelnden Flächen erzeugt, welche gegen einander geneigt werden können; als solche dienen die Hypothenusenflächen von total reflectirenden Prismen. Der Apparat ist in Fig. 339 dargestellt. In dem Gehäuse *A* befinden sich am unteren Ende und in den gleichgeformten prismatischen Raum *B* eintretend zwei rechtwinklige Prismen, die neben einander gestellt sind und, das eine durch die Schraube *a*, das andere durch die auf der entgegengesetzten Seite liegende Schraube *b* um eine auf der Ebene der Zeichnung senkrechte Achse gedreht werden können. Der Betrag der Drehung wird auf den getheilten Trommeln und für die ganzen Revolutionen an kleinen Scalen, von denen die eine in der Figur sichtbar ist, abgelesen. Die von einem Punkte der Focalebene des Fernrohrs ausgehenden Strahlen werden durch eine unmittelbar unter den Prismen befindliche Linse von etwa 10 *cm* Brennweite parallel gemacht, an den Hypothenusenflächen total reflectirt und treten nach einer nochmaligen Reflection in dem total reflectirenden Prisma *C* in das Fernrohr *f*; hier entstehen zwei Bilder, deren Abstand genähert proportional ist der Neigung, welche die spiegelnden Flächen der beiden Prismen mit einander machen. Die Lichtbüschel bleiben, wie v. STEINHEIL besonders

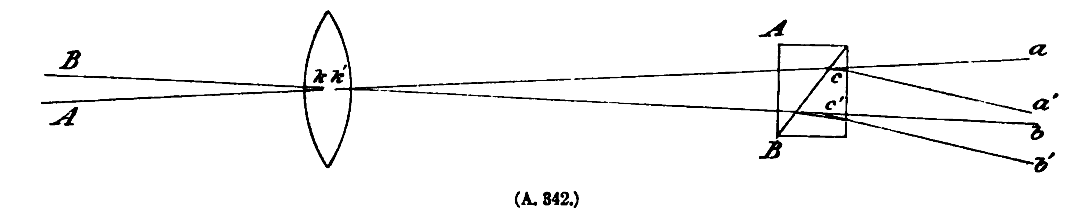


(A. 339.)
Ocular-Prismen-Mikrometer von v. STEINHEIL.

[1]) Phil. Trausactions 1777.

[2]) Astr. Nachr. Bd. 26. — Siehe auch Central-Zeitung für Optik und Mechanik. VI. Jahrg.

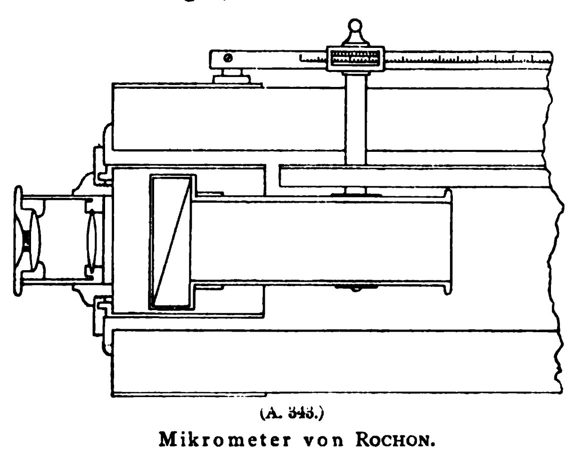
nahezu constanten Winkel abgelenkt. Bringt man ein solches Prisma in den vom Objectiv eines Fernrohrs ausgehenden Strahlenkegel, so dass die optische Achse annähernd senkrecht auf der Prismenfläche AB steht (Fig. 342), so werden



(A. 342.)

von einem Objecte, z. B. einer Planetenscheibe in der Vereinigungsebene der Strahlen zwei Bilder entstehen; das eine ab, gebildet durch die ordentlichen Strahlen, das andere $a'b'$ durch die ausserordentlichen Strahlen. Die Entfernung der Bilder von einander ist eine Function einerseits der Grösse der Ablenkung des Prismas und andererseits des Abstandes des Convergenzpunktes der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen von der Brennebene; da jene eine constante Grösse ist, so kann man folglich durch Aenderung dieses Abstandes die Bilder mit ihren ungleichnamigen Rändern zur Berührnung bringen und aus der Lage des Prismas ihre scheinbare Grösse berechnen.

Auf diese Weise lassen sich alle Winkel messen, welche zwischen 0 und dem Winkel liegen, den die ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen beim Verlassen des Prismas einschliessen. Was die Beziehung zwischen der Stellung des Prismas bei der Berührung der Bilder und dem zu messenden Winkel angeht, so sei F die Hauptbrennweite des Objectives, f der Abstand der Punkte c von der Hauptbrennebene, wenn a' mit b zusammenfällt, δ der Ablenkungswinkel $aca' = bc'b'$, x der gesuchte Winkel $BkA = ak'b$, dann ist $x = \frac{f}{F} \cdot \delta$.



(A. 343.)
Mikrometer von ROCHON.

Bezeichnet nun m die Ablesung der Scala, welche die Stellung des Prismas angiebt, und m_0 den Indexfehler, mithin $f = m - m_0$ und setzt man $\frac{\delta}{F} = k$ und $-\frac{\delta}{F} m_0 = k_0$, so wird $x = km + k_0$, wobei F in Theilen der Scala ausgedrückt gedacht wird. Die beiden Grössen k und k_0 können aus mindestens zwei Objecten von bekannter Winkelgrösse bestimmt werden, doch müssen eingehendere Untersuchungen entscheiden, ob und in wie weit sie als constant angesehen werden dürfen. In jedem Falle liegt eine Schwäche des Apparates darin, dass der Nullpunkt nicht eliminirt werden kann.

Das ROCHON'sche Mikrometer (s. Fig. 343) ist von ARAGO auf der Pariser Sternwarte zu zahlreichen Messungen der Planetenscheiben benutzt worden. Dasselbe war zu diesem Zweck mit einem Fernrohr von 162 mm Oeffnung und einer

Brennweite von 2·350 *m* verbunden. Zur Bestimmung der beiden Constanten dienten weisse und schwarze Kreise und Streifen auf schwarzem bezw. weissem Papier, welche an einem Fenster des Palais Luxembourg angebracht waren und deren Winkelwerthe der Beobachter aus ihrer linearen Grösse und der Entfernung der Station abgeleitet hatte. Im Mittel aus mehreren Messungen ergab sich $m_0 = 75^p{\cdot}78$; da aber bei der Entfernung von 1306·9 *m* die Vereinigungsweite 2·35506 *m* betrug, so mussten zur Reduction auf ∞ noch 5·06 *mm*, oder da 1 *mm* = 1·77315 Theilen der Scala war, $8^p{\cdot}97$ zu dem gefundenen Werthe addirt werden, so dass für unendliche Entfernung der Nullpunkt bei $84^p{\cdot}75$ lag; ferner ergaben dieselben Beobachtungen $12^p{\cdot}979 = 1''$. Als Beispiel der Anwendung diene eine Beobachtung ARAGO's am 13. November 1810. ARAGO maass an diesem Tage kurz vor Untergang der Venus die Distanz der beiden Hörnerspitzen, indem er durch Drehung des Mikrometers zuerst die Hörnerlinien in eine Gerade und hierauf die Bilder in Berührung brachte. Aus 8 Einstellungen, welche die Ablesungen 568, 561, 555, 543, 550, 553, 545, 540 ergaben, folgte im Mittel $551^p{\cdot}88$ und hieraus in Verbindung mit den obigen Constanten

$$\frac{551{\cdot}88 - 84{\cdot}75}{12{\cdot}979} = 35''{\cdot}99$$

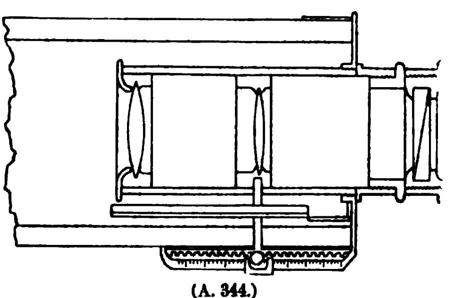
(entsprechend einer Entfernung des Planeten von der Erde = *num log* 9·6764). In der obigen Bezeichnung würde $k_0 = -6''{\cdot}53$ und $k = \frac{1}{12{\cdot}979}$ sein; die Ablenkung δ betrug bei dem angewandten Prisma 321″.

Bei dem häufigen Gebrauch, den ARAGO von dem ROCHON'schen Mikrometer gemacht hat, konnten ihm auch seine Mängel nicht entgehen. Er hebt insbesondere deren zwei hervor; einmal war die Achromasie für beide Bilder nicht gleich vollkommen und zweitens wurden, wenn das Prisma bei der Bestimmung des Indexfehlers der Scala oder bei der Messung sehr kleiner Winkel dem Ocular sehr nahe gebracht werden musste, die geringsten Fehler innerhalb des Krystalles oder im Schliff der Flächen erheblich vergrössert. Diese Mängel des ROCHON'schen Mikrometers haben ARAGO Anlass zu anderen Constructionen gegeben, die man indessen kaum als Verbesserungen bezeichnen kann; denn wenn auch die genannten Unvollkommenheiten dabei vermieden sind, so sind andere Nachtheile und Unbequemlichkeiten dafür eingetauscht worden, welche ihre dauernde Einführung in die astronomische Praxis ausgeschlossen haben. Indessen verdienen sie, weil ARAGO selbst sie benutzt hat und auch aus geschichtlichem Interesse, hier erwähnt zu werden. Bei dem

Mikrometer mit veränderlicher Vergrösserung von ARAGO

ist ein sehr dünnes achromatisches Bergkrystallprisma vor das Ocular gesetzt, an die Stelle, wo man bei Sonnenbeobachtungen das Blendglas anzubringen pflegt, und der Contact der beiden Bilder wird dadurch hervorgebracht, dass der Abstand der beiden Linsen des zusammengesetzten Oculars und dadurch die Vergrösserung des Fernrohrs geändert wird. Man erhält daher unmittelbar die scheinbare Grösse des Objectes, wenn man den unveränderlichen Winkel der Doppelbrechung des Krystalles durch die Vergrösserung dividirt, bei welcher die Bilder einander berühren. Um den gegenseitigen Abstand der beiden Linsen zu ändern, ist die dem Auge zunächst befindliche Linse mittelst einer gezahnten

Stange (s. Fig. 344) verschiebbar gemacht, und ihr jeweiliger Stand kann an einer Scala abgelesen werden. Die Vergrösserung muss in Function dieser Ablesung durch besondere Versuche bestimmt werden. In dem 11. Bande der von BARRAL herausgegebenen Werke ARAGO's finden sich einige Messungen des Marsdurchmessers, welche mit einem derartigen Mikrometer angestellt sind. So wurden am 23. September 1815 die beiden Bilder der Marsscheibe in der Richtung des polaren Durchmessers zur Berührung gebracht und die Ablesung der Scala ergab dafür 67·50. Da die Vergrösserung des Fernrohrs bei dieser Stellung der beweglichen Linse 102·50 und der Winkel der Doppelbrechung bei dem angewandten Prisma 2173″ betrug, so berechnet sich der polare Durchmesser der Marsscheibe zu $\frac{2173}{102 \cdot 50} = 21'' \cdot 20$, ein Werth, welcher nach den Rechnungen von HARTWIG[1]) wegen der Phase noch um 0″·27 vergrössert werden muss und dem *log* der Entfernung 9·6478 entspricht. Abgesehen von der Umständlichkeit des Verfahrens, insofern bei jeder Aenderung im Abstand der beiden Linsen eine neue und scharfe Berichtigung des Focus erforderlich wird, hat das ARAGO'sche Mikrometer den grossen Nachtheil, dass gerade diejenige Grösse, von welcher die Aufhebung der chromatischen und sphärischen Aberration wesentlich abhängt, veränderlich gemacht wird, und dass mithin die Berührung der beiden Bilder meist nur auf Kosten ihrer Schärfe hergestellt werden kann. Auch muss die Vergrösserung in ihrer Abhängigkeit von der Stellung der ersten Linse sehr genau bekannt sein; ein Fehler von 1$\mathfrak{g}$ würde im obigen Beispiel bereits einen Fehler von 0″·2 erzeugen. Ueberdies ist das ganze Verfahren unausführbar, wenn man sich einfacher Oculare und sehr starker Vergrösserungen bedienen will. Diese offenbaren Schwächen haben ARAGO noch zu einer anderen Construction veranlasst, welche zum Unterschied von der vorigen als


(A. 344.)
Mikrometer mit veränderlicher Vergrösserung von ARAGO.

Ocularmikrometer mit constanter Vergrösserung von ARAGO

bezeichnet wird. Wie aus diesem Namen hervorgeht, verbleiben hier die Linsen in demselben, den Bedingungen für die Achromasie und der möglichsten Verminderung der Kugelabweichung entsprechenden gegenseitigen Abstand, und auch das Prisma behält seine Stelle zwischen Ocular und Auge bei. Um aber die beiden Bilder eines Objectes in allen Fällen mit einander in Berührung bringen zu können, wird das Vorhandensein einer grossen Anzahl von Prismen vorausgesetzt, welche ein wenig breiter als die Pupille des Auges sind und Ablenkungen von den kleinsten Beträgen an bis zu den grössten geben, so dass die Winkel der einzelnen aufeinander folgenden Prismen sich kaum um 30 und selbst nur um 15 Secunden unterscheiden. Diese Prismen werden immer in grösserer Zahl (7) in einem Schieber befestigt, der sich vor dem Ocular auf- und abbewegen lässt, und dasjenige Prisma wird vom Beobachter ausgesucht, bei welchem die beiden Bilder einander berühren; der Quotient aus dem

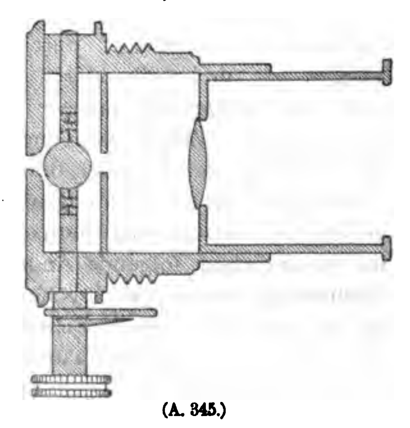
[1]) E. HARTWIG, Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars. Public. d. Astr. Ges. XV.

für dasselbe geltenden Winkel der Doppelbrechung und der für dasselbe Ocular constant bleibenden Vergrösserung ist die scheinbare Grösse des Objectes. Da die Prismen hinsichtlich der Ablenkung zwar in kleinen Stufen aber nothwendig discontinuirlich einander folgen, so kann der Fall eintreten, dass das eine Prisma die Bilder nicht hinreichend von einander trennt, das nächstfolgende sie aber zu weit auseinander rückt; das Mittel der aus beiden Prismen berechneten Werthe bleibt dann um höchstens $\frac{i}{2v}$ unsicher, wenn i das Intervall zwischen den beiden Brechungen und v die Vergrösserung bezeichnet, für $i = 15''$ und $v = 200$ also um $0''\cdot04$.

Mit Recht aber fragt HANKEL[1]), »welche übergrosse Menge von derartigen Prismen wäre nothwendig, um nur die Ausdehnung der gewöhnlich vorkommenden Planetendurchmesser oder des gegenseitigen Abstandes bei den Doppelsternen zu umfassen? Um nur bis zu einer Bogenminute messen zu können (so gross erscheint etwa Venus in der unteren Conjunction), wären schon mehr als achthundert Prismen von der beschriebenen Art erforderlich.«

Doppelbildmikrometer von G. DOLLOND.

Ein sehr einfaches und sinnreiches, und für kleine Winkel recht brauchbares Mikrometer ist das Doppelbildmikrometer von G. DOLLOND, dessen Construction aus Fig. 345 ersichtlich ist. Die erste Linse des zweitheiligen Oculars ist eine Kugel aus Bergkrystall, welche sich um eine auf der optischen Achse des Fernrohres senkrechte Achse drehen lässt. Die Kugel ist so gelagert, dass ihre krystallische Hauptachse in einer auf der Umdrehungsachse senkrechten Ebene liegt. Steht die Hauptachse parallel der optischen Achse oder senkrecht auf ihr, so ist das Bild einfach, dagegen wird dasselbe verdoppelt, wenn beide Achsen einen Winkel zwischen 0° und 90° einschliessen und das Maximum der Entfernung tritt bei 45° ein. Um dem Sehfeld eine grössere Ausdehnung zu geben, ist zwischen Kugel und Hauptbrennpunkt des Objectives eine convergente (biconvexe) Linse eingeschaltet; zugleich kann durch Aenderung des Abstandes derselben von der Kugel die Vergrösserung geändert werden. Letzteres Verfahren ist aus denselben Gründen, welche gegen das ARAGO'sche Mikrometer angeführt sind, zu verwerfen, und es dürfte zweckmässiger sein, an Stelle einer Linse mehrere (von verschiedener Brennweite) bereit zu haben, welche ausgetauscht und in bestimmten Abständen in die Ocularröhre eingesetzt werden können.



(A. 345.)
Doppellbildmikrometer von G. DOLLOND.

DAWES hat bei seinen Doppelsternmessungen[2]) mehrfachen Gebrauch von diesem einfachen Apparate gemacht, und lobt die ausgezeichneten Bilder, welche die beiden von ihm benutzten Mikrometer gaben; freilich war ihre Anwendung in enge Grenzen eingeschlossen, die grösste messbare Distanz betrug für eine

[1]) W. G. HANKEL, Populäre Astronomie von FRANZ ARAGO, Bd. II, pag. 164.

[2]) W. R. DAWES, Catalogue of Micrometrical measurements of Double Stars. Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. XXXV.

Vergrösserung von 100 etwa 13'' bis 14'' und wurde, da sie im umgekehrten Verhältniss zur Vergrösserung steht, sehr klein, wenn das Mikrometer mit einem Fernrohr von grosser Brennweite verbunden wurde. Nach den empirischen Untersuchungen von Dawes hat die Distanz der Bilder den einfachen Ausdruck $d = r \sin 2\vartheta$, worin r die Maximalamplitude für die Focallänge des Fernrohres und ϑ den Drehungswinkel bezeichnet, gezählt von der Stellung der Krystallachse aus, in welcher die Bilder sich decken. Man eliminirt letztere, wenn man zwei Einstellungen auf beiden Seiten des Nullpunktes oder noch besser vier Einstellungen, je eine in jedem Quadranten mit einander verbindet. Ist der Apparat mit einem Positionskreis versehen, so können auch Positionswinkel gemessen werden.

Mikrometer von V. WELLMANN.

Es ist an anderer Stelle erwähnt worden, in welcher Weise ein doppelt brechendes Prisma, welches vor das Ocular eines Fernrohres gesetzt wird, durch Drehung um die Gesichtslinie benutzt werden kann, um eine für die Untersuchung der Fehler einer Mikrometerschraube geeignete Distanz zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Bilde eines Fadens herzustellen. Dasselbe Princip hat sich in der Folge auch als sehr brauchbar für Messungen am Himmel erwiesen. O. Lohse in Potsdam hat davon bei der Opposition des Mars 1883—84 und in den folgenden Jahren Anwendung gemacht, um den Positionswinkel eines der beiden Polflecke zu messen; er brachte vor dem Ocular ein Kalkspathprisma an, welches durch Aufkitten eines Glaskeils achromatisch gemacht worden war, und stellte durch Drehung am Positionskreis des Fadenmikrometers die Mittelpunkte der beiden Bilder des Planeten und des Polfleckes in eine gerade Linie. Zur Bestimmung des Nullpunktes wurde das Prisma gedreht, bis das Bild eines der täglichen Bewegung parallel gestellen Fadens einfach erschien. Einen nicht nur für Richtungsbeobachtungen, sondern auch für Distanzmessungen geeigneten Apparat hat hernach V. Wellmann (1889) construirt. Derselbe hat im wesentlichen folgende Anordnung. Das Ocular, vor welchem sich in fester Verbindung das doppelt brechende Prisma (anfänglich ein Rochon'sches) befindet, ist in eine kreisförmige Scheibe eingeschraubt, welche innerhalb eines Kreises drehbar ist und deren relativer Stand mittelst zweier an ihr befestigter Nonien auf der Kreistheilung abgelesen werden kann. Der Kreis, welcher ein Fadenkreuz trägt, kann seinerseits um die Fernrohrachse gedreht werden und nimmt hierbei auch die Scheibe sammt Ocular und Prisma mit; zur Bestimmung des Drehungswinkels dienen zwei Nonien, die an dem Fernrohr befestigt sind. Um beim Drehen der inneren Kreisscheibe ein Mitnehmen des Kreises zu verhüten, ist eine Klemmvorrichtung zur Feststellung des letzteren vorgesehen.

Tafel IV zeigt das Mikrometer in Verbindung mit dem 9-zölligen Refractor der Berliner Sternwarte und zwar in der Form, welche es nach mannigfachen Versuchen und Erfahrungen von V. Knorre, V. Wellmann und M. Brendel durch C. Reichel in Berlin erhalten hat. Die Drehung von Ocular und Prisma gegen den Positionskreis geschieht durch Anfassen des gerieften Randes *g*, während der Kreis an seinem Umfang gedreht wird. Die Röhre *r* dient zur Aufnahme der verschiedenen Oculare, vor deren jedes das Prisma angeschraubt werden kann; sie wird mit Hülte eines Bajonettverschlusses auf den kuppelförmigen Ansatz *k* aufgesetzt und durch zwei mit den Anziehstiften *a* versehene Schrauben festgeklemmt. Das Ocular kann mittelst der Schraube *s* in einer bestimmten Entfernung vom Fadennetz festgestellt werden; eine an der Ocularröhre angebrachte Scala dient dabei zur Controlle. Das Beobachtungsverfahren

Tafel IV

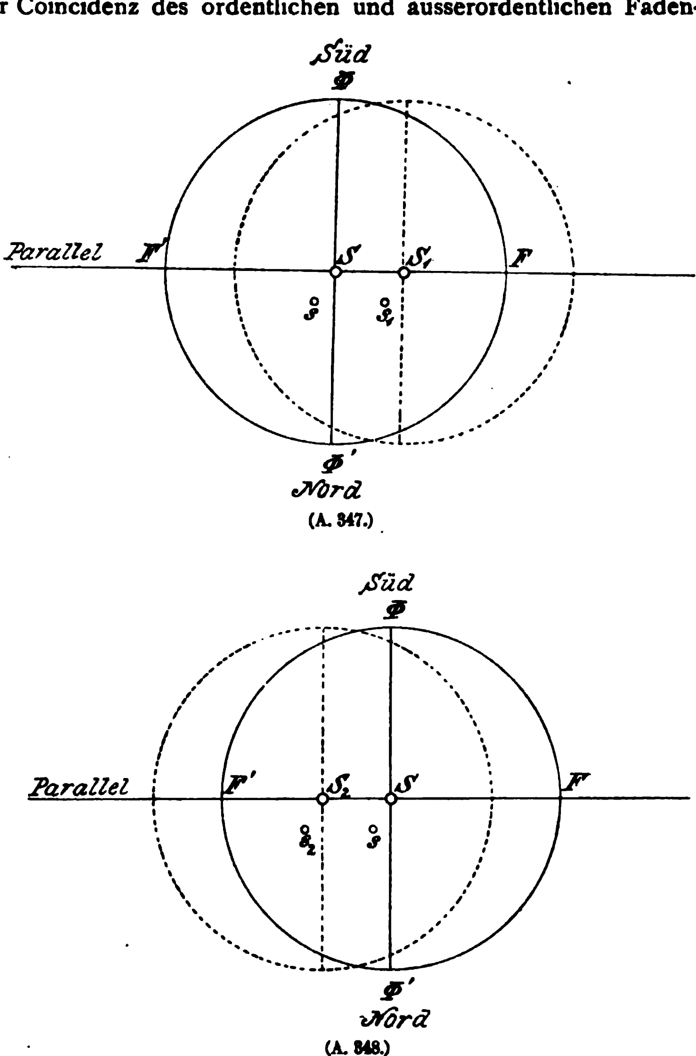


Doppelbildmikrometer nach V. WELLMANN
(Berliner Sternwarte)
(A. 346.)

Verlag von EDUARD TREWENDT.



wird am besten an der Hand der nachstehenden Figuren 347—350 erörtert, wobei wir der von KNORRE gegebenen klaren Darstellung[1]) folgen. Zunächst muss man sich daran erinnern, dass bei Drehung des Prismas die ausserordentlichen Bilder aller Punkte des Gesichtsfeldes Kreise von nahe gleichen Radien um die zugehörigen ordentlichen Bilder beschreiben. Das ausserordentliche Bild eines Fadens bleibt daher stets parallel dem ordentlichen, und wenn die beiden Bilder eines Fadens zusammenfallen, so haben die Bilder eines dazu senkrechten Fadens ihre grösste Elongation, welche durchweg mit μ bezeichnet werden möge. Das Beobachtungsobject sei nun ein Doppelstern Ss, dessen Positionswinkel und Distanz bestimmt werden sollen. Man bringe durch Drehung des Positionskreises den Faden FF' in den Parallel, und die Ablesung der äusseren Kreistheilung ergebe Pl; hierauf drehe man den inneren Kreis (Kreisscheibe) und suche die Ablesung C der inneren Kreistheilung, welche der Coincidenz des ordentlichen und ausserordentlichen Fadenbildes entspricht. Man kann sich hierbei der gewöhnlichen Methode bedienen, indem man die beiden Fadenbilder bis auf feine gleich breite Lichtlinien von der einen und von der anderen Seite aneinander bringt; nach BRENDEL würde man noch genauer verfahren, wenn man die Bilder soweit einander nähert, dass sie sich gerade berühren. An der Berührungsstelle vereinigen sie sich dann zu einer äusserst feinen, tiefschwarzen Linie, die sich sehr scharf abhebt und deren Auftreten ein sicheres Mass für den gleichen Abstand in den beiden entgegengesetzten Lagen abgiebt. Bringt man hierauf durch Bewegen des ganzen Fernrohres die hellere Componente S in den Durchschnittspunkt der ordent-

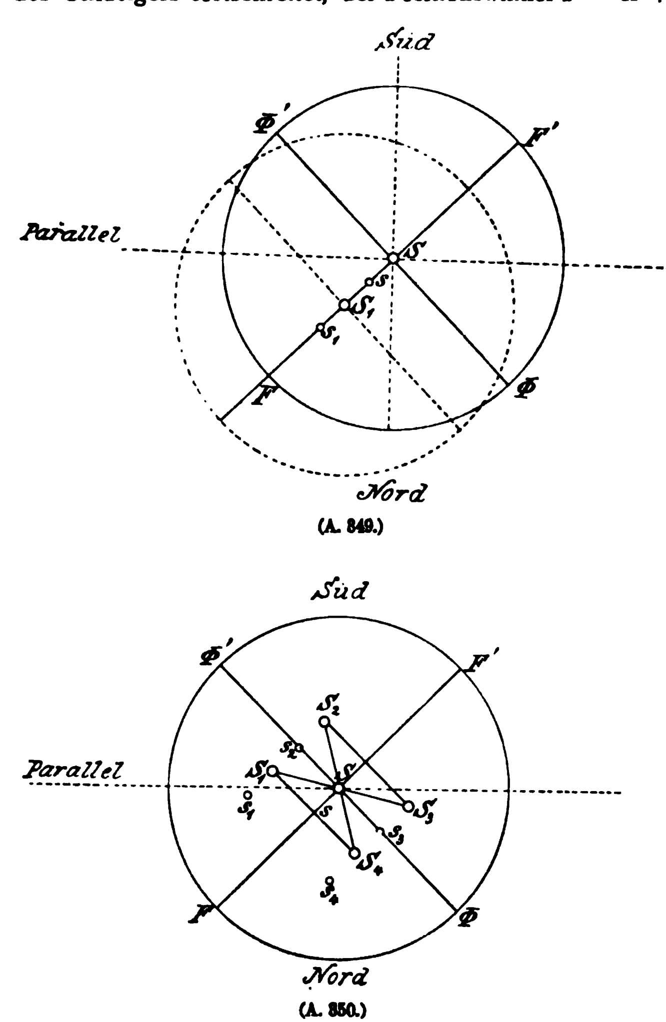


(A. 347.)

(A. 348.)

[1]) Beobachtungs-Ergebnisse der Königlichen Sternwarte zu Berlin, Heft No. 6.

lichen Bilder der auf einander senkrechten Fäden FF' und $\Phi\Phi'$, so wird sich das ausserordentliche Bild von S in dem Schnittpunkt von FF' und dem (in der Figur punktirt gezeichneten) ausserordentlichen Fadenbild $\Phi\Phi'$ befinden, in dem einen Falle rechts (Fig. 347), und nach Drehung des inneren Kreises um 180° links (Fig. 348); in derselben Weise wird das ausserordentliche Bild der zweiten Componente s verschoben. Nun drehe man den äusseren Kreis und mit ihm den inneren sammt Ocular und Prisma so lange, bis bei unveränderter Coincidenz der Faden FF' mit der Verbindungslinie der beiden Componenten S und s zusammenfällt, wie es in der Fig. 349 dargestellt ist. Es fallen dann auch die ausserordentlichen Bilder und mithin sämmtliche vier Bilder in dieselbe Gerade. Bezeichnet Π die dieser Stellung der Bilder entsprechende Ablesung des Kreises an den äusseren Nonien, so ist unter der Annahme, dass die Theilung im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers fortschreitet, der Positionswinkel $P = \Pi + 90 - Pl$. Ausser dem Zusammenfallen der vier Bilder in eine Gerade kann man auch mit grosser Sicherheit die 90° davon verschiedene Stellung beobachten, in der die vier Sternbilder ein Rechteck bilden und erlangt auf diese Weise während einer vollen Umdrehung des äusseren Kreises vier Bestimmungen der Grösse Π, oder noch besser acht, wenn man zur Vermeidung etwaiger Torsionen in jedem Quadranten die betreffende Stellung einmal durch Rechts- und ein zweites Mal durch Linksdrehung des Positionskreises herbeiführt.



(A. 349.)

(A. 350.)

Zur Bestimmung der Distanz wird der äussere Kreis auf den Mittelwerth Π eingestellt und festgeklemmt, und der innere Kreis gedreht, bis die Verbindungslinie $S_1 s$ (s. Fig. 350) parallel dem Faden $\Phi\Phi'$ und seinem ausserordentlichen Bilde wird; ist A_1 die zugehörige Ablesung an den beiden inneren Nonien, so ergiebt sich die Distanz aus

$$\Delta = \mu \cos (A_1 - C).$$

Man erhält aber sogleich noch drei weitere Bestimmungen, die nicht nur zur Erhöhung der Genauigkeit, sondern auch zur Elimination gewisser systematischer Fehler von Nutzen sind, wenn man den inneren Kreis weiter dreht, bis nach einander im 2. Quadranten s_2 und im 3. Quadranten s_3 auf den Faden $\Phi\Phi'$ fallen und endlich im 4. Quadranten die Verbindungslinie $S_4 s$ demselben parallel wird. Die daraus hervorgehenden Werthe der Distanz sind, wenn die Ablesungen bezw. mit A_2 A_3 A_4 bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \Delta &= -\mu \cos A_2 - C \\ &= -\mu \cos A_3 - C \\ &= \mu \cos A_4 - C. \end{aligned}$$

Nun ist es sehr wichtig zu bemerken, und eben darin liegt ein characteristischer Zug des WELLMANN'schen Mikrometers, auf den zuerst KNORRE hingewiesen hat, dass es keineswegs nothwendig ist, die Sterne auf den Faden zu stellen und mit demselben zu biseciren; vielmehr kommt es nur darauf an, dass die Verbindungslinie der beiden ungleichnamigen Bilder dem Faden parallel wird, was man am besten ähnlich wie bei dem Fadenmikrometer beurtheilt, wenn man die Sterne durch einen leichten Druck auf das Fernrohr bald von der einen bald von der anderen Seite an den Faden heranbringt oder sie über den Faden streichen lässt. Störend ist hierbei der Umstand, welcher auch eine sichere Bisection verhindern würde, dass der Faden durch das ungleichnamige Bild des Sternes ausgelöscht wird, sobald dasselbe ihm sehr nahe kommt[1]); man ist daher genöthigt, den Verlauf des Fadens in der Nähe des Sternes aus den beiden sichtbaren Stücken zu ergänzen, was bei Beurtheilung der Parallelität mit genügender Sicherheit geschehen kann.

Was den Einfluss eines Fehlers, der in der Bestimmung der Coincidenz C und in der Einstellung des äusseren Kreises Π begangen wird, auf die Distanz angeht, so wird man den letzteren im allgemeinen ganz übergehen dürfen; denn ist die Einstellung um $\delta\Pi$ fehlerhaft, so wird statt der Distanz Δ die Grösse $\Delta \cos \delta\Pi$ gemessen, mithin ist der Fehler eine Grösse zweiter Ordnung in Bezug auf $\delta\Pi$, und, da auch Δ bei diesem Mikrometer stets ein kleine Grösse ist, als verschwindend anzusehen. Vereinigt man dann mit dem Coincidenzfehler δC die etwaige Abweichung ε des Winkels der beiden Fäden FF' und $\Phi\Phi'$ von einem Rechten, so gelangt man mit Beachtung, dass

$$\begin{aligned} A_2 - C &= 180 - (A_1 - C) + 2(\delta C + \varepsilon) \\ A_3 - C &= 180 + (A_1 - C) \\ A_4 - C &= 360 - (A_1 - C) + 2(\delta C + \varepsilon) \end{aligned}$$

und unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \text{I. Quadrant} & \mu \cos(A_1 - C) = \Delta - \mu(\delta C + \varepsilon) \sin 1'' \sin(A_1 - C) \\ \text{II.} \quad \text{„} & -\mu \cos(A_2 - C) = \Delta + \mu(\delta C + \varepsilon) \sin 1'' \sin(A_1 - C) \\ \text{III.} \quad \text{„} & -\mu \cos(A_3 - C) = \Delta - \mu(\delta C + \varepsilon) \sin 1'' \sin(A_1 - C) \\ \text{IV.} \quad \text{„} & \mu \cos(A_4 - C) = \Delta + \mu(\delta C + \varepsilon) \sin 1'' \sin(A_1 - C). \end{array}$$

Dieselben lehren, dass die Fehler δC und ε eliminirt werden, wenn man zwei Beobachtungen in nebeneinander liegenden Quadranten combinirt; zugleich führen sie zu dem beachtenswerthen Schlusse, dass systematische Fehler in der Beurtheilung der Parallelität aus dem Mittel verschwinden, sofern dieselben

---

[1]) Die von den beiden ungleichnamigen Bildern von Stern und Faden ausgehenden Strahlen gelangen auf verschiedenen Wegen ins Auge, und man sieht sie beide gleichzeitig auf einander projicirt. (M. BRENDEL, Beob.-Ergebn. d. k. Sternwarte zu Berlin, H. No. 6, pag. 62).

in den einzelnen Quadranten in gleicher Richtung und gleichem Betrage auftreten. Es wird sich aber auch hier empfehlen, durch alle vier Quadranten zu messen und in jedem die Einstellung sowohl durch Rechts- als Linksdrehung auszuführen.

Hat man nur einen Faden zur Verfügung, so kann man auch diesen zur Distanzmessung benutzen, indem man den äusseren Kreis auf $\Pi + 90°$ einstellt und nach den Formeln rechnet:

I.	Quadrant	$\mu \sin(A_1 - C) = \Delta + \mu\,\delta C \sin 1'' \cos(A_1 - C)$
II.	„	$\mu \sin(A_2 - C) = \Delta - \mu\,\delta C \sin 1'' \cos(A_1 - C)$
III.	„	$-\mu \sin(A_3 - C) = \Delta + \mu\,\delta C \sin 1'' \cos(A_1 - C)$
IV.	„	$-\mu \sin(A_4 - C) = \Delta - \mu\,\delta C \sin 1'' \cos(A_1 - C)$

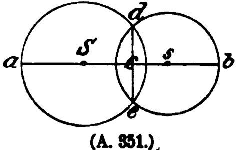
Beide Gleichungssysteme zusammen führen zur Kenntniss der Fehler δC und ε. Da ein Fehler in der Coincidenzstellung auch den Positionswinkel beeinflusst, — es sei denn, dass man denselben auf die übliche Weise nur mittelst der ordentlichen Bilder bestimmt, — so könnte der aus den Distanzmessungen gefundene Werth von δC zur Verbesserung des Positionswinkels benützt werden. Weil es aber zweifelhaft ist, ob der aus den Distanzmessungen gefundene Betrag den Coincidenzfehler rein darstellt und nicht vielmehr ein Aggregat in demselben Sinne wirkender Fehler ist, so ist es wohl richtiger, von vornherein die Coincidenz scharf zu bestimmen und von jener Verbesserung ganz abzusehen. Uebrigens wird ein merklicher aus einer fehlerhaften Einstellung des inneren Kreises hervorgehender Fehler sich dadurch bemerkbar machen, dass die Gerade, auf welcher die vier Bilder liegen, dem Faden nicht mehr parallel ist.

Dasselbe Verfahren der Distanzmessung lässt sich auch auf die Bestimmung der Durchmesser von Planeten anwenden. Man stellt hier die beiden Bilder so zu einander, dass die inneren Tangenten derselben parallel zum Faden sind; geht man zugleich von verschiedenen Ablesungen des Positionskreises innerhalb eines einzigen Quadranten aus, so erhält man doppelt so viele Dnrchmesserbestimmungen, welche um dieselben Winkel wie jene Ablesungen von einander abstehen und sich über den ganzen Umkreis der Planetenscheibe vertheilen.

Handelt es sich um sehr enge Doppelsterne, deren Scheibchen übereinandergreifen, so wird die Beurtheilung der Lage ihrer Mittelpunkte sehr schwierig. Indem hinsichtlich der Einzelheiten auf die Darlegungen von KNORRE a. a. O. verwiesen werden mag, sei hier nur bemerkt, dass die Distanz aus einem der beiden Ausdrücke

$$\Delta = D - (R + r)$$
$$\Delta = \frac{(4aA - s^2)(a + A)}{8aA}$$

folgt, wenn (Fig. 351) in dem einem Falle die Grössen $D = ab$ und die beiden Radien R und r, im anderen Fall die gemeinschaftliche Sehne $s = de$ und die Strecken $ac = A$ und $bc = a$ durch Messung bestimmt werden.

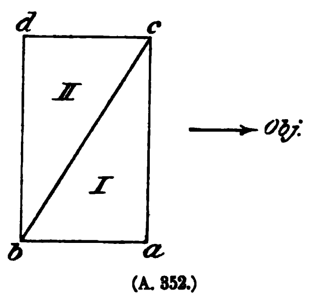


(A. 351.)

Bevor wir in der Theorie des Mikrometers fortfahren, wollen wir an dieser Stelle kurz auf die Vorzüge eingehen, welche ihm innerhalb des freilich engen Bereiches seiner Anwendbarkeit gegenüber dem Fadenmikrometer zugestanden werden müssen. Der wesentlichste Vortheil, soweit es sich um die Distanzen handelt, ist, wie KNORRE mit Recht hervorhebt, darin zu erblicken, dass

die Bisectionen durch Richtungsbeobachtungen ersetzt werden, welche bei einigermaassen unruhigen Bildern sehr viel leichter auszuführen sind, als die ersteren. »Sind die Objecte durch die gleichmässig auf beide wirkenden Wallungen der Luft unruhig bewegt, so wird dadurch, obschon die Bilder in Folge der Unruhe sich unablässig etwas mehr oder weniger vom Faden entfernen, die Richtung ihrer Verbindungslinie gar nicht geändert, und der Eindruck, den man von dem Richtungsunterschiede zwischen dieser Linie und dem Faden empfängt, gewiss nur sehr wenig beeinträchtigt. Man beobachtet daher diesen Parallelismus, bezogen auf ein einziges Lineargebilde, den Faden, mit grosser Ruhe und Sicherheit, und erhält die schärfste Controlle dafür in dem Augenblick, in welchem der Faden über beide Bilder streicht, während man bei der gewöhnlichen Distanz-Einstellung mit dem Fadenmikrometer Abstandsunterschiede von zwei verschiedenen Lineargebilden zu schätzen hat.« Dies stimmt auch mit den Erfahrungen der hervorragendsten Doppelsternbeobachter überein, insofern mit dem Schraubenmikrometer wenigstens innerhalb der vier ersten Ordnungen (nach W. STRUVE) der Positionswinkel genauer gemessen wird, als die Distanz. Und da überdies auch die systematischen Fehler unter der oben angeführten Voraussetzung aus der vollständigen Distanzmessung herausfallen, so wird man nach dieser Richtung dem WELLMANN'schen Mikrometer gewiss einen Vorzug einräumen dürfen. Auch hinsichtlich der Positionswinkel haben die Untersuchungen KNORRE's insofern ein sehr zufriedenstellendes Resultat ergeben, als die Messungen keine Spur einer Abhängigkeit von der Richtung zur Vertikalen gezeigt haben; es wird dies darauf zurückgeführt, dass man statt der gewöhnlichen Einstellung der Verbindungslinie beider Componenten parallel zum Faden zwei in jeder Stellung des Positionskreises nahezu parallel bleibende Verbindungslinien je zweier gleichnamigen Componenten zum Zusammenfallen in eine gerade Linie zu bringen hat, von welchen Componenten die beiden äussersten um $\mu + \Delta$ von einander abstehen. Auch ist dies mit gewissen Erfahrungen am Positionsmikrometer insofern in Einklang, als der systematische Fehler bei grösseren Distanzen (Ordn. IX nach W. STRUVE 32″—64″) unmerklich zu werden scheint. —

Die oben angeführten Formeln sind nicht ganz strenge, wenn man als doppelbrechendes Prisma ein solches, wie es gewöhnlich für physikalische Zwecke geschliffen wird, ein ROCHON'sches oder ein WOLLASTON'sches Prisma benutzt. Der Unterschied dieser beiden Prismen besteht bekanntlich darin, dass wenn Fig. 352 einen Durchschnitt senkrecht zu den brechenden Kanten darstellt, die Hauptachse in dem ersten, dem Objectiv zugekehrten Halbprisma bei ROCHON parallel zu ab, bei WOLLASTON dagegen parallel zu ac ist, während in dem zweiten Halb-Prisma die Hauptachse in beiden Fällen parallel zur brechenden Kante steht. Beide Prismen haben nun die Eigenschaft, dass, wenn man durch sie eine Gerade oder einen geradlinig verlaufenden Faden betrachtet, das ausserordentliche Bild im Allgemeinen nicht unerheblich gegen das ordentliche Bild geneigt ist. Ist m der absolute Brechungsindex für die ordentlichen Strahlen, n derselbe für die ausserordentlichen Strahlen (senkrecht zur Hauptachse), p der brechende Winkel, $k = \frac{n^2 - m^2}{n^2}$, $\varepsilon = \frac{k}{2} \, tang^2 p$, so ist nach den Untersuchungen von BRENDEL die Tangente des Winkels, den die beiden Fadenbilder



(A. 352.)

mit einander einschliessen, bei dem Prisma von WOLLASTON $= \varepsilon \sin 2w$, bei dem ROCHON'schen Prisma $\frac{\varepsilon}{2} \sin 2w$, wo w den von der Coincidenzstellung aus gezählten Winkel $A - C$ bezeichnet. Die beiden Fadenbilder sind daher parallel, wenn sie coincidiren oder wenn sie ihren Maximalstand haben, und sie sind am meisten geneigt in den Zwischenlagen bei $w = 45°$, $135°$ u. s. w.

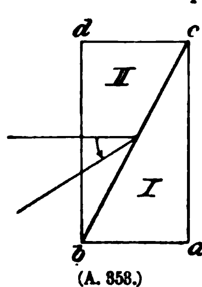
Um die Verhältnisse noch etwas besser zu übersehen, mögen hier nach BRENDEL die Werthe der Maximalneigung und des Productes aus der Maximalelongation und der Vergrösserungszahl des Fernrohrs für verschiedene brechende Winkel bei einem WOLLASTON'schen Prisma folgen; sie sind berechnet nach der genäherten Formel

$$\mu v = m k \operatorname{tang} p \quad \text{mit} \quad \log m = 0{\cdot}1887 \quad \log k = 8{\cdot}0656 - 10$$

p	arctang ε	μv
10°	0'·6	11'
20	2·6	22
30	6·7	36
40	14·1	52
45	20·0	62
50	28·4	74
55	40·8	88
60	60·0	107

Für ein Prisma nach ROCHON beträgt, wie oben angegeben, bei gleichen brechenden Winkeln die Neigung nur die Hälfte dieser Zahlen; aber der Vortheil dieser Verminderung wird durch den doppelt so grossen Betrag des messbaren Winkels bei dem WOLLASTON'schen Prisma aufgewogen, um so mehr, als die Neigung, wie nachher ersichtlich werden wird, leicht berücksichtigt werden kann. Ueberdies ist die Maximalelongation schon an sich nicht gross, da man bei der Natur der dem Mikrometer zufallenden Aufgaben, vornehmlich Doppelsternmessungen, meist genöthigt ist, stärkere Vergrösserungen anzuwenden; bei einer Vergrösserung von 200 würde nach obigen Zahlen für $p = 45°$ μ nur 18''·6 betragen.

BRENDEL[1]) hat die Construction eines Prismas angegeben, welches von einer geraden Linie in jeder beliebigen Lage zwei einander parallele Bilder entwirft. Während die beiden Hauptachsen auch hier senkrecht zu einander stehen, ist die Hauptachse im ersten Halbprisma parallel der brechenden Kante, im zweiten dagegen parallel dem in Fig. 353 dargestellten Querschnitt; der brechende Winkel ist an die Bedingung geknüpft, dass er $\overline{\gtrless}$ 35°·3 ist, und das Maximum des Winkelabstandes der beiden Bilder findet statt, wenn die Hauptachse im zweiten Halbprisma um 45° gegen dc (nach der brechenden Kante zu) geneigt ist. Dieses Maximum, dem ein brechender Winkel von 33°·7 zugehört, beträgt aber nur etwa 31', sodass bei Anwendung einer 200 fachen Vergrösserung der grösste messbare Winkel 9'' kaum überschreitet. Man könnte zwar erheblich stärkere Ablenkungen erlangen, wenn man das Prisma nicht aus Quarz, sondern aus Kalkspath herstellen würde, indessen sind solche Prismen gegenüber äusseren Einflüssen wenig haltbar und haben ausserdem den Nachtheil, dass die Bilder stärker gefärbt erscheinen.



(A. 353.)

---

1) BRENDEL a. a. O. pag. 50 ff.

Für das BRENDEL'sche Prisma wird die Gleichung zur Bestimmung der Distanz:

$$\Delta\,(1 + \varepsilon) = \pm\,(q + 2u)\cos\,(A - C)\left.\begin{matrix}\text{I. u. IV. Quadrant}\\ \text{II. u. III.} \quad ,,\end{matrix}\right\},$$

oder wenn man denselben Faden, der zur Bestimmung des Positionswinkels dient, auch für die Distanzen anwendet und daher auf $\Pi + 90°$ einstellt:

$$\Delta\,(1 + \varepsilon) = \pm\,(q + 2u)\sin\,(A - C)\left.\begin{matrix}\text{I. u. II. Quadrant}\\ \text{III. u. IV.} \quad ,,\end{matrix}\right\}$$

Hier ist q eine Grösse, welche durch die Constanten des Prismas, die Vergrösserungszahl des Fernrohrs und die Abstände des Prismas und der Bildebene vom Auge bestimmt wird; ferner ist

$$u = -\,\varepsilon\,(a \sin w + b \cos w + c)$$

wo, wie oben $w = A - C$, und a, b, c von der Centrirung des Prismas abhängen. Da letztere Grössen bei einigermassen sorgfältiger Justirung an sich sehr klein sein werden, so wird ihr Produkt mit ε, folglich auch u kaum berücksichtigt zu werden brauchen, und man wird daher in den meisten Fällen sich der einfachen Formel $\Delta = \pm\,\mu \cos(A - C)$ bezw. $\Delta = \pm\,\mu \sin(A - C)$ bedienen dürfen, wo nun abweichend von den anderen Prismen μ eine über das ganze Gesichtsfeld constante Grösse ist.

Wendet man ein WOLLASTON'sches Prisma an, so nehmen mit Berücksichtigung der oben erwähnten Neigung der Bilder, oder was auf dasselbe herauskommt, der Abhängigkeit von μ von dem Orte im Gesichtsfeld die Gleichungen zur Berechnung der Distanz nach BRENDEL folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{matrix}\text{Faden } \Phi_1 \quad \Delta = \{\pm\,\mu \pm \mu\varepsilon \cos 2w \pm 2\varepsilon X_0 \sin w\}\cos w\\ ,, \quad \Phi_2 \quad\;\; = \{\pm\,\mu \mp \mu\varepsilon \cos 2w \pm 2\varepsilon X_0 \sin w\}\cos w\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{Ob. Z. I. u. IV. Quadr.}\\ \text{Unt. Z. II. u. III.} \quad ,,\end{matrix}$$

oder wenn man sich des anderen Fadens bedient

$$\left.\begin{matrix}\text{Faden } F_1 \quad \Delta = \{\pm\,\mu \mp \mu\varepsilon \cos 2w \pm 2\varepsilon Y_0 \cos w\}\sin w\\ ,, \quad F_2 \quad\;\; = \{\pm\,\mu \pm \mu\varepsilon \cos 2w \pm 2\varepsilon Y_0 \cos w\}\sin w\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{Ob. Z. I. u. II. Quadr.}\\ \text{Unt. Z. III. u. IV.} \quad ,,\end{matrix}$$

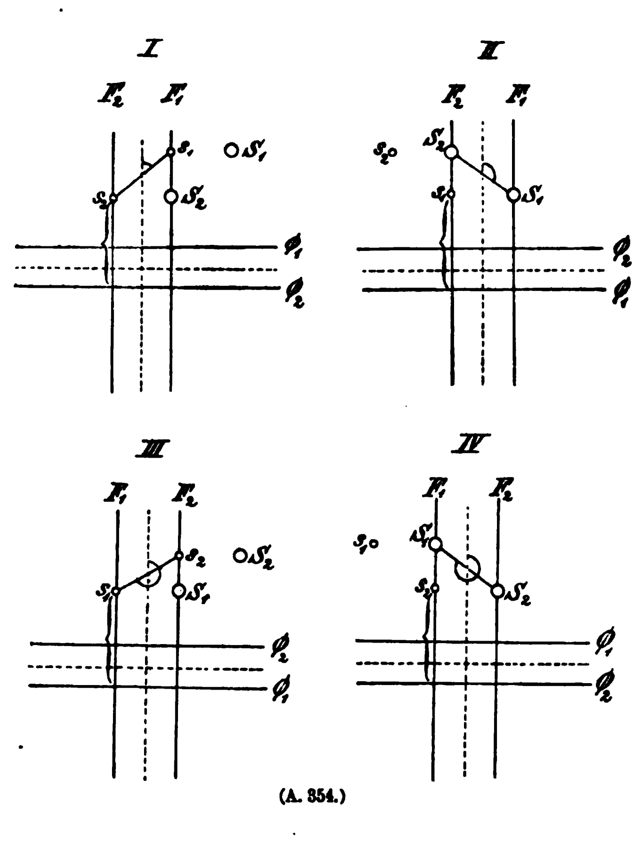
Da durch das WOLLASTON'sche Prisma kein Strahl ungebrochen durchgeht, so sind in diesem Falle die beiden ausserordentlichen Bilder des Fadens, welche man sieht, durch die Indices 1 und 2 unterschieden. $\mu = q + 2u$ ist eine ähnlich zusammengesetzte Function wie bei dem BRENDEL'schen Prisma, ferner bezeichnen X_0 und Y_0 die Abstände der ursprünglichen nicht sichtbaren Sternbilder von zwei rechtwinkligen Achsen, welche durch die unsichtbaren Fadenbilder Φ_0 und F_0 gebildet werden; man kann statt ihrer auch die Entfernungen der Bilder $s_1\,S_1$ und $s_2\,S_2$ von den gleichnamigen sichtbaren Fadenbildern setzen. Für die Unterscheidung der positiven und negativen Richtungen der Coordinatenachsen und für die Erkennung des Bildes 1 als desjenigen, welches — unter Voraussetzung eines positiven Krystalles wie Quarz — nach der brechenden Kante des dem Objectiv zugekehrten Prismas liegt, giebt BRENDEL folgende praktische Regel. Stellt man den das Fadenkreuz tragenden Kreis so, dass ein Faden vertical steht, und bezeichnet diesen mit F, den darauf senkrechten mit Φ, so bringe man am höchsten Punkt ein Zeichen (etwa $+y$ oder $+F$) an und rechts davon um nahe einen Quadranten abstehend ein zweites Zeichen ($+x$ oder $+\Phi$); man wird dann unmittelbar erkennen können, an welchem Faden die Beobachtung gemacht ist und welches Vorzeichen die Grössen X_0 und Y_0 erhalten. Man wähle ferner von den beiden Werthen der Coincidenz des

Fadens F: $\varphi = C$ und $\varphi = C + 180°$ denjenigen, für welche bei der obigen Stellung des äusseren Kreises für

$w = 45$ die beiden Fadenbilder F nach unten, Φ nach links convergiren,
$= 135$ „ „ „ „ „ oben, „ „ „ „
$= 225$ „ „ „ „ „ „ „ „ rechts „
$= 315$ „ „ „ „ „ unten, „ „ „ „

und mache bei der Einstellung $w = 0$ oben am inneren Kreise eine Marke (+), dann wird durch diese die Richtung gekennzeichnet, in welcher ein für allemal das Bild 1 zu suchen ist. Uebrigens braucht man sich an diese Definitionen gar nicht strenge zu binden, die obigen Formeln bleiben immer gültig, wenn man ε stets positiv nimmt, falls die Convergenz der Fadenbilder in der obigen Weise statt hat, und negativ, wenn die Fäden in der entgegengesetzten Richtung convergiren.

Man kann aber von der Neigung der Fäden ganz absehen, wenn man die Beobachtungen in geeigneter Weise anordnet. Es geht zunächst aus den obigen Gleichungen hervor, dass das von $\mu\varepsilon$ abhängige Correctionsglied im Mittel aus zwei Einstellungen, von denen die eine mit dem Faden F_1 (bez. Φ_1), die andere mit F_2 (Φ_2) gemacht ist, herausfällt. Führt man ferner dieselben Messungen nach einander in allen vier Quadranten aus (siehe das Schema Fig. 354), und achtet darauf, dass die Coordinaten X_0 bezw. Y_0 denselben Werth behalten, was durch Schätzung genügend sicher erkannt werden kann, so hebt sich im Mittel aus den vier Einstellungen auch das zweite Correctionsglied heraus. Da $\mu = q + 2u = \mu_0 - 2a\varepsilon \sin w - 2b\varepsilon \cos w$, wenn $\mu_0 = q - 2c\varepsilon$ gesetzt wird, so wird bei guter Centrirung des Prismas die Reduction auch hier nach dem einfachen Ausdruck



(A. 354.)

$$\Delta = \mu_0 \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} w$$

ausgeführt werden können, falls man es nicht vorzieht, die einzelnen Messungen wegen des letzten Gliedes zu verbessern. Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass die Einstellungen nicht durch Bisectionen, wie es in der Figur dar-

gestellt ist, sondern durch paralleles Anvisiren an die Fadenbilder gemacht werden; befolgt man dabei zugleich die Regel, den inneren Kreis jedesmal in beiden Richtungen zu drehen, unter abwechselnder Benutzung des einen und des anderen Fadenbildes, so setzt sich eine vollständige Distanzmessung aus acht Visuren zusammen.

1. Beispiel: Beobachtung von ε' Lyrae (Σ 2382) $18^h 40^m 43^s + 39° 33'{\cdot}3$ (91·0) $5^m{\cdot}0$ $6^m{\cdot}0$ 1891 Nov. 8 am 9-zölligen Fraunhofer der Berliner Sternwarte. Beob.: Knorre; Sternzeit $20^h 7^m$, Temp. innen + 4°·2, aussen + 2°·4; Vergrösserung 340 Focus 12·2; Prisma nach Brendel $\mu(340) = 5''{\cdot}32$. Der Parallel wurde zu 84° 23', die Coincidenz zu 61° 58' gefunden.

Ferner ergab sich:

Quadrant	I	II	III	IV
Π links .	8° 32'	94° 24'	187° 33'	276° 39'
Π rechts .	8 40	96 18	188 34	276 37
Mittel	8 36	95 21	188 4	276 38

$\Pi_0 = 7° 10'$

$$\Pi_0 + 90 = 97° 10'$$
$$Pl = 84\ 23$$
$$P = 12\ 47$$

Einstellung des äusseren Kreises auf Π_0

A rechts .	116° 2'	187° 12'	294° 0'	8° 58'
A links .	113 44	188 58	295 28	9 12
A_0 . . .	114 53	188 5	294 44	9 5
$A_0 - C$.	52 55	126 7	232 46	307 7
$\log \cos (A_0 - C)$	9·7803	9·7705$_n$	9·7818$_n$	9·7806
$\log \mu \cos (A_0 - C)$	0·5062	0·4964$_n$	0·5077$_n$	0·5065
Δ	3''·21	3''·14	3''·22	3''·21

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}(\text{I} + \text{III}) = 3{\cdot}215 \\ \tfrac{1}{2}(\text{II} + \text{IV}) = 3{\cdot}175\end{array}\right\} \Delta = 3''{\cdot}19$$

Sehr unruhige Bilder.

2. Beispiel: Beobachtung von ζ Aquarii (Σ 2909) $22^h 23^m 9^s - 0° 35'{\cdot}0$ (90·0) $4^m{\cdot}4^m$, 1890 Oct. 29 am 9-zölligen Fraunhofer der Berliner Sternwarte. Beob.: Brendel; Vergrösserung 370, Ocularrohr 2·15; Wollaston'sches Prisma ($p = 45°$) $\mu_0 = 10''{\cdot}02$, $C = 71° 12'$, P (Mittel) = 324° 39', $\log \varepsilon$ 7·765n (ε musste negativ genommen werden, weil die (+) Marke irrthümlicher Weise auf der falschen Seite angebracht war).

Faden	X_0	A	$w = A - C$	$\mu_0 \cos w$	$\pm \varepsilon X_0 \sin 2w$	Δ	Stundenwinkel
Φ_2	+ 13''	183° 15'	112° 3'	3''·76	− 0''·05	3''·71	
Φ_1	+ 22	182 45	111 33	3·68	− 0·09	3·59	+ $0^h{\cdot}3$
Φ_2	+ 17	320 32	249 20	3·54	+ 0·07	3·61	
Φ_1	+ 12	319 41	248 29	3·68	+ 0·05	3·73	
Φ_1	+ 11	0 58	289 46	3·39	+ 0·04	3·43	+ 0·8
Φ_2	+ 23	1 55	290 43	3·54	+ 0·09	3·63	
Φ_1	+ 27	139 4	67 52	3·78	− 0·11	3·67	
Φ_2	+ 15	139 10	67 58	3·76	− 0·06	3·70	+ 1·0
			Mittel	3''·64	− 0·01	3''·63	

Für die einzelnen Quadranten wird:

	$\mu_0 \cos w$	Corr.	Δ
Quadrant II.	3″·72	— 0·07	3″·65
III.	3·61	+ 0·06	3·67
IV.	3·46	+ 0·07	3·53
I.	3·77	— 0·08	3·69

Durch die Berücksichtigung des Correctionsgliedes wird, wie diese Zahlen zeigen, die Uebereinstimmung der einzelnen Quadrantenwerthe wesentlich vergrössert; dagegen wird, wenn dasselbe ganz ausser Acht gelassen wird, der Mittelwerth um kaum 0″·01 geändert. Uebrigens bemerkt der Beobachter: Bilder äusserst unruhig. Die Beobachtung musste abgebrochen werden, da das Fernrohr durch heftige Windstösse bedenklich erschüttert wurde, so dass das Object um enorme Beträge im Gesichtsfeld hin- und herschwankte.

Abhängigkeit der Maximalelongation von der Temperatur und der Ocular-Stellung.

Eine besondere Untersuchung verdient die Abhängigkeit der Grösse μ von der Vergrösserungszahl des Fernrohres v. Als Quotient der Brennweiten von Objectiv und Ocular ist die Vergrösserung eine Function der Temperatur, und da μ umgekehrt proportional zu v, so wird die Aenderung, welche μ in dieser Beziehung erfährt, ausgedrückt durch die Gleichung $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{df}{f} - \frac{dF}{F}$ worin f und F die Brennweiten von Ocular und Objectiv bezeichnen. Erfahrungsgemäss sind aber die Grössen auf der rechten Seite sehr klein, und da sie ausserdem einander entgegenwirken, so wird auch $d\mu$ als unmerklich angesehen werden dürfen.

Anders verhält es sich mit dem Einfluss, welcher aus der Einstellung des Oculars auf verschiedene Sehweiten hervorgeht. Hier zeigt eine nähere Untersuchung[1]), dass, wenn man den strengeren Ausdruck für die Vergrösserung eines Fernrohres $v = \frac{F}{f}\left(1 + \frac{f - e}{s}\right)$ berücksichtigt, worin s die deutliche Sehweite und e der Abstand des zweiten Hauptpunktes des Ocularsystems vom Knotenpunkt des LISTING'schen reducirten Auges sind, der Werth von μ je mit der Sehweite, auf welche der Beobachter das Ocular einstellt, wächst oder abnimmt, und zwar um Beträge, die leicht bis zu merklichen Bruchtheilen von μ ansteigen können. Es ist daher unerlässlich, dass das Ocular unverändert in seiner Stellung verbleibt oder, da dies für verschiedene Augen nicht wohl angeht, dass die Aenderungen in der Ocularstellung an einer am Ocular angebrachten Scala sorgfältig verzeichnet und bei der definitiven Reduction in Rechnung gezogen werden. Man kann sich dabei meist auf die grössten Glieder beschränken und die Aenderung in μ nach dem Ausdruck berechnen

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{f\,ds}{(s - e)(f + s - e)};$$

sicherer wird es indessen sein, wenn jeder Beobachter die Grösse μ seiner deutlichen Sehweite entsprechend bestimmt.

Uebrigens ist es bemerkenswerth, dass, so lange das Ocular selbst nicht verschoben wird, eine Veränderung der Stellung des Auges zu demselben ohne Einfluss auf μ ist.

---

[1]) BRENDEL, a. a. O., pag. 67.

Der Einfluss der Temperatur auf das **Prisma** ist von WELLMANN[1]) untersucht worden. Es kommt hierbei vornehmlich auf die Aenderungen der Brechungsindices und des brechenden Winkels an. Nimmt man jene für 1° C. zu

$$dm = -0{\cdot}00000537$$
$$dn = -0{\cdot}00000628$$

an, so wird

$$\frac{d\mu}{\mu} = -0{\cdot}00010\,t^{\circ}$$

ein Werth, der bei Sommer- und Winterbeobachtungen noch in Betracht kommen könnte.

Ganz unmerklich dagegen ist der Einfluss der Temperatur, soweit die Aenderung des brechenden Winkels in Frage kommt; am kleinsten bei dem Prisma nach BRENDEL, erreicht $\frac{d\mu}{\mu}$ auch bei dem Prisma von WOLLASTON für eine Aenderung von 50° C. noch nicht 0·0002.

Bestimmung der Maximalelongation.

Die Maximalelongation μ wird am leichtesten aus Durchgängen von Polsternen durch die zwei in das Maximum der Entfernung gestellten Fadenbilder bestimmt. Sind die in Sternzeit ausgedrückten Momente, zu denen die beiden Bilder eines Sterns die Bilder des auf der Richtung der täglichen Bewegung senkrecht stehenden Fadens (etwa F) passiren, bezw.

Zeit	Sternbild	Faden
ϑ_1	1	F_2
ϑ_2	{2, 1}	{F_2, F_1}
ϑ_3	2	F_1

so kann man die Bilder 1 und 2 als Componenten eines Doppelsterns auffassen und erhält aus den obigen Ausdrücken nach Substitution von $w = 90°$

$$\Delta = (\vartheta_2 - \vartheta_1)\cos\delta = \mu_0 - \mu_0\varepsilon - 2a\varepsilon \qquad \text{Faden } F_2$$

und ebenso

$$\Delta = (\vartheta_3 - \vartheta_2)\cos\delta = \mu_0 + \mu_0\varepsilon - 2a\varepsilon \qquad \text{Faden } F_1.$$

Für $w = 270°$ (Bild 2 voran) folgt

$$\Delta = (\vartheta_2 - \vartheta_1)\cos\delta = \mu_0 + \mu_0\varepsilon + 2a\varepsilon$$
$$\Delta = (\vartheta_3 - \vartheta_2)\cos\delta = \mu_0 - \mu_0\varepsilon + 2a\varepsilon$$

aus welchen Gleichungen μ_0 und ε, und die Grösse $2a\varepsilon$, falls sie überhaupt einen merklichen Werth hat, berechnet werden können.

Analog hat man bei Benutzung des Fadens Φ die Gleichungen:

Bild 1 voran ($w = 0°$):

$$(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cos\delta = \mu_0 - \mu_0\varepsilon - 2b\varepsilon$$
$$(\vartheta_3 - \vartheta_2)\cos\delta = \mu_0 + \mu_0\varepsilon - 2b\varepsilon$$

Bild 2 voran ($w = 180°$):

$$(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cos\delta = \mu_0 + \mu_0\varepsilon + 2b\varepsilon$$
$$(\vartheta_3 - \vartheta_2)\cos\delta = \mu_0 - \mu_0\varepsilon + 2b\varepsilon$$

aus denen sich μ_0, ε und $2b\varepsilon$ ergeben. Läuft der Stern in entgegengesetzter Richtung, so ist das Zeichen des Gliedes $\mu_0\varepsilon$ umzukehren. Da man die Grössen a und b nur in so weit zu kennen braucht, um sich über ihre ausreichende Kleinheit zu vergewissern, so wird man im allgemeinen zur Bestimmung der Grösse μ_0, auf die es schliesslich allein ankommt, die einfachere Gleichung benutzen

---

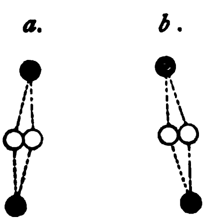
[1]) V. WELLMANN, Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Messungen mit doppelt brechenden Prismen und über die bei solchen Beobachtungen auftretenden achromatischen Abweichungen. Beobachtungs-Ergebnisse etc., Heft 6.

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cos\delta = \mu_0$$

und die Beobachtungen gleichmässig über die beiden Lagen $w = 0°$ und $w = 180°$ für den einen Faden, $w = 90°$ und $w = 270°$ für den anderen Faden vertheilen. Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass jede Beleuchtungsart, welche eine ungleiche Verschiebung der Fadenbilder oder ein verschiedenes Aussehen derselben erzeugt, peinlich vermieden werden muss.

Doppelbildmikrometer von G. BIGOURDAN.

Von G. BIGOURDAN rührt die Construction eines sehr einfachen Doppelbildmikrometers her, welches für die Messung von sehr kleinen Distanzen recht dienlich ist[1]) ist. Vor dem Ocular des Fernrohres werden zwei Bergkrystallprismen von gleicher Dicke angebracht, von denen das eine auf dem Ocular fest, das andere aber vor dem ersten in einer auf der optischen Achse senkrechten Ebene drehbar ist. Der Betrag der Drehung kann an einem kleinen Kreise abgelesen werden. Da jeder auf das erste Prisma auffallende Strahl in zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen von gleicher Helligkeit zerlegt und jeder dieser Strahlen wiederum doppelt gebrochen wird, so sieht man im allgemeinen vier Bilder, zwei o' und e', welche von den aus dem ersten Prisma austretenden ordentlichen, und zwei o'' und e'', welche von den ausserordentlichen Strahlen stammen. Diese vier Bilder bilden eine Raute, in welcher je zwei ungleichnamige unter sich gleich helle Bilder einander gegenüber stehen, o' und e'' an den Endpunkten der einen, o'' und e' an den Endpunkten der anderen Diagonale. Dreht man nun das zweite Prisma, so drehen sich e' um o' und e'' um o'' um den gleichen Betrag; die Raute ändert ihre Form, behält aber ihre Seitenlänge bei. Bezeichnet man die letztere, d. i. den Abstand der Bilder o' und o'' mit a und den Winkel, welchen die Hauptschnitte der beiden Prismen mit einander machen, mit α, so wird der Abstand der Bilder auf der einen Diagonale $2a\cos\frac{1}{2}\alpha$ mit der Intensität eines jeden Bildes, bezogen auf die Intensität des ursprünglichen Bildes als Einheit gleich $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$, und der Abstand der beiden anderen Bilder $2a\sin\frac{1}{2}\alpha$ mit der Intensität $\frac{1}{2}\sin^2\alpha$. Ist $\alpha = 0$, so verschwinden zwei Bilder und die Intensität der beiden übrigen, welche um $2a$ von einander abstehen, ist je $\frac{1}{2}$; für $\alpha = 180$ verschwinden dieselben beiden Bilder, und die anderen vereinigen sich durch Deckung zu einem einzigen Bilde mit der Intensität 1. Es ist nun sogleich ersichtlich, wie man mittelst dieser Vorrichtung eine in Bezug auf a kleine Grösse messen kann. Soll z. B. der Durchmesser eines Jupiterstrabanten bestimmt werden, so bringt man in der Nähe derjenigen Stellung des zweiten Prismas, wo nur ein Bild auftritt, die beiden gegenüberstehenden Bilder des Scheibchens zur Berührung, einmal von der einen und ein zweites Mal von der anderen Seite (Fig. 355a und b). Sind dann die Ablesungen des Kreises k' und k'', so ergiebt sich der Durchmesser aus dem Ausdruck:



(A. 355.)

$$d = 2a\sin\frac{k'' - k'}{4}$$

Da d in Bezug auf a nur klein sein soll, so wird die Helligkeit der beiden Bilder nicht merklich von $\frac{1}{2}$ abweichen und die Verhältnisse sind daher in dieser Hinsicht nicht ungünstiger,

[1]) G. BIGOURDAN, Nouveau micromètre à double image, particulièrement approprié à la mesure des petits diamètres. C. R. Tome CXXIII, No. 24.

als bei anderen Doppelbildmikrometern, während die Qualität der Bilder bei guter Ausführung der Prismen überhaupt keine Einbusse erleidet. Die Grösse a kann entweder aus der Doppelbrechung des Krystalles oder durch directe Bestimmung an Sternen oder mittelst eines Fadenmikrometers abgeleitet werden.

III. Interferenzmikrometer.

Die Genauigkeit, welche sich bei gewissen physikalischen Messungen mittelst der Interferenz der Lichtstrahlen erreichen lässt, hat A. MICHELSON[1]) auf den Gedanken gebracht, dieselbe zur Bestimmung kleiner Grössen am Himmel, z. B. des Durchmessers eines Satelliten, eines kleinen Planeten, oder auch der Distanz enger Doppelsterne zu benutzen. Bringt man vor die Oeffnung des Objectivs eines Fernrohres einen Schirm, welcher zwei parallele Spalte hat, und richtet es auf eine punktförmige Lichtquelle, so entsteht an Stelle des Bildes die FRAUNHOFER'sche Beugungserscheinung eines leuchtenden Punktes durch zwei Spalte, nämlich eine Reihe von Interferenzfransen oder besser gesagt Interferenzperlen, welche zur Spaltrichtung senkrecht ist[2]). Der Winkelabstand der einzelnen Perlen, gemessen vom zweiten Knotenpunkt des Objectivs, ist der Wellenlänge des Lichts direct und dem Abstand der beiden Spalte umgekehrt proportional. Ist das lichtaussendende Object nicht punktförmig, so tritt insofern eine Aenderung ein, als jetzt jeder Punkt desselben für sich dieselbe Erscheinung an benachbarten Punkten des Sehfeldes hervorruft und in Folge davon theilweise Superpositionen der einzelnen Interferenzbilder eintreten, welche die Reinheit der FRAUNHOFER'schen Erscheinung bei punktförmiger Lichtquelle verwischen. Das Auftreten der Interferenzerscheinung und ihr Verschwinden ist aber bei demselben Object eine periodische Function des Spaltabstandes; könnte man diese Maxima oder Minima der Undeutlichkeit genügend scharf auffassen, so würde sich der scheinbare Durchmesser des Objectes aus den linearen Abständen der Spalte und der Wellenlänge des ausgesandten Lichtes berechnen lassen. Nach den von MICHELSON (an künstlichen Objecten) gemachten Versuchen scheint es nun in der That, dass die Phase des Verschwindens oder des Minimums der Deutlichkeit mit einer relativ grossen Genauigkeit beobachtet werden kann und dass demnach die Interferenzmethode gerade in denjenigen Fällen, wo die übrigen Methoden wegen der Kleinheit des zu messenden Winkels versagen, zum Ziele führt.

Was den Zusammenhang zwischen dem Spaltabstande und der zu bestimmenden scheinbaren Grösse des Objectes angeht, so seien hier die folgenden beiden Fälle angeführt.

Das Object sei ein gleichförmig beleuchtetes kreisrundes Scheibchen mit dem scheinbaren Durchmesser d; bezeichnet dann λ die Wellenlänge des wirksamen Lichts, δ den Spaltabstand, und wird $k = \frac{\pi \delta d}{\lambda}$ gesetzt, so tritt ein Maximum der Deutlichkeit für diejenigen Werthe von k ein, welche das Integral $V = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - w^2}\, cos(kw)\, dw$ zu einem positiven oder negativen Maximum machen, dagegen ein Minimum der Deutlichkeit für die Werthe von k, für welche $V = 0$ wird. Da das Integral leicht auf eine BESSEL'sche I-Transcendente zurück-

---

1) Memoirs of the National academy of sciences Vol. V.

2) Vergl. S. CZAPSKI, Zeitschrift für Instrumentenkunde Jahrg. 1891, pag. 340.

geführt werden kann, $V = \frac{\pi}{2} \frac{I_e^{(1)}}{k}$, so kann man die hier in Betracht kommenden Werthe von k aus einer der an verschiedenen Orten gegebenen Tafeln der I-Functionen entnehmen[1]). Es ergiebt sich so, dass mit Weglassung des ersten Maximum (bei Spaltabstand = 0) der Durchmesser gefunden wird gemäss den Ausdrücken aus den Maxima

$$d = 1{\cdot}64 \frac{\lambda}{\delta_1 \sin 1''} = 2{\cdot}68 \frac{\lambda}{\delta_2 \sin 1''} = 3{\cdot}70 \frac{\lambda}{\delta_3 \sin 1''} = \ldots$$

und aus den Minima

$$d = 1{\cdot}22 \frac{\lambda}{\delta_1' \sin 1''} = 2{\cdot}23 \frac{\lambda}{\delta_2' \sin 1''} = 3{\cdot}24 \frac{\lambda}{\delta_3' \sin 1''} = 4{\cdot}24 \frac{\lambda}{\delta_4' \sin 1''} = \ldots$$

Ist das Object ein Doppelstern von der Distanz d, so treten die Interferenzfransen auf, wenn $\frac{\delta d}{\lambda} = n$ und sie verschwinden oder werden undeutlich, wenn $\frac{\delta d}{\lambda} = \frac{2n - 1}{2}$ ist, wo $n = 1, 2, 3 \ldots$

Man erhält folglich aus dem Erscheinen

$$d = \frac{\lambda}{\delta_1 \sin 1''} = \frac{2\lambda}{\delta_2 \sin 1''} = \frac{3\lambda}{\delta_3 \sin 1''}$$

und aus dem Verschwinden

$$d = \frac{\lambda}{2\delta_1' \sin 1''} = \frac{3\lambda}{2\delta_2' \sin 1''} = \frac{5\lambda}{2\delta_3' \sin 1''} = \frac{7\lambda}{2\delta_4' \sin 1''} = \ldots$$

Die gesuchte Grösse wird hiernach unmittelbar in Winkelmaass und unabhängig von der Brennweite des Objectivs gefunden. Auch kommt es, da die Methode mit Vortheil nur zur Bestimmung von sehr kleinen angulären Werthen angewandt wird, nicht einmal auf eine sehr genaue Messung der Abstände der Spalte an; für ein Sternpaar von 1" Distanz z. B. werden dieselben, wenn man $\lambda = 570\ \mu$ annimmt, für das Verschwinden der Reihe nach 59, 176, 294 *mm*, so dass eine Ungenauigkeit von 1 *mm* einen Fehler von weniger als 0"·02 erzeugen würde. Grössere Schwierigkeiten dürfte dagegen die Wahl des jedesmal anzuwendenden Werthes von λ bereiten. Für weitere Einzelheiten und für eine Anordnung, bei welcher die Spalte durch Spiegel ersetzt werden, muss auf die Originalabhandlung verwiesen werden.

Nach dem Vorgange von MICHELSON hat K. SCHWARZSCHILD[2]) ein Interferenzmikrometer angegeben, welches sich von dem vorhergehenden dadurch unterscheidet, dass die Messung sich nicht auf die Beurtheilung des Auftretens oder Verschwindens der Interferenzerscheinungen gründet, sondern ähnlich, wie bei einem Doppelbildmikrometer durch Einstellungen in die Mitte, und da auch Positionswinkel bestimmt werden, paralleles Anvisiren ausgeführt wird. Das Mikrometer von SCHWARZSCHILD ist daher eigentlich ein Doppel- oder Vielbildmikrometer und nur die Herstellung der vielfachen Bilder und ihre gegenseitige Verschiebung wird durch Interferenz der Lichtstrahlen bewirkt. An Stelle des MICHELSON'schen Schirmes mit zwei Spalten wird ein aus einer grösseren Anzahl äquidistanter Spalten gebildetes Gitter gesetzt; und dies hat zur Folge, dass im Gesichtsfeld des Fernrohrs an derselben Stelle, wo ohne Gitter der Stern sich

[1]) Eine solche Tafel findet sich in HANSEN's Schriften der Sternwarte Seeberg u. a. a. O.; dabei ist zu bemerken, dass BESSEL's $I_k^{(i)}$ bei HANSEN mit $I_{k/2}^{(i)}$ bezeichnet ist.

[2]) Astronom. Nachr., Bd. 139.

abbilden würde, ein farbloses Mittelbild erscheint, welches zu beiden Seiten von kleinen Perlen umgeben ist, die mit der Entfernung von der Mitte an Färbung und Ausdehnung zunehmen. Das Gitter ist um die Achse des Fernrohrs drehbar und der Spaltabstand selbst oder was auf dasselbe hinauskommt, seine Projection auf eine zur Fernrohrachse senkrechte Ebene kann innerhalb gewisser Grenzen geändert werden; bei dem versuchsweise für den Münchener Refractor hergestellten Apparat wurde dies in einfachster Weise durch Neigen der beiden durch Scharniere verbundenen Hälften des Gitters gegen die Fernrohrachse erreicht. Soll nun z. B. ein Doppelstern gemessen werden, so wird der Apparat zuerst um die Fernrohrachse gedreht, bis die von beiden Componenten herrührenden parallelen Reihen von Sternbildchen in eine einzige punktirte Linie fallen, was der senkrechten Stellung der Spaltrichtung entspricht. Stellt man hierauf einen Faden des Mikrometers dieser Linie parallel, so giebt die Ablesung des Positionskreises die Richtung oder in Verbindung mit der Richtung der täglichen Bewegung den Positionswinkel. Um die Distanz zu messen, wird der Spaltabstand oder die Neigung der Gitterebenen so lange geändert, bis ein Bild des Begleiters genau in der Mitte zweier Bilder des Hauptsterns erscheint. Ist der (projicirte) Spaltabstand δ, so folgt die Distanz aus:

$$d = \frac{\lambda n}{2\,\delta \sin 1''}$$

wo n als Ordnungszahl der Beugungsbilder $= 1, 2, 3 \ldots$ ist.

Die nach dieser Methode mittelst des erwähnten Versuchsapparates gemachten Messungen zeigen die Genauigkeit, die einem Doppelbildmikrometer eigen zu sein pflegt. Dagegen ist es noch nicht ausgemacht, ob nicht durch das verschiedene Aussehen der Beugungsbilder in Färbung und Ausbreitung systematische Fehler zu befürchten sind. In jedem Falle erscheint es rathsam, die Anwendung des Mikrometers nur auf kleine Distanzen (bis zu wenigen Secunden), bei denen die Dispersion noch keinen merklichen Einfluss hat, zu beschränken. Es sei noch bemerkt, dass die Breite der Spalte im Verhältniss zum Abstand wegen des bestimmenden Einflusses, den sie auf die relative Helligkeit der Beugungsbilder hat, richtig gewählt werden muss; nach den Versuchen von SCHWARZSCHILD würde etwa ein Drittel des Spaltabstandes als beste Spaltbreite gelten.

Verbesserung der Mikrometermessungen für Präcession, Nutation und Aberration.

Während bei der Ortsbestimmung von Planeten und Kometen durchgehends die gemessenen Unterschiede zu dem scheinbaren Ort des Vergleichsternes hinzugefügt und der dadurch erlangte Ort des Wandelsterns als wahrer Ort für die um die Lichtzeit verkleinerte Beobachtungszeit anzusehen ist, bietet sich in anderen Fällen häufig die Aufgabe dar, die beobachteten Unterschiede zwischen zwei Objecten auf eine mittlere Lage von Ekliptik und Aequator zu beziehen und von der Wirkung der Aberration zu befreien. Die hierfür erforderlichen Ausdrücke sollen an dieser Stelle kurz abgeleitet werden.

1. Unterschiede in Rectascension und Declination.

Seien, ausgedrückt in Bogensecunden, $\Delta\alpha'$ und $\Delta\delta'$ die beobachteten, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die wahren, auf das mittlere Aequinoctium zu Beginn des Beobachtungsjahres bezogenen Unterschiede, so ist unter Benutzung der BESSEL'schen Bezeichnungen und abgesehen von der eigenen Bewegung

$$
\begin{array}{ll}
a = m + n \sin\alpha \tang\delta & a' = n \cos\alpha \\
b = \cos\alpha \tang\delta & b' = -\sin\alpha \\
c = \cos\alpha \sec\delta & c' = \tang\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta \\
d = \sin\alpha \sec\delta & d' = \cos\alpha \sin\delta
\end{array}
$$

$$
*2-*1 \begin{cases} \Delta\alpha = \Delta\alpha' - A(a_2 - a_1) - B(b_2 - b_1) - C(c_2 - c_1) - D(d_2 - d_1) \\ \Delta\delta = \Delta\delta' - A(a_2' - a_1') - B(b_2' - b_1') - C(c_2' - c_1') - D(d_2' - d_1) \end{cases}
$$

wo die A, B, C, D die bekannten Reductionsgrössen sind[1]).

Bei der Kleinheit der Unterschiede, um die es sich hier meist handelt, kann man in der Entwickelung der Differenzen $a_2 - a_1$, $b_2 - b_1$, ... ausser in sehr hoher Declination bei dem ersten Gliede stehen bleiben und gelangt dadurch zu folgenden Ausdrücken. Seien

$$
\alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \qquad \delta_0 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}
$$

$$
\begin{array}{lll}
-n\cos\alpha_0 \sin\delta_0 \sec\delta_0 \sin\Delta\alpha & -\, n\sin\alpha_0 \sec^2\delta_0 \sin\Delta\delta & = a \\
\sin\alpha_0 \sin\delta_0 \sec\delta_0 \sin\Delta\alpha & -\cos\alpha_0 \sec^2\delta_0 \sin\Delta\delta & = b \\
\sin\alpha_0 \sec\delta_0 \sin\Delta\alpha & -\cos\alpha_0 \sin\delta_0 \sec^2\delta_0 \sin\Delta\delta & = c \\
-\cos\alpha_0 \sec\delta_0 \sin\Delta\alpha & -\sin\alpha_0 \sin\delta_0 \sec^2\delta_0 \sin\Delta\delta & = d \\
n\sin\alpha_0 \sin\Delta\alpha & & = a' \\
\cos\alpha_0 \sin\Delta\alpha & & = b' \\
\cos\alpha_0 \sin\delta_0 \sin\Delta\alpha & +(\tang\varepsilon \sin\delta_0 + \sin\alpha_0 \cos\delta_0)\sin\Delta\delta & = c' \\
\sin\alpha_0 \sin\delta_0 \sin\Delta\alpha & -\cos\alpha_0 \cos\delta_0 \sin\Delta\delta & = d'
\end{array}
$$

wo für $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die beobachteten Werthe genommen werden können, so wird

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha &= \Delta\alpha' + Aa + Bb + Cc + Dd \\
\Delta\delta &= \Delta\delta' + Aa' + Bb' + Cc' + Dd'
\end{aligned}
$$

Während diese Ausdrücke bei häufiger zu wiederholenden Reductionen desselben Sternpaares wegen der für längere Zeit als constant anzunehmenden oder linear zu interpolirenden Werthe der $a, b, .. a', b', ..$ recht bequem sind, verdient für einzelne Reductionen die Einführung der g, G, h ... Grössen den Vorzug. Setzt man

$$
\begin{array}{lll}
g\cos(G + \alpha_0)\sin\delta_0 & + h\cos(H + \alpha_0) & = a \\
g\sin(G + \alpha_0) & + h\sin(H + \alpha_0)\sin\delta_0 & = b \\
-i\sin\delta_0 & + h\cos(H + \alpha_0)\cos\delta_0 & = c,
\end{array}
$$

so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha &= \Delta\alpha' - (a\sec\delta_0 \sin\Delta\alpha + b\sec^2\delta_0 \sin\Delta\delta) \\
\Delta\delta &= \Delta\delta' + (b\sin\Delta\alpha - c\sin\Delta\delta).
\end{aligned}
$$

Die Reduction der Unterschiede $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ von dem mittleren Aequator und dem mittleren Aequinoctium zur Zeit t auf die Lage zur Zeit t' ergiebt sich aus den Formeln für die Präcession:

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha_{t'} &= \Delta\alpha_t + n(\cos\alpha_0 \tang\delta_0 \sin\Delta\alpha + \sin\alpha_0 \sec^2\delta_0 \sin\Delta\delta)(t' - t) \\
\Delta\delta_{t'} &= \Delta\delta_t - n\sin\alpha_0 \sin\Delta\alpha(t' - t),
\end{aligned}
$$

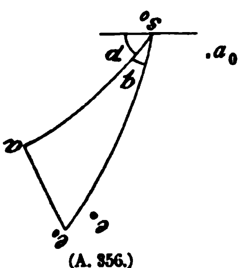
wo die Grössen auf der rechten Seite für das Mittel der Zeiten genommen werden müssen.

---

[1]) Vergl. pag. 193 unten.

2. Positionswinkel und Distanz.

Seien e_0 (Fig. 356) der Pol der festen Ekliptik für die Anfangsepoche t_0, a_0 der Pol des Aequators für dieselbe Zeit, e und a der Pol der Ekliptik und des Aequators für die Zeit t, s_0 die Mitte des die beiden Sterne verbindenden Bogens gr. Kr.; ferner werde gesetzt der Positionswinkel $= p$, der Winkel $e_0 s_0 a = q$, dann ist, weil $p+q$ von der Präcession nicht berührt wird, $\frac{dp}{dt} = -\frac{dq}{dt}$. Unter Anwendung der Bezeichnungen: L, B mittlere Länge und Breite von s_0 für die Zeit t_0, α, δ mittlere Rectascension und Declination für die Zeit t, ω Winkel zwischen Aequator und fester Ekliptik, $a e_0 a_0 = \psi$ = Lunisolarpräcession, $e a e_0 = v$ = Präcession durch die Planeten, hat man:


(A. 356.)

$$\cos\delta \sin q = \sin\omega \cos(L+\psi)$$
$$\cos\delta \cos q = \cos\omega \cos B - \sin\omega \sin B \sin(L+\psi)$$

woraus durch Differentiation und nach Elimination von $d\delta$ folgt:

$$\cos\delta\, dq = -\sin(\alpha+v)\sin\omega\, d\psi + \cos(\alpha+v)\, d\omega.$$

Berücksichtigt man, dass nach der Theorie der Präcession $v = \frac{d\omega}{\sin\omega\, d\psi}$, so wird

$\cos\delta\, dq = -\sin\alpha \sin\omega\, d\psi$ oder nach Einführung von $n = \sin\omega \frac{d\psi}{dt}$

$$\frac{dp}{dt} = n \sin\alpha \sec\delta.$$

Der Einfluss der Präcession auf den Positionswinkel in der Zeit $t'-t$ wird folglich

$$\Delta p = n \sin\alpha_0 \sec\delta_0 (t'-t),$$

wo statt α und δ, α_0 und δ_0 gesetzt sind und diese, ebenso wie n für die Mitte der Zeiten genommen werden müssen.

Die Nutation verursacht periodische Schwankungen in der Lage des Poles a, welche von der Form sind:

$$\sin\omega\, d\psi = -6''\!\cdot\!87 \sin\Omega + \ldots$$
$$d\omega = +9''\!\cdot\!22 \cos\Omega + \ldots,$$

wo Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik bedeutet, und die kleineren von 2Ω und den jeweiligen Stellungen von Sonne und Mond in ihren Bahnen abhängigen Glieder weggelassen sind. Anstatt diese Ausdrücke in die obige Gleichung für $\cos\delta\, dq$ einzusetzen und den Positionswinkel zuerst auf die mittlere Lage des Poles zur Zeit der Beobachtung zu beziehen, verfährt man einfacher, wenn man unter Benutzung der in den astronomischen Jahrbüchern gegebenen Hülfsmittel den Positionswinkel sogleich auf die mittlere Pollage zu Beginn des Beobachtungsjahres überträgt. Ist t die seit Beginn des Jahres verflossene Zeit, ausgedrückt in Theilen des Jahres, und haben A und B die bekannte Bedeutung

$$A = t + \frac{1}{n}(-6''\!\cdot\!87 \sin\Omega + \ldots)$$
$$B = -9''\!\cdot\!22 \cos\Omega + \ldots,$$

so erhält man aus der Gleichung für $\cos\delta\, dq$, nachdem $v = 0$ gesetzt ist, zur Reduction auf den Jahresanfang

$$\Delta p = -(An \sin\alpha_0 + B\cos\alpha_0)\sec\delta_0.$$

Setzt man daher

$$-\frac{n \sin \alpha_0 \sec \delta_0}{60} = a' \qquad -\frac{\cos \alpha_0 \sec \delta_0}{60} = b',$$

so wird die Reduction des zur Zeit t gemessenen Positionswinkels auf die mittlere Lage des Poles zur Zeit t', ausgedrückt in Minuten:

$$\Delta p = [A - (t' - T)]a' + Bb',$$

wo T den Anfang des Beobachtungsjahres bedeutet.

Will man die g, G, Grössen anwenden, so wird die Reduction auf den Jahresanfang $\Delta p = - g \sin (G + \alpha_0) \frac{\sec \delta_0}{60}$.

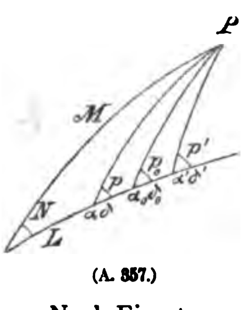
Die Distanz wird natürlich von der Präcession und Nutation nicht betroffen.

Durch die Aberration erscheint der Ort eines Sternes um die Quantitäten verschoben:

$$d\alpha = C \cos \alpha \sec \delta + D \sin \alpha \sec \delta = h \sin (H + \alpha) \sec \delta$$
$$d\delta = - C \sin \alpha \sin \delta + C \tang \varepsilon \cos \delta + D \cos \alpha \sin \delta = h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta,$$

wo k die Aberrationsconstante (nach neueren Annahmen 20·″47), ☉ die Länge der Sonne, ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnen, und

$$C = - k \cos ☉ \cos \varepsilon \qquad h \sin H = C$$
$$D = - k \sin ☉ \qquad h \cos H = D$$
$$i = C \tang \varepsilon.$$



(A. 357.)

Ist in Fig. 357 P der Pol des Aequators, so giebt das Dreieck zwischen diesem und den Oertern der beiden Sterne zunächst folgende Differentialformeln:

$$ds = \cos \delta \sin p \,(d\alpha' - d\alpha) + \cos p' d\delta' - \cos p \, d\delta$$
$$\sin s \, dp = \cos \delta' \cos p' (d\alpha' - d\alpha) + \sin p \cos s \, d\delta - \sin p' d\delta'$$
$$\sin s \, dp' = \cos \delta \cos p \,(d\alpha' - d\alpha) - \sin p' \cos s \, d\delta' + \sin p \, d\delta.$$

Nach Einsetzung der obigen Werthe von $d\alpha$, $d\delta$, .. geht die erste Gleichung über in:

$$ds = C \{\cos \alpha' \sin p' - \cos \alpha \sin p - \sin \alpha' \sin \delta' \cos p' + \sin \alpha \sin \delta \cos p$$
$$+ (\cos \delta' \cos p' - \cos \delta \cos p) \tang \varepsilon\}$$
$$+ D \{\sin \alpha' \sin p' - \sin \alpha \sin p + \cos \alpha' \sin \delta' \cos p' - \cos \alpha \sin \delta \cos p\}.$$

Dieselbe nimmt eine sehr viel concisere Form an, wenn man nach dem Vorgang von BESSEL[1]) den Bogen s bis zum Durchschnittspunkt mit dem Aequator oder, wie SEELIGER[2]) thut, bis zum Durchschnittspunkt mit dem Declinationskreis des Tag- und Nachtgleichenpunktes verlängert.

Bezeichnet in letzterem Falle M die Poldistanz dieses Punktes, L den Abstand desselben von dem nächsten der beiden Sterne, und N den Winkel, den L mit M einschliesst, so wird:

$$\sin N \cos (L + s) = \cos \alpha' \sin p' - \sin \alpha' \sin \delta' \cos p'$$
$$\sin N \cos L = \cos \alpha \sin p - \sin \alpha \sin \delta \cos p,$$

wodurch das Aggregat der ersten vier Glieder in dem Factor von C übergeht in $- 2 \sin N \sin \left(L + \frac{s}{2}\right) \sin \frac{s}{2}$ oder $- 2 \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \sin \frac{s}{2}$, wenn α_0, δ_0 die Coordinaten der Mitte des Bogens zwischen den beiden Sternen sind.

---

[1]) F. W. BESSEL, Einfluss der Präcession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometischer Messungen. Astron. Unters. Bd. I (auch ENGELMANN, Abh. Bd. 1).

[2]) H. SEELIGER, Theorie des Heliometers, Leipzig 1877.

Berücksichtigt man ferner, dass $\cos\delta'\cos p' - \cos\delta\cos p = -2\sin\delta_0\sin\frac{s}{2}$ und dass nach der Transformationsformel von CAGNOLI:

$$\sin\alpha'\sin p' + \cos\alpha'\sin\delta'\cos p' = \sin M\sin(L+s) + \cos M\cos(L+s)\cos N$$
$$\sin\alpha\ \sin p + \cos\alpha\ \sin\delta\ \cos p = \sin M\sin L \qquad + \cos M\cos L\cos N,$$

so erhält die Gleichung für ds jetzt die einfache Gestalt:

$$ds = -2C\sin\frac{s}{2}(\cos\delta_0\sin\alpha_0 + \mathrm{tang}\,\varepsilon\sin\delta_0) + 2D\sin\frac{s}{2}\cos\delta_0\cos\alpha_0$$

oder auch

$$= \quad 2\sin\frac{s}{2}h\cos(H+\alpha_0)\cos\delta_0 - 2\sin\frac{s}{2}\,i\sin\delta_0.$$

Das Differential des Positionswinkels p_0 ist:

$$dp_0 = \cos\frac{s}{2}dp' - \sin\delta_0(d\alpha' - d\alpha_0) - \sin\frac{s}{2}\sin p'\,d\delta'$$
$$= \cos\frac{s}{2}dp - \sin\delta_0(d\alpha - d\alpha_0) + \sin\frac{s}{2}\sin p\,d\delta$$

oder im Mittel aus beiden Gleichungen

$$dp_0 = \cos\frac{s}{2}\,\frac{dp'+dp}{2} - \sin\delta_0\left(\frac{d\alpha'+d\alpha}{2} - d\alpha_0\right) - \frac{\sin\frac{s}{2}}{2}(\sin p'\,d\delta' - \sin p\,d\delta).$$

Drückt man hier $\cos\frac{s}{2}\,\frac{dp'+dp}{2}$ vermittelst der 2. und 3. Ausgangsgleichung durch $d\alpha'$, $d\delta'$, . . aus, so geht die Gleichung über in:

$$dp_0 = \frac{d\alpha' - d\alpha}{4\sin\frac{s}{2}}(\cos\delta'\cos p' + \cos\delta\cos p) - \frac{\cos^2\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}(\sin p'\,d\delta' - \sin p\,d\delta)$$
$$- \sin\delta_0\left(\frac{d\alpha'+d\alpha}{2} - d\alpha_0\right) - \frac{\sin\frac{s}{2}}{2}(\sin p'\,d\delta' - \sin p\,d\delta)$$

und nach Substitution der Werthe von $d\alpha'$, $d\delta'$, . . und unter Berücksichtigung der Relation $\cos\delta\cos p - \cos\delta'\cos p' = 2\sin\delta_0\sin\frac{s}{2}$

$$2\sin\tfrac{1}{2}s\,dp_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}s\sin\delta_0\,d\alpha_0 + C(\cos\alpha'\cos p' + \sin\alpha'\sin\delta'\sin p')$$
$$- C(\cos\alpha\cos p + \sin\alpha\sin\delta\sin p)$$
$$+ D(\sin\alpha'\cos p' - \cos\alpha'\sin\delta'\sin p')$$
$$- D(\sin\alpha\cos p - \cos\alpha\sin\delta\sin p).$$

Die beiden Coëfficienten von $\pm C$ bezw. $\pm D$ sind aber nur verschiedene Ausdrücke derselben Grösse $\cos N$ bezw. $-\sin N\cos M$, so dass die Gleichung die ganz einfache Form annimmt

$$dp_0 = \sin\delta_0\,d\alpha_0 = \mathrm{tang}\,\delta_0(C\cos\alpha_0 + D\sin\alpha_0)$$
$$= h\sin(H+\alpha_0)\,\mathrm{tang}\,\delta_0.$$

Setzt man also

$$\mathrm{tang}\,\varepsilon\sin\delta_0 + \cos\delta_0\sin\alpha_0 = c \qquad -\frac{\mathrm{tang}\,\delta_0\cos\alpha_0}{60} = c'$$
$$-\cos\delta_0\cos\alpha_0 = d \qquad -\frac{\mathrm{tang}\,\delta_0\sin\alpha_0}{60} = d',$$

so werden nunmehr die an die beobachteten Werthe der Distanz und des Positionswinkels wegen der Aberration des Lichtes anzubringenden Verbesserungen:

$$\Delta s = s \sin 1'' (Cc + Da) = - s \sin 1'' [h \cos (H + \alpha_0) \cos \delta_0 - i \sin \delta_0]$$

$$\Delta p = (Cc' + Dd') \qquad = - \frac{h}{60} \sin (H + \alpha_0) \tang \delta_0.$$

Die ganze zur Uebertragung auf die Pollage zur Zeit t' und zur Befreiung von der Wirkung der Aberration an den Positionswinkel anzubringende Verbesserung ist folglich:

$$\Delta p = [A - (t' - T)]a' + Bb' + Cc' + Dd'.$$

Da die Grössen c, d, c', d' von dem Positionswinkel und der Distanz unabhängig sind, so ändert die Aberration die Entfernungen unabhängig von ihrer Richtung, und die Positionswinkel unabhängig sowohl von der Richtung, als der Distanz. Der zuerst von BESSEL für kleine Distanzen ausgesprochene Satz, dass ein sphärischer Kreis durch die Aberration zwar verschoben, gedreht und vergrössert oder verkleinert wird, aber sich nicht in eine andere Curve verwandelt, ist demnach, wie SEELIGER hervorgehoben hat, allgemein gültig.

D'ARREST hat dem Ausdruck für die Aenderung der Distanz noch eine andere Form gegeben, aus der zugleich das Gesetz hervorgeht, nach welchem sich jener Kreis erweitert oder zusammenzieht. Bezeichnen a und d die Rectascension und Declination des Apex der Bewegung der Sonne in ihrer jährlichen Bahn, so hat man

$$\begin{aligned} \sin d &= \sin \varepsilon \cos \odot \\ \cos d \sin a &= \cos \varepsilon \cos \odot \\ \cos d \cos a &= - \sin \odot \\ C &= - k \cos d \sin a \\ D &= k \cos d \cos a \end{aligned}$$

und damit, wenn ds sich, wie vorher, auf den Uebergang vom scheinbaren auf den wahren Ort bezieht,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{2 \sin \frac{s}{2}} &= - k [\cos \delta_0 \cos d \cos (a - \alpha_0) + \sin \delta_0 \sin d] \\ &= - k \cos \sigma, \end{aligned}$$

wo σ der Bogen ist, der sich vom Punkte $\alpha_0 \delta_0$ bis zum Apex erstreckt. In derselben Weise wird, wenn Σ den Winkel bezeichnet, den der Bogen σ mit dem Declinationskreis von $\alpha_0 \delta_0$ macht,

$$\begin{aligned} dp &= k \tang \delta_0 \cos d \sin (a - \alpha_0) \\ &= k \tang \delta_0 \sin \sigma \sin \Sigma. \end{aligned}$$

Die Wirkung der Aberration auf die Bestimmung der Planetendurchmesser findet ihren Ausdruck und zugleich ihre Berücksichtigung darin, dass der gemessene Werth für die Entfernung gilt, in welcher der Planet sich zu der um die Aberrationszeit verkleinerten Beobachtungszeit befunden hat. Eine einfache Ueberschlagsrechnung zeigt, dass die hieraus hervorgehende Aenderung des auf die Einheit der Entfernung bezogenen Durchmessers bei Jupiter und Saturn im Maximum noch nicht 0''·02 erreicht und bei den übrigen Planeten unter 0''·01 bleibt. Man darf daher in Anbetracht der erheblich grösseren Unsicherheit der Messung den Einfluss der Aberration bei der Ermittlung des Durchmessers einer Planetenscheibe ganz übergehen. E. BECKER.

Mond. Der der Erde am nächsten kommende und daher auch am genauesten untersuchte Himmelskörper ist der Satellit der Erde, der Erdmond. So sehr sich aber auch die Astronomen mit der Untersuchung dieses Himmelskörpers zu allen Zeiten beschäftigt haben, so kann man doch keineswegs behaupten, dass unser Wissen von demselben ein zureichendes oder gar durchaus erschöpfendes wäre. Schon die Bewegung des Mondes um die Erde bietet der theoretischen Untersuchung Schwierigkeiten, über welche bereits in der »Allgemeinen Einleitung in die Astronomie« und in dem Artikel »Mechanik des Himmels« wiederholt zu sprechen Gelegenheit war. An dieser Stelle mögen nur die Resultate der Untersuchungen, diejenigen Elemente, welche jetzt als die verlässlichsten gelten, angeführt werden.

Die Elemente der Mondbahn, soweit dieselben jetzt noch als elliptisch angesehen werden können, sind:

Mittlere Entfernung von der Erde . .	60·273 Erdhalbmesser
oder	384420 Kilometer.
Siderische Umlaufszeit	$27^d 7^h 43^m 11^s \cdot 5$
Mittlere tägliche siderische Bewegung .	13° 3′ 53″·97
Excentricität der Bahn	0·05491
Neigung der Bahn	5° 8′ 47″·9 gegen die Ekliptik.

Die Lage der Apsiden- und Knotenlinie ist nicht fest; die erstere bewegt sich im Sinne der Zeichen, jährlich um etwa $40\frac{2}{3}$°, so dass ein Umlauf in 8 Jahren 310 Tagen vollendet wird; die letztere rückt im entgegengesetzten Sinne, jährlich um $19\frac{1}{3}$° weiter, und vollendet einen Umlauf in 18 Jahren 218 Tagen.

Die mittlere Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe des Mondes, aus welcher sich der obige Werth der Entfernung ableitet, ist der von Hansen aus neueren Beobachtungen abgeleitete 57′ 2″·06, doch schwanken die Werthe gemäss der verschiedenen Entfernung des Mondes von der Erde zwischen 53′ 54″ und 61′ 29″.

Der scheinbare Durchmesser des Mondes in der mittleren Entfernung desselben von der Erde ist 31′ 4″·5, und liegt innerhalb der Grenzen 29′ 26″ und 33′ 33″; da sich, wie man leicht sieht, der wirkliche Halbmesser des Mondes zum Erdhalbmesser, wie der Sinus des scheinbaren Halbmessers zur mittleren Aequatoreal-Horizontalparallaxe verhält, so findet man für den wahren Halbmesser 0·2724 Erdhalbmesser = 3480 *km*. Damit wird die Oberfläche des Mondes $\frac{1}{13\cdot5}$ der Erdoberfläche, das Volumen des Mondes $\frac{1}{49\cdot5}$ des Erdvolumens. Da die Masse des Mondes aus den theoretischen Untersuchungen über die Störungen der Rotationsaxe der Erde, aus den Erscheinungen der Ebbe und Flut u. s. w. gleich $\frac{1}{80}$ gefunden wurde, so resultirt hieraus für den Mond die mittlere Dichte 0·618 der Erddichte, oder, diese zu 5·5 des Wassers angenommen, die Dichte des Mondes bezogen auf Wasser 3·4.

Eine Abplattung konnte bisher beim Monde nicht entdeckt werden, hingegen ist zu bemerken, dass Hansen aus theoretischen Untersuchungen fand, dass der Schwerpunkt des Mondes etwa 59·5 *km* weiter von der Erde entfernt ist, als sein Mittelpunkt.

Da der Mond uns beständig dieselbe Seite zuwendet, so kennen wir natürlich nur diese; von der jenseitigen Mondhälfte können wir nur die Randpartien in Folge der Libration in Länge und Breite (s. den Artikel »Mechanik des Himmels«, pag. 604 ff.) zu Gesicht bekommen.

Allein unsere Kenntniss von der Oberfläche des Mondes ist noch ziemlich unvollkommen. Mit Ausnahme einiger allgemeiner Schlüsse, die bereits mit ziemlicher Sicherheit aus den beobachteten Thatsachen gezogen werden konnten, befinden wir uns hierüber, insbesondere über einige, die feinere Structur betreffenden Punkte, noch wesentlich in dem Stadium der Hypothesen und Conjekturen.

Die Thatsache, dass die Oberfläche des Mondes nicht gleich hell ist, war schon den Alten bekannt. Die Pythagoräer und ebenso ARISTOTELES hielten die Flecken für Abspiegelungen der irdischen Meere und Gewässer. PARMENIDES erklärte die dunklen Stellen für dunkle Beimischungen zu seinen flüssigen Theilen. Dass die Flecken dem Monde im Viertel das Ansehen eines menschlichen Gesichtes ertheilen, sprach PLUTARCH in seiner Schrift »De facie in orbe Lunae« aus.

Schon GALILEI fand mit dem Fernrohre die gebirgige Beschaffenheit des Mondes, indem er die mit dem Alter des Mondes wechselnden Schatten richtig deutete. Auch versuchte er aus denselben bereits die Höhen der Mondberge zu bestimmen (vergl. den ersten Band, pag. 75).

Ein wirklicher Fortschritt in der Selenographie datirt jedoch erst seit HEVEL. Dieser gab aus seinen eigenen, 5 Jahre umfassenden Mondbeobachtungen Darstellungen des Mondes für jeden Tag seines Alters und 1647 eine allgemeine Mondkarte, auf welcher die dunkeln Flecke als *Mare* bezeichnet wurden, wobei er aber bereits bemerkt, dass er sie nicht den irdischen Meeren gleichartig hält, sondern diesen Namen nur wählt, weil er sie mit nichts anderem zu vergleichen wisse. So hatte er eine *Propontis*, einen *Pontus Euxinus*, ein *Mare Mediterraneum* u. s. w. auf den Mond verlegt. Auch den Gebirgen und Ländern gab er Namen irdischer Objekte, doch verwahrte er sich auch hier ausdrücklich dagegen, dass diese Bezeichnungen Aehnlichkeiten mit gleichnamigen irdischen Objekten ausdrücken könnten.

Dieses geographische Princip hat RICCIOLI bei seiner 1651 erschienenen Karte[1]), verlassen. Den dunkeln Flecken, welche er ebenfalls als *Mare* bezeichnete, gab er Namen, die nach MÄDLER aus dem angenommenen Einfluss des Mondes auf die irdischen Geschicke hergeleitet sind. So finden sich die Namen: *Mare Serenitatis*, *Mare Tranquillitatis*, *Mare Crisium* u. s. w. Diese Namen haben sich seither erhalten, ohne dass denselben eine Bedeutung, weder in Rücksicht auf den Einfluss auf die Menschen, noch auch in Rücksicht auf Verhältnisse. welche sich vielleicht auf dem Monde vorfinden könnten, beigelegt wird; insbesondere muss erwähnt werden, dass man mit dem Worte *Mare* keineswegs den Sinn zu verbinden hat, dass wirkliches Wasser auf dem Monde sei; man thut deshalb auch besser, nicht von »*Mondmeeren*« zu sprechen, sondern, wie dieses seit MÄDLER üblich ist, immer das Wort »*Mare*« zu gebrauchen und dasselbe einfach als Bezeichnung für die dunklen Mondflecke zu betrachten.

Bei der Bezeichnung der Berge und Länder wählte RICCIOLI die Namen berühmter Männer und machte dabei nur eine Ausnahme: den Namen KATHARINA, welchen der Jesuit LANGRENUS in seiner 1645 erschienenen »Selenographie« unter anderen Heiligennamen verwendet hatte, liess er stehen, das Princip befolgend, nach welchem auch jetzt sehr häufig die kleinen Planeten benannt werden,. Zu erwähnen ist, dass er die Sorge für seinen eigenen Namen auch nicht der Nachwelt überliess, sondern denselben neben demjenigen GRIMALDI's selbst einsetzte.

---

[1]) Eine verkleinerte Reproduction derselben findet sich in der »Connaissance des temps« für 1788, pag. 344.

Nach RICCIOLI war es DOMINIQUE CASSINI, der 1673 Karten des Mondes für jeden Tag seines Alters und 1692 eine grössere Mondkarte von 20 Zoll Durchmesser herausgab, die aber nur in kleiner Auflage erschien, von der jedoch später (1787) LALANDE eine neue Auflage besorgte.

Alle diese Karten waren aber nach Zeichnungen angefertigt, die bloss nach dem Augenmaass genommen waren; der erste, der Fixpunkte nach ihrer selenographischen Länge und Breite durch wirkliche Messungen festlegte, war TOB. MAYER. Er bestimmte in dieser Weise 27 Flecke für mittlere Libration und wollte hiernach einen Mondglobus anfertigen, von welchem er jedoch bei seinem Tode erst den sechsten Theil vollendet hatte. Indes erschien 1749 seine bereits sehr gute Mondkarte von $7\frac{1}{2}''$ Durchmesser. Die Detailzeichnungen MAYER's sind neuerdings von der Göttinger Sternwarte herausgegeben.

Aus derselben Zeit wären noch die Beobachtungen von SCHRÖTER, der 1791 seine »selenotopographischen Fragmente« herausgab, und GRUITHUISEN aus den Jahren 1799 bis 1801 zu erwähnen, welche aber, wenn sie auch sehr brauchbares Material zum Vergleichen bieten, dennoch keinen wesentlichen Fortschritt in der Selenographie bedeuten.

Ein solcher datirt erst seit den Arbeiten LOHRMANN's, welcher 1820 seine Beobachtungen in Dresden begann; von der auf 25 Sectionen vertheilten Karte wurden 1824 die vier ersten Sectionen publicirt, und 1839 eine kleine Generalkarte des Mondes; die übrigen 21 Sectionen hatte LOHRMANN zwar bereits 1836 vollendet, sie wurden aber erst lange nach seinem 1840 erfolgten Tode unter der Leitung von SCHMIDT 1878 herausgegeben.

Inzwischen hatten 1830 BEER und MÄDLER ihre Mondbeobachtungen begonnen, als deren Frucht 1834 die erste grosse Mondkarte erschien.

Einen vorläufigen Abschluss erhielten diese Untersuchungen durch die 1878 gleichzeitig mit der LOHRMANN'schen erschienene SCHMIDT'sche Mondkarte, deren Bearbeitung 1840 begonnen wurde. Die von BIRT im Auftrage der British Association übernommene Anfertigung einer Mondkarte hat noch nicht zur Publikation derselben geführt.

Die SCHMIDT'sche Mondkarte, im doppelten Maassstabe derjenigen von MÄDLER und LOHRMANN (die letzteren beiden haben einen Meter Durchmesser, die SCHMIDT'sche zwei Meter), ist in den Details viel weiter ausgearbeitet, und ohne eine bedeutende Vergrösserung des Maassstabes ist es nicht wohl möglich, noch weitere Details in eine Karte aufzunehmen. Doch sind gerade in der letzten Zeit die Bestrebungen dahin gerichtet, gerade die feineren Details zur Darstellung zu bringen, um event. Veränderungen der Mondoberfläche constatiren zu können, wovon später gesprochen wird. Hierzu hat man den Weg einzuschlagen begonnen, welcher auch für die Gegenden der Erde seit langer Zeit üblich ist: man fertigt Specialkarten einzelner Gegenden an, in welche diejenigen Details eingetragen werden, welche sich mit stark vergrössernden Fernröhren dem Beobachter darbieten.

Ehe an eine topographische Beschreibung der Mondoberfläche gegangen werden kann, müssen in Kürze einige die Bezeichnungsweise betr. Bemerkungen vorausgeschickt werden.

1) Ueber die Bezeichnung *Mare* wurde das nötige bereits gesagt. Die Maria sind von dem lichten Theile der Oberfläche theils scharf abgegrenzt, theils gehen sie continuirlich in diesen über; sie hängen unter einander zusammen; nur das *Mare Crisium* bildet, soweit die sichtbaren Details es bis jetzt anzunehmen gestatten, ein allseitig geschlossenes Mare. Auf der sichtbaren Mond-

oberfläche nimmt die Gesammtfläche der Maria ungefähr die Hälfte der Gesammtfläche ein; eine genaue Grössenbestimmung ist natürlich in Folge der ungenauen Grenzbestimmung nicht möglich. Zu ihnen gehören die als Palus, Lacus, Sinus (Sumpf, See, Bucht) bezeichneten kleinen, mitunter auch etwas helleren und weniger einförmigen, immerhin aber noch wenig formenreichen Gebilde der Mondoberfläche.

2) Die helleren Theile der Mondoberfläche sind viel ungleichmässiger und zeichnen sich dadurch aus, dass auf ihnen bei schräger Beleuchtung Schatten verschiedener Länge sichtbar werden, wodurch sich die unter verschiedenartigem Lichte erscheinenden Partien als Erhebungen zu erkennen geben. Diese sind verschiedener Art; es sind:

a) Einzelne, isolirte Berge oder langgestreckte Bergrücken, die, wenn sie niedrig sind, oft nur als helle Bergadern erscheinen oder bei grösserer Mächtigkeit als Bergketten auftreten.

b) In grösserer Ausdehnung vereinigte Reihen von Bergketten bilden Hügellandschaften oder Massengebirge, wie die Appeninen, Alpen, Hämus, Caucasus.

c) Eine dem Monde eigenthümliche, auf diesem weit verbreitete Formation ist diejenige der Wallebenen, Ringgebirge und Krater. Diese zeichnen sich durch einen mehr oder weniger kreisförmigen und hohen Wall aus, der eine innere, meist stark vertiefte Fläche begrenzt, aus welcher sich meist wieder einzelne isolirte Berge, Bergrücken, selbst kleinere Krater oder Ringgebirge, sogen. Centralberge, Centralketten, Centralmassen erheben. Der Unterschied zwischen den Ringgebirgen und Wallebenen ist nur aus der Grösse entnommen. Man unterscheidet auch wohl kleine, mittelgrosse und grosse Ringgebirge von den Wallebenen. Eine einheitliche Auffassung hat hier jedoch noch keineswegs Platz gegriffen. H. Ebert bezeichnet in seiner äusserst schätzenswerthen Zusammenfassung »Ueber die Ringgebirge des Mondes«[1]) als »kleine Ringgebirge« solche, deren Durchmesser bis etwa 30 *km*, als »mittelgrosse Ringgebirge« solche zwischen 30 und 90 *km*, als »grosse Ringgebirge« solche zwischen 90 und 120 *km* Durchmesser, und als »Wallebenen« Gebilde mit über 120 *km* Durchmesser. Mädler bezeichnet als Wallebenen Flächen von 10 bis 30 Meilen (75 bis 225 *km*) Durchmesser; als Ringgebirge solche zwischen 15 bis 75 *km* Durchmesser, und die kleineren, sonst aber ganz gleich geformten, stets mit einem Centralberge versehenen Gebilde als Krater, während solche Formen, bei denen weder ein bedeutend erhöhter Wall, noch ein Centralberg deutlich zu sehen sind, als Kratergruben bezeichnet werden.

Im Gegensatze zu der Bezeichnung Mare hat man daher die Bezeichnungen Berge, Thäler, Stufenlandschaften, Hochgebirge u. s. w. in derjenigen Bedeutung zu nehmen, welche man denselben auf der Erde beilegt; denn, ohne hier auf die Bestimmung der Höhe einzugehen, worüber zum Schlusse gesprochen wird, kann dennoch schon hier erwähnt werden, dass ja unter gleichen Umständen grössere Höhen auch längere Schatten werfen werden, und die erstere direkt aus der Schattenlänge bestimmt werden kann.

Bereits Mädler bemerkt in den Erläuterungen zu seiner Mondkarte, dass sowohl die Ringgebirge, als auch die Wallebenen keineswegs regelmässig begrenzt wären, sondern dass von den Wällen meist Ausläufer nach Aussen gehen, dass einzelne Wälle nicht ganz geschlossen sind, sondern sich nach einer oder

---

[1]) Sitzungsber. der Phys. med. Societät Erlangen, 1890.

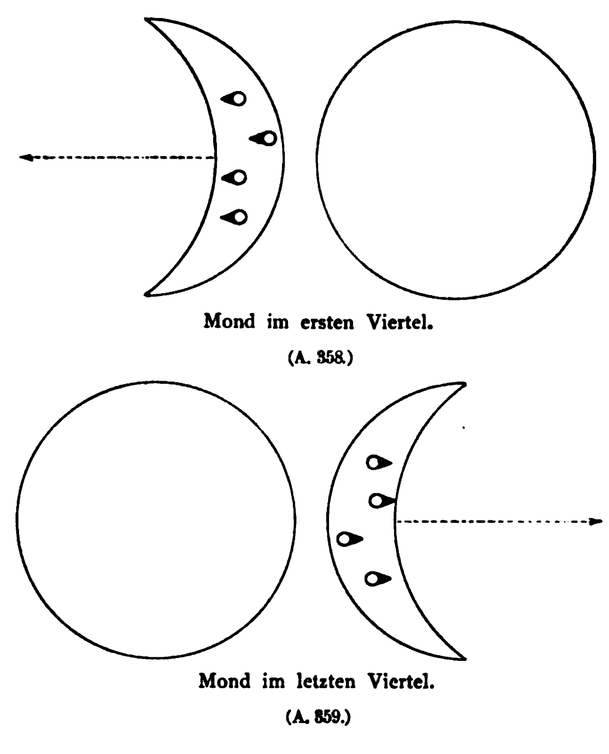
selbst mehreren Seiten öffnen (unvollkommene Ringgebirge) oder dass zwei oder mehrere durch Querwälle miteinander verbunden sind, oder dass mehrere, einzeln genommene Theile eines Walles nicht um die ganze Wallebene hinziehen, die Gesammtheit mehrerer Wälle aber die Fläche ziemlich vollkommen abschliesst. Im Grossen und Ganzen jedoch herrscht auf seiner Karte bei den Ringgebirgen und Wällen mehr der Charakter der geschlossenen Wälle vor. Spätere Beobachtungen haben diese Auffassung widerlegt, und schon die Karte von LOHRMANN zeigt weit weniger geschlossene Wälle und viel mehr weite Flächen, die durch unregelmässig laufende Gebirgszüge begrenzt werden. Hauptsächlich für die grossen Wallebenen tritt dieser Charakter hervor, während die kleinen Ringgebirge und namentlich die Krater mit den jetzt erreichten Vergrösserungen noch immer als regelmässig kreisförmig begrenzt erscheinen.

Am Mondrande sind selbstverständlich die Berge und Krater schwer oder gar nicht von einander zu unterscheiden, ebenso wenig Bergketten und Wallebenen, da ja in der perspektivischen Verkürzung das Innere der Formen fast ganz verschwindet.

Eine einheitliche Mondkarte kann nicht das Bild wiedergeben, welches der Mond in seinen verschiedenen Phasen darbietet. Denn in diesen erscheinen die Mondberge schattenwerfend, und zwar werden je nach der Stellung des Mondes gegen die Sonne die Schatten eine andere Lage gegen die schattenwerfenden Objecte haben. Beachtet man, dass die Bewegung der Gestirne an der Himmelskugel zwischen den Fixsternen von West gegen Ost zu stattfindet, und dass der Mond in dieser Richtung rascher als die Sonne fortschreitet, so wird man unmittelbar ersehen, dass sich der Mond in der gleichen Richtung von der Sonne entfernen muss. Hierdurch wird klar, dass der Mond dem nach Süden blickenden Beobachter sich von der Sonne nach links zu zu entfernen scheint und dass daher bei zunehmendem Monde die Hörnerspitzen des Mondes und ebenso alle Schatten nach links zu geworfen werden. Dieses dauert bis zum Vollmond; in diesem ist die Beleuchtung normal, die centralen Partien erscheinen schattenlos, daher mehr gleichmässig, während vom Mittelpunkte entferntere, und namentlich die Randpartien kurze Schatten gegen den Rand zu werfen. Vom Vollmond an nähert sich der Mond wieder der Sonne, aber von Westen, also rechts her, so dass beim abnehmenden Monde die Hörnerspitzen des Mondes und alle Schatten nach rechts hin erscheinen.

Die Karte selbst kann nun auf diesen verschiedenen Anblick nicht Rücksicht nehmen, allein es genügt, sich diese gegenseitigen Bewegungsverhältnisse zwischen Mond und Sonne vor Augen zu halten, um nicht nur die Form der Mondsichel, sondern auch die Lage der Schatten aus der Karte selbst zu entnehmen, wobei die verschiedenen mnemotechnischen Hilfsmittel, welche dem Gedächtnisse zu Hilfe kommen sollen, überflüssig werden. Hierzu dienen die folgenden beiden Figuren, in denen die erste den Mond in seiner Bewegung zwischen dem Neumond und Vollmond, also im ersten Viertel, die zweite im letzten Viertel darstellt. Um dieselben auf die Mondkarte anzuwenden, wird man die Bewegung des Mondes, welcher ja ins Auge gefasst, also als ruhend gedacht wird, im entgegengesetzten Sinne auf die Sonne zu übertragen haben und sich daher die Sonne in einem um den Beobachter gedachten weiten Kreis, welcher den Mond umfasst, bewegt denken, so dass die Sonne im Neumond weit hinter dem Monde gedacht wird, im ersten Viertel nach rechts gerückt, wobei zunächst der westliche, rechts gelegene Theil des Mondes mit nach links gerichtetem Schatten erscheint, bis die Sonne, hinter den Rücken des Beob-

achters gerückt, den Mond voll beleuchtet, wobei sie sich dem Monde wieder von links nähert, und der Mond nach und nach wieder die Sichelgestalt annimmt, wobei aber jetzt der links, östlich gelegene Theil beleuchtet bleibt, mit nach rechts geworfenen Schatten.



Mond im ersten Viertel.

(A. 358.)

Mond im letzten Viertel.

(A. 359.)

Diese wenigen Andeutungen werden hier wohl für die Erklärung der verschiedenen Phasen des Mondes ausreichen. Hierzu ist jedoch noch zu erwähnen, dass auch der von der Sonne nicht direkt beleuchtete Theil der Mondscheibe mitunter sehr deutlich sichtbar ist. Man kann dieses sogen. aschfarbige Licht des Mondes mit freiem Auge sehr gut einige Tage vor und nach dem Neumonde sehen; im Fernrohr ist es noch zur Zeit der Quadraturen gut sichtbar; in vereinzelten Fällen wurde es noch zwei bis drei Tage nach den Quadraturen beobachtet. Die richtige Erklärung hierfür gab bereits LEONARDO DA VINCI und später unabhängig von ihm MAESTLIN. Es ist das von der Erde reflektirte Sonnenlicht, welches den von der Sonne nicht direkt beleuchteten Theil des Mondes ebenso erhellt, wie der Mond seinerseits die Nachtseite der Erde erhellt. Man bezeichnet daher dieses Licht auch kürzer noch als Erdenlicht des Mondes. Die Helligkeit desselben ist sehr verschieden, auch wechselnd. BEER und MÄDLER konnten in demselben einzelne Mondlandschaften, insbesondere ARISTARCH, erkennen. SCHRÖTER behauptete, dass dasselbe heller ist, wenn die Erde einen grösseren Theil des Festlandes dem Monde zuwendet; MÄDLER findet dasselbe am besten sichtbar, wenn die nördliche Deklination des Mondes grösser als diejenige der Sonne ist, und zugleich der Mond wenig erleuchtet, also im März und September. Beides stimmt mit der Entstehungsursache des Erdenlichtes ganz gut überein.

Im Vollmonde verschwinden die Schatten auf dem grössten Theil der Mondoberfläche namentlich an denjenigen Theilen, deren Details am besten wahrnehmbar sind, nämlich den centralen. Die Folge davon ist, dass man im Vollmonde wenig Details wahrnimmt. Dieselben verschwinden dort ganz, wo zwischen den einzelnen Theilen kein Helligkeitsunterschied stattfindet, z. B. bei vielen Wällen und den von denselben eingeschlossenen Wallebenen. Nur dort, wo die Lichtintensität, also die Albedo aneinandergrenzender Partien hinreichend verschieden ist, werden Details hervortreten. Daher werden die *Mare* sich im Voollmond gut gegen die angrenzenden helleren Gegenden abheben, ebenso selbst kleinere helle Ringgebirge innerhalb der Mare, während sehr bedeutende Wallebenen zwischen anderen Ringgebirgen verschwinden.

Da die Rotationsaxe des Mondes sehr nahe senkrecht steht auf der Bahnebene, so wird die Beleuchtungsgrenze nahe durch die Mondpole gehen und die Richtung des Meridians haben. Für die Topographie des Mondes wird es daher am zweckmässigsten, wenn die einzelnen Regionen in meridionaler Richtung dargestellt werden, indem hierbei, von West nach Ost fortschreitend, diejenigen Partien gleichzeitig beschrieben werden, welche in den aufeinander folgenden Phasen des Mondes nach und nach sichtbar werden. Eine gewisse Erleichterung ist dabei durch den Umstand geboten, dass sich die bedeutenden Mare leicht in zwei nahe im Meridian gerichteten Ketten anreihen. Andererseits entsteht eine rein didaktische Schwierigkeit aus dem Umstande, dass die nördliche und südliche Hemisphäre von einander wesentlich verschiedene Gestaltungsverhältnisse zeigen, indem die bedeutendste Ansammlung der Mare sich auf der nördlichen Halbkugel finden, während die südliche ungemein reich an Gebirgen ist, und in den erwähnten Ketten der Mare sich bedeutende Massengebirge ziemlich weit von Süden her einschieben.

Als eine Folge der grossen Gebirgsansammlungen in der Nähe des Südpoles ist zu erwähnen, dass das südliche Horn an der Beleuchtungsgrenze ziemlich unregelmässig mit Vorsprüngen und getrennten Lichtpunkten erscheint, während das nördliche Horn eine ziemlich regelmässig begrenzte Spitze darbietet.

In der Nähe des Nordpoles, diesen in einem weiten Bogen umziehend, erstreckt sich fast auf der ganzen sichtbaren Mondhemisphäre das *Mare Frigoris*[1]). Von dessen westlichem Rande aus erstreckt sich als

erster Meridiangürtel das *Mare Serenitatis*, *Mare Tranquillitatis* und *Mare Nectaris*, während sich von der Ostseite des *Mare Frigoris* her als

zweiter Meridiangürtel das *Mare Imbrium*, der *Oceanus Procellarum* mit seinen beiden südlichen Enden, dem *Mare Nubium* und *Mare Humorum* erstreckt.

Sowohl durch die verschiedene Grösse, als auch durch die verschiedene Lage dieser Mare wird die durch dieselbe erzeugte Eintheilung der Mondoberfläche keineswegs gleich; der westliche Gürtel bleibt ziemlich weit von dem westlichen Mondrande entfernt, von dem er zwischen + 30° Breite bis zum Nordpol durch Gebirgslandschaften getrennt ist. In der Aequatorealzone liegt hier noch eingeschoben das vollständig in sich abgeschlossene *Mare Crisium* und das südlich davon gelegene und mit dem *Mare Tranquillitatis* theilweise verbundene *Mare Foecunditatis*, und bildet so einen kleineren, aber nur in der Aequatorealzone liegenden, noch weiter westlich gelegenen Gürtel; doch ist es gestattet, trotz der ziemlich bedeutenden, immerhin aber durch nur weniger ausgedehnte Gebirgsmassen gebildeten Trennung zwischen dem *Mare Tranquillitatis* und dem *Mare Nectaris* einerseits und dem *Mare Foecunditatis* andererseits diese drei Mare als ein zusammengehöriges Gebilde dem *Oceanus Procellarum* des östlichen Gürtels an die Seite zu stellen.

Auch die beiden Gürtel selbst sind nicht durch einheitliche, zusammenhängende Gebirgsmassen von einander getrennt. Zwischen denselben erstreckt sich, allerdings von dem *Mare Frigoris* durch bedeutende Gebirgsstöcke ge-

---

[1]) Eine Karte in genügendem Maasstabe wiederzugeben, um die topographischen Verhältnisse überblicken zu können, stösst auf mancherlei Schwierigkeiten; eine Karte in kleinerem Maassstabe zn reproduciren, wäre für die Orientirung zwecklos gewesen, so dass es am gerathensten erschien, der topographischen Beschreibung die LOHRMANN'sche Mondkarte zu Grunde zu legen; derjenige, der sich eingehender mit der Selenographie beschäftigen will, hat diese Karte ohnediess gewiss zur Verfügung.

schieden, eine schmälere meridionale Zone, deren einzelne Glieder theils mit dem westlichen, theils mit dem östlichen Gürtel zusammenhängen. Diese sind der *Palus Nebularum* und *Palus Putretudinis*, welche noch als Theile des *Mare Imbrium* angesehen werden können, aber andererseits westlich auch mit dem *Mare Serenitatis* zusammenhängen; dann weiter südlich die beiden mehr abgeschlossenen *Mare Vaporum* und *Sinus Medii* mit dem östlich vorgelagerten, schon mit dem *Oceanus Procellarum* zusammenhängenden *Sinus Aestuum*. Indem dieser mittlere Gürtel mit dem *Sinus Medii* nahe in dem Mittelpunkte der Mondscheibe schliesst, findet sich die auf der südlichen Hemisphäre befindliche ausgedehnte Gebirgsmasse zwischen dem *Mare Nectaris* und dem *Mare Nubium* in zwei, durch eine lichtere und weniger gebirgige, meridionale Zone getrennte Gruppen bis nahe zum Aequator vorgeschoben.

Endlich finden sich noch zwei bedeutende Mare, deren volle Ausdehnung sich allerdings dem Beobachter nie entfaltet, in unmittelbarer Nähe des westlichen Randes, das auf der Mondhemisphäre gelegene *Mare Humboldtianum* in der Breite des *Mare Frigoris* und das auf der südlichen Hemisphäre in etwa — 45° gelegene *Mare Australe*.

Von der grossen Menge der Gebirge und Krater wird es nun allerdings nur möglich, die wichtigsten zu erwähnen, wobei mehr Gewicht darauf gelegt werden muss, demjenigen, der sich für die Topographie besonders interessirt, ein allgemeines Uebersichtsbild zu geben, und ihm das Auffinden der einzelnen Objekte zu erleichtern, als eine Beschreibung der Gegenden zu geben.

Am Westrande, von der Polarregion bis zum *Mare Frigoris* findet sich eine ziemlich reiche Gliederung; in der unmittelbarsten Nähe des Poles die kleinere Wallebene Gioja und sodann die grosse und helle Wallebene Scoresby; von hier aus, zunächst dem Westrande die das *Mare Frigoris* westlich begrenzende Gruppe von Gartner und Thales; ferner Strabo und der rings von Kratern umgebene Endymion, im Westen zu gegen das *Mare Humboldtianum* abfallend; sodann Atlas und Hercules dicht aneinander, aber mit deutlich getrennten Wällen.

Das *Mare Humboldtianum*, von MÄDLER benannt, gehört wahrscheinlich dem grössten Theile nach schon der unsichtbaren Mondhemisphäre an; den sichtbaren Theil schätzt MÄDLER auf ca. 100000 □*km*; seine Farbe ist grau, gegen den Rand zu, wahrscheinlich in Folge optischer Einflüsse, etwas lichter.

Weiter südlich schliesst sich an Endymion eine weite, ziemlich flache, nicht besonders ausgezeichnete Gegend, die westlich (gegen den Rand zu) durch die beiden wenig hervorragenden Ringgebirge Volta und Oersted, südlich von einer kleinen Wallebene Mercurius, gegen Osten von Atlas, Franklin und Messala begrenzt ist, an welch letztere sich noch weiter nach Osten zu die Ringgebirge Schuhmacher, Struve, Berzelius und Hook anschliessen.

Südlich von Messala reiht sich eine Gruppe von Ringgebirgen aneinander, die eine etwas weitere, weniger gebirgige Formation einschliessen; dem Westrande zunächst, mit der grossen Ringebene Gauss beginnend, setzt sich diese Kette durch die Ringgebirge Bernoulli, Geminus und Burkhardt zur grosseu und formenreichen Wallebene Cleomedes fort, welche durch ziemlich zahlreiche, sich nach allen Seiten erstreckende Gebirgszüge gegen das *Mare Crisium* abfällt.

Am Westrande schliesst sich an Gauss die im Meridiane verlaufende Kette der Ringgebirge Berosus, Hahn, Seneca und Plutarch an, welche in die ziemlich vielgestalteten Gebirgslandschaften übergeht, welche sich westlich vom *Mare Crisium* gegen den Rand zu ausdehnt. In dieser sind besonders hervor-

zuheben die beiden Wallebenen Eimmart (am Nordrande des *Mare Crisium*) und westlich davon, nahe dem Mondrande, Oriani, ferner Alhazen am Westrande des *Mare Crisium* und nahe dem Südwestende desselben die Wallebene Condorcet.

Hieran schliesst sich eine grosse Gebirgsmasse, in welcher man unschwer zwei besonders hervortretende Bergreihen erkennt, von denen die eine Hansen, Neper und Schubert ziemlich nahe dem Mondrande verläuft, die zweite Auzout, Firmicus und Appollonius sich gegen das *Mare Foecunditatis* zu erstreckt.

Südlich vom Aequator von Schubert an sind die Wallebenen zu in der Richtung des Meridians streichenden Ketten angeordnet. Zunächst dem Westrande bildet die Kette von Schubert, Kästner, Lapeyrouse, Ansgarius, Behaim, Hekatäus mit immer wachsenden Durchmessern (nach Mädler von ca. 65 *km* Durchmesser des Kästner, bis 175 *km* Durchmessers des Hekatäus) und W. Humboldt die westliche Grenze eines sich in der Richtung des Meridians erstreckenden, ziemlich hellen, immerhin aber zahlreiche gebirgige Details und auch Wallebenen darbietenden Mondfläche, an deren östlichem Rande sich die drei grossen Wallebenen Langrenus, Vendelinus und Petavius erheben. Die drei letztgenannten Wallebenen sind nur die auffälligsten Gebilde unter einer grossen Zahl kleinerer, von denen das nördlich von Langrenus gelegene Ringgebirge auf der Lohrmann'schen Karte als Mac Laurin bezeichnet ist.

Es mag gleich hier bemerkt werden, dass diese bei Mädler noch als von geschlossenen Ringgebirgen umgebene Wallebenen angegebenen Gebilde, sowie auch die meisten ähnlichen Gebilde gleicher Grösse in späteren, detaillirteren Karten wesentlich complicirter dargestellt sind. Zum grossen Theile hängt dies nur von der Genauigkeit der Zeichnung ab, wobei die bei der aufmerksamen Beobachtung immer zahlreicher hervortretenden Details eine Beschreibung nach Art derjenigen, welche Mädler seiner Mondkarte beigiebt, als auf die Dauer unhaltbar erkennen lassen. Insbesondere ist zu erwähnen, dass das Vendelinus genannte Gebilde eigentlich nicht eine Wallebene ist, sondern sowohl der Farbe als der Formation nach mehr als ein kleines, von einer grossen Zahl kleiner Ringgebirge umgebenes Mare zu erklären wäre.

Südlich von W. Humboldt und Petavius schliessen sich die beiden Bergreihen durch die beiden Legendre und Palitzsch genannten Gebilde (von denen das letztere, von Mädler ebenfalls als Wallebene bezeichnete, bei Lohrmann nicht als solche erscheint), welche die südliche Grenze der erwähnten ausgedehnten, hellen in der Richtung des Meridians streichenden Mondfläche bilden. An diese schliessen sich dann die Gruppen Hase, Snellius, Stevinus und der bedeutende aber unregelmässig geformte Furnerius.

Westlich von diesem dehnt sich das *Mare Australe* aus, in dessen Fläche eine grosse Zahl kleiner und grosser Wallebenen sichtbar sind, unter denen Marinus und Oken besonders genannt sind.

Die östliche Begrenzung des Mare bildet, vom Furnerius und dem angrenzenden Fraunhofer ausgehend, eine Massengebirgsformation, die bereits zu den die südliche Hemisphäre ausfüllenden Gebirgsmassen zu zählen ist; das bedeutendste der bis an das *Mare Australe* anstossenden Ringgebirge ist Vega; als südlichste Grenze des Mare kann auf der sichtbaren Mondhemisphäre Hansen und Pontécoulant angesehen werden.

Von dem letzteren erstrecken sich längs des westlichen Mondrandes eine

Reihe von Gebirgslandschaften bis zum Südpol, welche kaum weniger bemerkenswerth als die in der Nähe des Nordpols aufgezählten sind, allein in den weitaus charakteristischeren allgemeinen Gebirgsformen der südlichen Halbkugel von untergeordneter Bedeutung sind, und von denen Boussignault und Boguslawski in der Karte besonders benannt sind.

Als eine zweite Reihe kann man die südlich vom *Mare Frigoris* mit Atlas und Herkules beginnende Reihe ansehen, welche sich bis zum *Mare Crisium* erstreckt, dann dieses und das *Mare Foecunditatis* einschliesst, und sich südlich von diesem bis zum Südpol erstreckt. Unmittelbar südlich von Atlas und Hercules schiebt sich noch der westliche Theil des *Lacus Mortis* vor, dessen südliche Grenze gegen den *Lacus Somniorum* durch einige minder bedeutende Gebirgszüge gebildet wird, welche im Westen ihre bedeutendste Erhebung im Oerstedt, Cepheus, Franklin und Berzelius erreichen. Von hier gelangt man nach Süden fortschreitend durch eine Reihe von Stufenlandschaften, welche in der südlichen Fortsetzung des *Lacus Somniorum* liegen, zum Macrobius und damit an das *Mare Crisium*.

Südlich vom Cleomedes und Macrobius dehnt sich das scheinbar allseitig wohl abgegrenzte, mit den übrigen dunklen Mondflächen nicht zusammenhängende *Mare Crisium* (von Hevel *Palus Maeotis* genannt) aus. Es ist das dunkelste der Mare und zeichnet sich durch seine eigenthümliche Farbe, einem mit dunkelgrün gemischten Grau aus. Seine Grösse ist etwa 170000 □*km*. In Folge seiner Abgeschlossenheit und der relativ grossen Helligkeit der umgebenden Gebirgslandschaften tritt es selbst in schwachen Fernröhren schon sehr deutlich hervor. Im Innern wird dasselbe von mannigfach verzweigten, aber der Hauptsache nach die Richtung von Nord nach Süd einhaltenden Bergadern durchzogen; unter den zahlreichen kleineren Erhebungen im Innern ist besonders zu erwähnen das etwas bedeutendere Ringgebirge Picard.

In den die Ost-, Südost- und Südgrenze des *Mare Crisium* bildenden, aus zahlreichen, Ringgebirgen sehr wenig ähnlichen Formen bestehenden Landschaften ist besonders der helle Proclus hervorzuheben, den Mädler als das nächst Aristarch hellste Ringgebirge bezeichnet, in welchem er bisweilen einen Centralberg zu sehen glaubte[1]. Bei Lohrmann ist hier jedoch von einem Ringgebirge kaum zu reden, und trägt es mehr den Charakter eines vielfach gegliederten Gebirgssystemes, welches gegen Süden zu in den ziemlich dunklen *Palus Somnii* abfällt, in dessen Innern allerdings eine einem Centralberge nicht unähnliche Formation sich zeigt. Hiermit stimmt auch überein, dass Mädler bemerkt, dass er trotz der bedeutenden Helligkeit des Proclus denselben nie in der Nachtseite des Mondes gesehen hat.

Der *Palus Somnii* kann wohl als ein Theil des *Mare Tranquillitatis* betrachtet werden, ist aber von demselben durch eine Reihe vorgelagerter Einzelberge, unter denen der bedeutendste und hellste Lyell ist, getrennt, und unterscheidet sich von demselben wesentlich durch seine specifisch gelbbraune Farbe. Ueberdiess ist derselbe mit Hügeln und Bergen von allerdings relativ geringer Höhe fast angefüllt, sodass er, abgesehen von seiner dunklen Färbung, welche die Bezeichnung als Palus (im Anschluss an die Mare) rechtfertigt, und auch Hevel zu einer ähnlichen Bezeichnung (als *Lacus Corocondametis*) veranlasst hat, eigentlich dem Charakter nach von dem Hügellande östlich und südlich vom *Mare Crisium* nur wenig unterscheidet.

---

[1] l. c. pag. 222.

Dieses eben erwähnte Hügelland bildet die Grenze zwischen dem *Mare Crisium* und dem nunmehr folgenden, bedeutend grösseren, aber offenen *Mare Foecunditatis* (nach Hevel *Mare Caspium*), dessen Grösse etwa 560000 □ *km* beträgt. Im Norden ziemlich breit, verschmälert es sich östlich vom Vendelinus ganz bedeutend, und zieht von hier nahe in meridionaler Richtung bis zum Snellius.

Gegen das *Mare Tranquillitatis* zu ist es nur durch einzelne vorgelagerte untereinander durch bedeutende Verbindungskanäle getrennte Gebirgsstöcke abgegrenzt, unter denen besonders die grosse Wallebene Taruntius zu nennen ist. Allmählich werden diese Gebirgsstöcke immer gedrängter und bilden dann das Gebirgsmassiv, welches anfänglich nahe in derselben Richtung an der Grenze zwischen dem *Mare Crisium* und *Mare Foecunditatis* verlaufend, dieses letztere von dem *Mare Nectaris* fast vollständig trennt. In diesem Gebirgsmassiv herrscht aber der Charakter der Wallebenen ziemlich deutlich vor; die bedeutenden und im Innern sehr hellen Ebenen Guttemberg mit einem im Westen gegen das *Mare Foecunditatis* zu durchbrochenen Walle Goclenius, südlich die Gruppe Magelhaens, Columbus und Cook, von denen Columbus das bedeutendste ist repräsentiren die grössten und charakteristischsten Formen dieses Theiles des Gebirgsmassives. Von hier an wendet sich die Grenze des *Mare Foecunditatis* nahe meridional gegen Süden, ohne wesentlich den Charakter zu ändern. Die bedeutendsten Wallebenen dieses Thales sind Monge, Santbech und Bordat, welcher, an Snellius anschliessend, die südliche Grenze des *Mare Foecunditatis* bildet.

Die im Innern derselben befindlichen, dasselbe durchsetzenden Lichtstreifen zeigen nicht die mehr regelmässige Anordnung derjenigen des *Mare Crisium*, sondern sind unregelmässig vertheilt, wenngleich auch die meridionale Richtung vorzuherrschen scheint; auch finden sich zahlreiche höhere Berge und Ringgebirge, unter denen die bedeutendsten, im nördlichen breiteren Theile das Doppelringgebirge Messier und im südlichen, schmäleren das kleine aber helle Ringgebirge Biot zu nennen sind.

Oestlich von der Gruppe Goclenius, Magelhaens, Columbus, Cook und Monge zieht sich ein ziemlich weiter, heller Streifen, der sich eben durch die Farbe von den Mare wesentlich unterscheidet, und daher nicht wohl als ein Theil derselben, sondern viel eher als ein den Gebirgslandschaften analoges Hochplateau bezeichnet werden muss, und welches östlich in die bei Guttemberg liegende Kette der Pyrenäen übergeht und die westliche Gruppe des *Mare Nectariis* bildet. Die Pyrenäen theilen sich gegen Süden in zwei minder scharf hervortretende Gebirgszüge, die zwischen sich das Ringgebirge Bohnenberger fassen, an das sich südlich das bereits erwähnte Santbech anschliesst.

Von Snellius und Borda beginnend, zieht in meridionaler Richtung bis gegen den Südpol eine Reihe von grösseren und kleineren Wallebenen, die ohne sich von den übrigen, sie umgebenden, besonders scharf zu trennen oder hervorzuheben, nichtsdestoweniger leicht in eine besondere Gruppe gebracht werden können; es sind dieses: Reichenbach, Rheita, Metidus, Fabricius, Argelander, Steinheil; von diesen durch eine mehr ebene Fläche getrennt: Biela, Rosenberger, Vlack, Hagecius, Nearchus; daran grenzend aber schon mehr östlich ziehend Pitiscus, Hommel und gegen den Südpol zu Mutus, Manzinus, Simpelius und Schomberger.

Der breite, westliche Gürtel, welcher das *Mare Serenitatis* und das *Mare Tranquillitatis* einfasst, enthält auch den westlichen Theil des

Mare Frigoris; von Norden her erstrecken sich in der dieses umgebenden Landschaft der Arnold, Euctemon, Meton und südlich davon Archytas, Christ. Mayer und Democritus, welch letztere bereits die Nordgrenze des *Mare Frigoris* bilden. Dieses (nach HEVEL *Mare Hyperboreum*) ist von grünlichgelber Farbe, an welcher es im Vollmonde leicht zu erkennen ist. In Folge seiner Ausdehnung im Parallel ist es im Gegensatze zu den übrigen Maren in kleineren Fernröhren als unscharf begrenzter Querstreifen in der Nähe des Nordpoles zu bemerken. Es ist durch eine Gruppe ziemlich dicht gedrängter Berge in seinem Innern, unter denen die Wallebene Protagoras besonders bemerkenswerth ist, ziemlich deutlich von dem östlichen Theile getrennt.

Südwestlich ist das *Mare Frigoris* mit dem *Lacus Mortis* verbunden, jedoch durch eine Reihe von einzelnen Bergen, die sich zwischen Hercules im Westen und Baily im Osten hinziehen, stellenweise getrennt. Die Grösse des *Lacus Mortis* ist etwa 42000 □*km*, seine Farbe etwas heller als diejenige der übrigen grossen, dunklen Flächen, aber von der Umgebung noch deutlich dunkler hervorgehoben; unter den im Innern sich erhebenden einzelnen Bergspitzen, Bergrücken und Kratern ist bemerkenswerth die Wallebene Bürg. Gegen Süden zu ist der *Lacus Mortis* durch ziemlich dicht gedrängte Bergketten, zwischen denen sich die beiden dicht aneinander befindlichen Wallebenen Plana und Mason und etwas davon entfernt der etwas kleinere aber sehr helle Barth befinden, von dem *Lacus Somniorum* (nach HEVEL *Lacus Borysthenes*) getrennt. Dieser ist bereits als ein Theil des *Mare Serenitatis* anzusehen. In der breiten Verbindung, welche zwischen Plana und Posidonius stattfindet, sind nur spärliche Einzelberge, und nur eine bedeutendere Ringebene Hencke zu erwähnen.

Das mächtige Massiv, welches sich zwischen *Mare Frigoris* einerseits und dem *Mare Serenitatis* und *Mare Imbrium* andererseits erstreckt, ist im westlichen Theile breiter und wird gegen Osten zu (in den Alpen) schmäler; eine strenge Grenze lässt sich nicht wohl ziehen; nimmt man als Grenzlinie zwischen den beiden Theilen eine Linie, welche im Süden durch die Scheidungslinie der beiden *Mare Serenitatis* und *Imbrium* und im Norden durch die erwähnte Trennungslinie der beiden Theile des *Mare Frigoris* geht, so fällt dieselbe mit der Verbindungslinie der beiden Krater Egede und Calippus zusammen. In dem westlichen Theile befinden sich die beiden grossen und bedeutenden Wallebenen Aristoteles und Eudoxus. In dem östlich von diesen gelegenen Theile zwischen Egede und dem *Palus Nebulorum* unterschied SCHRÖTER 50 Hügel; BEER und MÄDLER schätzen die Zahl der in ihrem viel lichtstärkeren Fernrohre bei 160maliger Vergrösserung sichtbaren Lichtpunkte auf 7 bis 800[1]).

Der südwestlich von Eudoxus gelegene Theil flacht sich allmählich ab, während der südöstlich gelegene Theil sich zwischen das *Mare Serenitatis* und *Mare Imbrium* vorschiebt, hier als ein bedeutendes Massengebirge erscheint, und von MÄDLER als eine Zusammendrängung hoher Gipfel (bis zu 5800 *m*) auf einer relativ kleinen Fläche, Caucasus genannt wurde; das höchste Ringgebirge in demselben ist der bereits genannte Calippus.

Südlich von dem zwischen Calippus und Plana befindlichen Gebirgssystem dehnt sich das bedeutende *Mare Serenitatis* (nach HEVEL *Pontus Euxinus*) in einer Fläche von ungefähr 330000 □*km* aus. Die Fläche theilt sich der Farbe nach in zwei Theile: der äussere Theil gegen das umgebende Gebirge hin hat

---

[1]) l. c., pag. 238.

ein ziemlich dunkles Grau; der innere Theil, ca. 220000 □*km* gross, zeigt zur Zeit des Vollmondes ein schönes durchaus gleichartiges lichtgrün.

Die das Mare umziehenden Gebirge sind an drei Stellen durchbrochen; im Südwesten gegen den *Lacus Somniorum*, im Norden gegen das *Mare Tranquillitatis* und im Osten gegen den *Palus Putretudinis*.

Im Innern befinden sich zahlreiche Lichtstreifen, mehr oder weniger grosse und deutliche Erhebungen und Gebirge, darunter die beiden Ringgebirge Bessel (etwas südlich von der Mitte) und Linné östlich, in der Nähe der Verbindung mit dem *Palus Putretudinis*. Unter den erwähnten Lichtstreifen ist ein besonders breiter von der Südgrenze (dem Menelaus) gegen Bessel ziehend und über desen hinaus durch das ganze Mare bis zur nördlichen Grenze verfolgbar.

Die östliche Grenze des *Mare Serenitatis* gegen das *Mare Imbrium* zu wird von dem bereits erwähnten Caucasus gebildet; jenseits der erwähnten Durchbrechung beginnen die Appeninen, deren Hauptstock sich nach Osten zwischen das *Mare Vaporum* und *Mare Imbrium* vorschiebt, und erst später behandelt wird. In dem westlich gelegenen, niedrigeren Theile findet sich östlich von Linné das Ringgebirge Fresnel, dann südlich eine Berggruppe Halley und, schon mehr dem östlichen Hauptstock angehörig die beiden Ringgebirge Aratus und Conon. Westlich von diesen beiden nimmt das Gebirge an Höhe ab, obzwar die Zahl der Gipfel eine ausserordentlich grosse ist (Mädler schätzt dieselbe auf 2 bis 3000). Allmählich nehmen die Berge jedoch wieder an Höhe zu und es setzt sich nach Westen der schmale aber langgestreckte südöstliche Kamm des Hämusgebirges als Südgrenze des *Mare Serenitatis* fort; so mannigfaltig die Formationen hier sind, so dass im Allgemeinen Wallebenen nicht so häufig gefunden werden, so herrscht doch, ebenso wie bei den Appeninen, die Form kurzer Gebirgsketten mit vorwiegend von Südost nach Nordwest gerichteter Streichungsrichtung vor.

Gegen das *Mare Serenitatis* zu sind hier kleine aber helle Krater vorgelagert: beim Beginn des Hämus der Sulpicius Gallus und am südlichsten Punkte des *Mare Serenitatis* der Krater Taquet; etwa in der Mitte zwischen beiden, ebenfalls unmittelbar an dasselbe Mare angrenzend die grosse Wallebene Menelaus.

Bei dem Krater Taquet stösst der südöstliche Gebirgszug des Hämus mit dem Hauptstocke zusammen, der sich von Südwest nach Nordost zwischen Plinius und Boscowich erstreckt, dabei aber aus einzelnen, durch bedeutende Querthäler getrennten, in der darauf nahe senkrecht stehenden Streichrichtung verlaufenden Bergketten besteht; die Grenze des *Mare Serenitatis* bildet nur ein kleiner Theil dieses Stückes bis zum Promontorium Acherusia.

Von hier aus findet sich eine weite offene Verbindung zwischen dem *Mare Serenitatis* und *Mare Tranquillitatis*, indem die die westliche Grenze bildenden Gebirgszüge nur einen wenig nach Osten vorspringenden Zug bis zum Cap Chamisso entsenden.

Die westlich vom *Mare Serenitatis* gelegenen Gebirge beginnen südlich vom *Lacus Somniorum* mit der mächtigen Wallebene Posidonius, eine der grössten Ringflächen des Mondes von über 100 *km* Durchmesser, von welcher sich gegen

Süden eine grosse Anzahl von Wallebenen und Bergketten erstrecken, unter denen besonders Römer zu nennen ist; weiter gegen Süden zu schiebt sich in das *Mare Tranquillitatis* eine bedeutende Gebirgskette vor, der Taurus, in welchem die Ringgebirge Littrow, Maraldi und Vitruvius zu nennen sind, welche mit den bereits erwähnten, westlich gegen den Macrobius zu gelegenen Gebirgszügen nicht verbunden sind, sondern einen Busen des *Mare Tranquillitatis* einschliessen, der mit diesem bei Maraldi durch eine ziemlich enge Strasse verbunden ist.

Der an diese westliche Gebirgsgruppe grenzende Theil das *Mare Serenitatis* ist hier am dunkelsten und bildet, zwischen Cap Chamisso und Plana ziehend, eine tief dunkle, von lichten Streifen mehrfach durchzogene Zone, deren westliche Grenze auch als Grenze gegen den *Lacus Somniorum* angesehen werden kann und welcher östlich vom Römer eine ziemlich bedeutende, ebenso dunkle Bucht bildet, in welcher der isolirte Krater Le Monnier liegt.

Südlich von *Mare Serenitatis* liegt das *Mare Tranquillitatis* (nach Hevel mit zum *Pontus Euxinus* gehörig), von nahe derselben Grösse wie das erstere, wesentlich durch die reine graue Farbe unterschieden und viel weniger scharf begrenzt; namentlich gegen Westen mit dem *Mare Foecunditatis* durch zahlreiche Canäle verbunden, zwischen denen einzelne Berge und Bergrücken hindurchziehen, die sich sowohl in das *Mare Foecunditatis* wie namentlich in das *Mare Tranquillitatis* weit hinein erstrecken. Nicht nur zahlreiche Einzelberge, sondern auch Wallebenen finden sich im *Mare Tranquillitatis*; in der unmittelbarsten Nähe des Promontorium Acherusia die grosse Wallebene Plinius von nahe 50 *km* Durchmesser mit nach Norden geöffnetem Walle und im Innern von vielen Kratern erfüllt; leicht in jeder Beleuchtung sichtbar. Südlich vom Plinius, im östlichen Theile des *Mare Tranquillitatis* die Ringgebirge Ross und Arago; weiters Janssen, westlich von Plinius, und Maskelyne im südlichen Theile des *Mare Tranquillitatis* in der Nähe des Einganges gegen das *Mare Nectaris*.

Die östliche Grenze des *Mare Tranquillitatis* gegen das *Mare Vaporum* zu bildet von dem bereits erwähnten südöstlichen Zuge des Hämus eine Reihe sehr deutlicher, aber wenig zusammenhängender Ringgebirge; an den Caucasus schliesst sich zunächst die grosse Wallebene Julius Caesar, seiner Farbe nach ebenfalls mehr ein von vielfach zerklüfteten Bergen umschlossenes Mare; diesem östlich anschliessend der denselben Charakter tragende, etwas kleinere Boscowich, und westlich davon das kleine, aber deutliche Ringgebirge Sosigenes.

Weiter südlich findet sich hier eine von West nach Ost ziehende, nur durch wenige niedrige Gebirge unterbrochene Verbindung zwischen dem *Mare Tranquillitatis* und dem *Mare Vaporum*; das bedeutendste dieser Gebirge ist der dem *Mare Tranquillitatis* unmittelbar anliegende Ariadaeus; jenseits, im Süden dieser Strasse, sind die Ausläufer der von der südlichen Hemisphäre vorgeschobenen Gebirgslandschaften; die am deutlichsten hervortretenden Ringgebirge sind hier, die südliche Grenze das *Mare Tranquillitatis* bildend: Dyonisius, Ritter und Sabine; weiter südlich Theon der ältere, Theon der jüngere und Delambre und westlich davon eine ziemlich helle Fläche, deren südlichste Spitze Hypathia eine, nur theilweise geschlossene, unregelmässig geformte Wallebene bildet.

Westlich von diesem Gebirgsstock zieht ein breiter und langer Canal, in dessen Mittellinie gegen Süden zu das Ringgebirge Toricelli gelegen ist, das *Mare Tranquillitatis* mit dem *Mare Nectaris* verbindend. Die westliche Grenze dieses Canals wird durch eine, einen Gebirgsstock darstellende Formation gebildet, welche von dem westlichen, dem Guttemberg und Goclenius anschliessenden Bergrücken durch eine einem Busen des *Mare Foecunditatis* gleichende Fläche getrennt ist. Im Norden dieses Gebirgsstockes liegt der nicht eigentlich als Ringgebirge zu bezeichnende Censorinus (am nördlichen Eingange des Canals), und im Süden Isidorus und Capella, von denen jedoch nur der erstere als eigentliche Wallebene bezeichnet werden kann.

Das *Mare Nectaris* (nach HEVEL *Sinus extremus pontis)*, etwa von der Grösse des *Mare Foecunditatis*, wird durch eine Einengung, welche durch die beiden vorspringenden Wallebenen Isidorus und dem gegenüberliegenden Theophilus entsteht, in einen kleineren nördlichen und einen etwas grösseren südlichen Theil zerlegt. Der nördliche Theil[1]) hat als westliche Grenze die zwischen Censorinus und Isidorus ziehenden Bergrücken; im Süden kann seine Grenze bei Toricelli gesetzt werden, im Osten sind es Gebirgszüge, die sich südlich von Hypathia in meridionaler Richtung erstrecken, in welcher nur das Ringgebirge Alfragan auf der Karte bezeichnet erscheint. Hier erstreckt sich das *Mare Nectaris* als ein besonderer Busen zwischen diesen Gebirgszügen im Osten und dem Theophilus und dem südlich angrenzenden Cyrillus im Westen ziemlich weit nach Süden bis zu der östlich vom Cyrillus stattfindenden Verbindung der beiderseitigen Gebirgszüge. Im Innern dieses Busens ist noch das Ringgebirge Kant zu erwähnen.

Der südliche Theil des Mare, in dessen Eingang zwischen Isidorus und Theophilus das kleine, nach Süden offene Ringgebirge Mädler liegt, wird im Westen von den schon angeführten Gebirgszügen Pyrenäus, Bohnenberger, Santbech begrenzt; östlich erstreckt sich nahe in der Richtung des Meridians die Gruppe der drei zusammenhängenden grossen und hellen Wallebenen Theophilus, Cyrillus und Katharina, von denen als eigentliche Wallebene nur der nördlichste, über 100 *km* im Durchmesser fassende Theophilus angesehen werden kann, während die beiden anderen als von unregelmässig verlaufenden Bergzügen ziemlich unvollständig begrenzte Landschaften anzusehen sind. Die von Katharina südwestwärts sich erstreckende Grenze ist reich an einzelnen, ziemlich grossen Ringgebirgen, unter denen als grösste Beaumont zu nennen ist. Als das südwestlichste Ende dieses Gebirgszuges erscheint die nach Norden offene, im Innern dunkle Mondgegend Fracastor, welche bereits MÄDLER als den südlichsten Busen des *Mare Nectaris* bezeichnet.

Parallel mit dem zwischen Cyrillus und Fracastor streichenden Gebirgszuge erstreckt sich von Katharina ein zweiter, der Formation nach ähnlicher Gebirgszug, welcher in hoher Beleuchtung verschwindet und daher von HEVEL und RICCIOLI noch nicht gekannt war, der Altai gegen Südwesten, in welchem sich das kleine Ringgebirge Polybius bemerklich macht, und welcher im Nordwesten in die grosse Wallebene Piccolomini endet. Unter den diesen umgebenden Ringgebirgen sind noch im Westen die Wallebene Neander und im Süden Stiborius hervorzuheben.

---

[1]) Dieser Theil des *Mare Nectaris* wird von MÄDLER noch zum *Mare Tranquillitatis* gezählt. SCHMIDT hat denselben zum *Mare Nectaris* bezogen.

Weiter gegen Süden reihen sich die Gebirge in regellosen Massen aneinander, so dass hier die Orientirung ziemlich schwer wird. Schreitet man dabei so fort, dass man möglichst alle Gebirgsformationen berücksichtigt, welche westlich von demjenigen Meridiane liegen, welcher die östliche Grenze des *Mare Nectaris* bildet, wobei naturgemäss nicht eine strenge, im Meridiane verlaufende Grenze eingehalten werden kann, wenn man nicht etwa zusammengehörige Gruppen trennen will, so trifft man südlich von Altai zunächst eine aus seitlich wallartig abfallenden, aber durchaus nicht kreisförmig, sondern in unregelmässigen Figuren angeordneten Berghängen bestehenden Landschaft, in welcher MÄDLER ein Ringgebirge Pons erwähnt, welches aber auf der LOHRMANN'schen Karte keinesfalls diesen Charakter trägt. Weiter südlich folgen dann die zu einer ziemlich zusammenhängenden Gruppe vereinigten grossen Wallebenen Zagutt, Lindenau, Rabbi Levi und Riccius, von denen jede, mit Ausnahme des etwas kleineren Lindenau nahe 80 *km* Durchmesser hat. Weiter nach Süden folgt eine etwas lichtere Gegend, in welcher nebst zwei kleineren, östlich gelegenen, auf der Karte noch nicht benannten Ringgebirgen die beiden etwas grösseren, westlich gelegenen Nicolai und Spalanzani nebst einer grossen Zahl kleiner isolirter Bergkegel liegen.

Gegen den Südpol zu reihen sich weiterhin Wallebenen von beträchtlicher Grösse dicht aneinander und ist nur die sehr bedeutende Bacon bereits in der LOHRMANN'schen Karte benannt.

Oestlich vom *Mare Nectaris* schliessen sich südlich an Delambre und Alfragan an: Taylor, dann durch eine breite, hellere gegen Kant zu verlaufende Zone getrennt: Dollond und Descartes; weiter südlich die charakteristische, ein *Y* bildende Gruppe der sechs grossen Wallebenen Abulfeda, Tacitus, Almamon, Geber, Abenezra und Azophi; südwestlich der kleinere Fermat und die grosse, nach Norden und Süden offene Landschaft Sacrobosco, eine Fläche, aus deren Innerem drei bedeutende Ringgebirge emporsteigen.

Weiter gegen Südosten von Abenezra und Azophi setzt sich die Kette fort in Playfair und Apianus, von welchem aus ein nach Norden offenes Ringgebirge die Verbindung mit der Wallebene Werner, welche bereits der östlichen Kette angehört, herstellt.

Südlich von Sacrobosco und Apian finden sich eine Reihe kleiner, von relativ hohen Wällen umgebener Ebenen, sodann drei grössere Wallebenen: Pontanus, Poisson und Gemma; südwestlich Büsching und Busch, südlich davon die grosse und eigenthümliche Fläche des Maurolycus, welche allseitig von mit Kratern und kleineren Ringebenen besetzten Wällen umgeben und im Innern mit vielen Einzelgebirgen und Ringgebirgen, darunter ein besonders hervortretendes, nahe centrales, besetzt ist. Südwestlich von Maurolycus anstossend: Baroccius; südlich davon die Gruppe Clairaut, Breislac und Bacon, südwärts von welcher sich eine weitere mehr gleichmässig von einer grösseren Zahl isolirten Wallebenen besetzte Fläche gegen den Südpol zu ausdehnt.

Südöstlich vom *Mare Serenitatis*, von diesem durch die nordöstliche Kette des Hämus und den westlichen Ausläufern der Appeninen getrennt, ist das *Mare Vaporum* (nach HEVEL *Propontis)*, weniger dunkel als die übrigen Mare; nur nach Norden abgeschlossen; nach Westen mit dem *Mare Tranquillitatis*, nach Süden mit dem *Sinus Medii*, und nach Osten mit dem *Sinus Aestuum* verbunden.

Bereits im Innern des Mare liegt die schon früher erwähnte Wallebene Boscowich; und nordöstlich davon, an den Abhängen der Appeninen, die ca. 40 *km* im Durchmesser fassende Wallebene Manilius, von welcher aus sich gegen Westen eine Einbuchtung erstreckt, welche die beiden bereits mehrfach angeführten Gebirgszüge des Hämus von einander trennt.

In dem nördlich von Sosigenes, Julius Caesar, Boscowich verlaufenden Verbindungskanal des *Mare Tranquillitatis* und *Mare Vaporum* verläuft die mächtigste und am frühesten bekannte Mondrille vom Ariadäus zu der wenig hervortretenden Landschaft Silberschlag; an dieser Stelle unterbrochen, setzt sie sich etwas weiter südlich beginnend, in nordöstlicher Richtung wieder fort bis zu dem Mondkrater Hyginus im Innern des *Mare Vaporium*. Diesen durchsetzt sie so, dass sie den Wall sprengt, und im Innern mit erhöhten Rändern hervortritt, wo sie in eine gegen die frühere um 120° geänderte Richtung übergeht; auf ihrem Wege durchsetzt sie jederseits vom Hyginus noch mehrere kleinere Krater in derselben Weise.

Gegen Südosten ist das *Mare Vaporum* durch einen breiten Kanal, in dessen Innern sich die Wallebene Triesnecker befindet, mit dem *Sinus Medii* verbunden, welcher die Mitte der sichtbaren Mondscheibe einnimmt; seine Grösse ist ungefähr 34000 *qkm*. Mädler machte darauf aufmerksam, dass in diesen Landschaften die Libration so gut als gar keinen, und der Phasenwechsel den möglichst geringen Einfluss auf die jedesmalige Ansicht hat, so dass die Wahl einer in demselben liegenden Landschaft zur Bestimmung der Librationserscheinungen gegenüber den älteren Bestimmungen, zu welchen hierfür Manilius gewählt worden war, vorzuziehen wäre; die spätere Wahl des Kraters Moesting A[1]) zu diesen Bestimmungen trägt diesem Umstande vollständig Rechnung.

Die nordöstlichen Grenzen des *Sinus Medii* gegen den *Sinus Aestuum* hin sind keineswegs scharf, sondern mehr durch ein breites, flaches Mittelgebirge gebildet, aus welchem sich eine Reihe grösserer Wallebenen, insbesondere gegen den *Sinus Medii* zu, ablösen. Am nordöstlichen Theile sind es die an dem Verbindungskanale zwischen *Mare Vaporum* und *Sinus Medii* gelegenen Ukert, Bode, Pallas und der schon im Innern des *Sinus Medii* gelegene Cladni; dann im südöstlichen Theile der nach Norden offene Sömmering und der wohl abgeschlossene, sehr deutliche Moesting (mitunter auch als Maestlin bezeichnet), während gegen den *Sinus Aestuum* zu die Landschaft weniger den Charakter von Wallebenen zeigt, wie denn auch die Landschaft Schröter nicht als solche bezeichnet werden kann.

Die Südost- und Südgrenze des *Sinus Medii* wird von den von Süd her eindringenden Mondlandschaften der Südhemisphäre gebildet. Am weitesten gegen Norden reichen hier die beiden Wallebenen Agrippa und Godin; sodann durch mächtige, steil abfallende, der Quere nach verlaufende Bergketten von ihnen getrennt, Rhaeticus und Reaumur zwischen welchen sich eine Einbuchtung des *Sinus Medii* bis gegen Hipparch vorschiebt, und noch weiter südlich die dem Ptolemäus vorgelagerte Wallebene Herschel, von welchem

---

[1]) Es mag erwähnt werden, dass Mädler zur Bezeichnung einzelner nicht besonders benannter Objekte in der Umgebung anderer bereits benannter die Bezeichnung durch grosse und kleine lateinische und durch griechische Buchstaben wählte.

aus nach Nordosten zu gegen Moesting sich eine ziemlich gut begrenzte Ringfläche, eine Art Wallebene ausdehnt.

Diese hier beschriebenen Züge hängen jedoch mit denjenigen, welche sich von der Ostgrenze des *Mare Nectaris* erstrecken, nicht unmittelbar zusammen, sondern sind durch einen breiten, von Bergen nur wenig durchsetzten Kanal getrennt, der seinen Ursprung aus dem Verbindungskanale des *Mare Tranquillitatis* und *Mare Vaporum* nimmt, in nahe meridionaler Richtung südlich zieht, und bei der grossen Wallebene Hipparch endet. 150 *km* im Durchmesser, etwa 17 000 *qkm* an Fläche fassend, bildet dieser eine »Musterkarte der allerverschiedensten Mondformationen«[1]). Denselben Charakter trägt der südlich mit ihm durch verschiedenartige und verschieden gerichtete Gebirgszüge verbundene Albategnius; Mädler bezeichnet diesen im Gegensatze zu Hipparch als wahre Wallebene von 50 *km* Durchmesser, wogegen die Lohrmann'sche Karte einen solchen Unterschied nicht erkennen lässt; auch der südlich angeschlossene Parrot, der nach der letzteren jedenfalls kleiner als Albategnius ist, dem aber Mädler eine Grösse von nahe 70 *km* zuschreibt, gehört seinem Charakter nach mit zu dieser Gruppe.

Eine ganz ähnliche Gruppe von drei von Nord nach Süd sich erstreckenden Ringgebirgen bietet sich in dem Ptolemäus von nahe 190 *km* Durchmesser und nahe 24 000 *qkm* Fläche, dessen Inneres von zahlreichen lichten Bergadern durchzogen ist, Alphonsus, dessen innere Fläche einen merkwürdigen Wechsel von hellen und dunklen Partien zeigt, und der kleinste, aber immerhin noch über 100 *km* Durchmesser fassende Arzachel. Zu dieser Gruppe gehört noch der östlich zwischen den beiden letzteren gelegene, bereits in das *Mare Nubium* vorspringende, wesentlich kleinere, aber viel schärfer kreisförmig begrenzte Alpetragius.

Beide Ketten lassen sich nach Süden verfolgen in eine westlich gelegene, aus kleineren Wallebenen bestehende, und eine östliche, deren Wallebenen nahe dieselbe Grösse erreichen wie Ptolemäus. In der ersten Kette findet man, durch eine Reihe kleinerer Wallebenen und Kettengebirge, worunter Airy, verbunden: La Caille, Blanchinus und der bereits genannte Werner, ca. 70 *km* im Durchmesser, nach Mädler eines der höchsten Ringgebirge des Mondes, mit gegen 4000 *m* hohen Wällen und von bedeutender Helligkeit, stellenweise so stark glänzend wie Aristarch; an Werner unmittelbar anschliessend der noch etwas grössere Aliacensis, von ungefähr 180 *km* Durchmesser, aber weniger hell wie jener.

Die Fortsetzung der östlichen Kette, südlich von Arzachel, ist von diesem durch ein weniger gebirgiges Plateau getrennt, an dessen östlicher Seite sich der mässig grosse Thebit findet, welcher durch einen von Südost nach Nordwest ziehenden Querwall in einen kleineren östlichen und einen grösseren westlichen Theil geschieden ist. Weiter südlich erscheint die grosse nach Norden offene Wallebene Purbachius, daran schliessend eine eher als Gebirgslandschaft wie als Wallebene zu bezeichnende Gegend Regiomontan, deren Begrenzung durch die Fortsetzung der Wälle der umgebenden Wallebenen gebildet wird, und zwar nördlich von Purbachius, Blanchinus und Werner und südlich von den

---

[1]) Mädler l. c., pag. 344.

grossen Wallebene Walter mit vielfach durchbrochenen Wällen und im Innern zahlreichen einzelnen Spitzen und Bergrücken, sowie auch von helleren Bergadern mehrfach durchsetzt.

Südlich schliesst sich an Walter eine grosse Zahl verschieden geformter, sich mehrfach gegenseitig durchschneidender Wallebenen, deren Wälle in Folge dessen häufig nicht mehr die reine Kreisform behalten, unter denen westlich Nonius und Fernelius, östlich Le Verrier und Nasir Eddin zur grossen Wallebene des Stöfler hinführen, in dessen Wällen sich mehrfach kleinere Ringgebirge und Kettengebirge in verschiedenen Richtungen anreihen, wie denn die ganze Formation nur im Grossen und Ganzen als Wallebene bezeichnet werden kann. Licetus, Cuvier, die von diesen durch eine ziemlich ebene Parthie getrennten Lilius und Jacobi, südlich Zach, Pentland, Curtius verbinden diese Kette mit den Südpolarlandschaften der bereits genannten Simpelius und Schomberger.

Die östliche Gruppe der Nordpolarlandschaften, deren Charakter von denjenigen der westlichen Gruppe nicht wesentlich verschieden ist, enthält die beiden grossen Wallebenen Barrow und Anaxagoras von bedeutender Helligkeit; südlich von letzterer Epigenes; noch weiter südlich, die Grenze des *Mare Frigoris* bildend, die sehr helle Wallebene Timaeus und, davon durch eine wilde, vielfach zerklüftete Berggegend getrennt, welche MÄDLER merkwürdigerweise als ein »Quadratgebirge, dessen mauerähnliche geradlinige Bildungen den Beobachter in das höchste Erstaunen setzen«[1]) bezeichnet, die Wallebene Fontenelle.

Das *Mare Frigoris*, dessen östlicher Theil sich von dem westlichen weder in der Farbe noch in der Gestaltung unterscheidet, reicht östlich bis zum Harpalus, der die Grenze gegen den *Sinus Roris* bildet. Im Süden wird es gegen das *Mare Imbrium* durch Gebirge getrennt, welche sich von denjenigen der Nordpolarlandschaften nicht wesentlich unterscheiden; aus denselben sind eine Reihe kleinerer und grösserer Wallebenen hervorzuheben. Westlich von Harpalus schliesst sich das kleine Ringgebirge Bouguer an und der etwas grössere Condamine; sodann mit diesen beiden ziemlich genau ein Parallelogramm bildend, südlich vom ersteren Bianchini und vom letzteren Maupertuis, von welchem einzelne Gebirgszüge in das *Mare Imbrium* vorspringend, das Cap Laplace bilden.

Weiter westlich treten mehr vereinzelte Berge auf, zwischen denen eine Verbindung des *Mare Frigoris* und *Mare Imbrium* stattfindet; hierauf folgen wieder grössere Gebirgsansammlungen gegen das *Mare Frigoris* zu, welchem sich, von Süden an das *Mare Imbrium* grenzend, die grosse Wallebene Plato vorlagert, ein stahlgrauer Fleck von ca. 100 *km* Durchmesser, dessen Inneres fast ebenso dunkel wie die beiden Mare ist. Die an Plato östlich grenzenden Gebirgszüge werden von MÄDLER als zu den höchsten der Mondoberfläche gehörig angeführt, indem sie nach ihm eine Höhe bis zu 4500 *m* erreichen.

Westlich von Plato erheben sich die Alpen, deren höchster Punkt sich auf 3600 *m* erhebt; die höchsten Punkte sind von LOHRMANN als Pic Agassiz, Pic Deville und Montblanc bezeichnet worden; sie grenzen direkt an das *Mare Imbrium*. Besonders merkwürdig ist ein den ganzen Gebirgsstock durch-

---

[1]) l. c., pag. 287.

setzendes, nahe in der Richtung des Paralleles verlaufendes Thal, welches östlich von Egede beginnt und sich bis zu den beiden begrenzenden Maren hinzieht.

Das *Mare Imbrium* (nach HEVEL *Mare Mediterraneum*), mit Hinzuziehung der *Palus Nebularum*, *Palus Putretudinis* und *Sinus Iridum* das zweitgrösste der Mondmare; seine Fläche beträgt nahe 900000 □ *km*, ist also nahe dreimal so gross wie das *Mare Serenitatis* und fünfmal so gross wie das *Mare Crisium*. Von der südlich eben beschriebenen Grenze, die sich von Bianchini über den Plato und die Alpen erstreckt, löst sich, bereits in das Mare hineinragend, die ziemlich grosse und gut hervortretende Wallebene Dom. Cassini ab, welche jedoch weder bei HEVEL noch bei RIOCCOLI, sondern erst auf der Karte von DOMINIQUE CASSINI vorkommt, weshalb SCHRÖTER glaubte, sie sei erst um diese Zeit entstanden, und von CASSINI entdeckt worden, dessen Namen er ihr beilegte[1]).

Der nordwestliche Theil des *Mare Imbrium*, gegen dieses nur durch einige wenige, sich bogenförmig erstreckende Bergzüge getrennt, in denen sich ein als Kirch bezeichneter, aber nicht sonderlich auffälliger Punkt befindet, und welcher im Süden in das grosse Ringgebirge Archimedes endigt, bildet den *Palus Nebularum*, in welchem sich eine grosse Anzahl von Hügeln und niedrigen, lichten Bergadern erstrecken. Zu bemerken sind insbesondere als einzelne Bergspitzen der östlich von Cassini gelegene kleine, aber sehr helle Pico und das südwestlich gelegene kleine Ringgebirge Theätet; dann weiter gegen Süden die beiden Wallebenen Aristillus und Autolycus und südlich von diesem eine bedeutendere, allerdings nicht sehr hohe Gebirgsreihe als Grenze gegen den südlich gelegenen *Palus Putretudinis*. Dieser ist im allgemeinen etwas besser abgeschlossen wie der *Palus Nebularum*, indem sich im Osten gegen das *Mare Imbrium* zu ziemlich bedeutende Bergmassen finden, die im Süden bis zum Archimedes reichen, einer grossen Wallebene von über 80 *km* Durchmesser und gegen 5000 □ *km* Fläche. Das Innere derselben zeigt keine bedeutenden Erhebungen, ist aber durch zum Aequator parallel laufende Streifen in drei hellere und vier dunklere Zonen getheilt, die miteinander abwechseln; doch sind auch die helleren Zonen nicht von derselben Helligkeit, und insbesondere ist die nördlichste helle Zone weniger gegen die umgebenden dunklen abgehoben.

Die innere Fläche des eigentlichen *Mare Imbrium* enthält verhältnissmässig wenig Bergketten, hingegen einige bedeutende Einzelberge, Ringgebirge und Wallebenen. Südlich vom Cap Laplace findet man zwei nahe gleich grosse Ringgebirge, von denen das östliche Helicon ist, und noch weiter südlich, nahe im selben Meridian ein kleiner aber heller Krater Carlini. Noch weiter südlich erstrecken sich, im weiten Bogen, bei Archimedes beginnend, mitten durch das *Mare Imbrium* die beiden Ringgebirge Tymocharis und Lambert; östlich davon zwei einzelne Berge Lahire, und weiter ab das Ringgebirge Delisle; sodann in einem zweiten Bogen bezw. südlich von den drei letzgenannten die drei folgenden Ringgebirge: Pytheas, Euler und Diophantus, unter denen Euler das bedeutendste ist.

---

[1]) Vergl. hierüber das später Gesagte.

Die südwestliche Grenze des *Mare Imbrium* gegen das *Mare Vaporum* bilden die Appeninen. Der östliche Theil ist bedeutend höher und fällt steil gegen den *Palus Putretudinis* und das *Mare Nubium* ab. Die bedeutendsten Erhebungen und Ringgebirge sind hier der bereits erwähnte Fresnel, sodann Hadley, weiters Bradley, wo die die Grenze des *Palus Putretudinis* bildende Gebirgskette anstösst; weiter östlich Huygens mit dem gleichnamigen Cap; Ampère und gegen Osten Wolf, welcher durch eine weniger stark vorspringende Hügelkette mit der grossen Wallebene Eratosthenes, dem »mächtigen Schlussstein des Appeninengebirges« von nahe 70 *km* Durchmesser und einem bis 5000 *m* sich erhebenden Centralberge, verbunden ist.

Von hier setzt sich nach einer geringen Unterbrechung, welche den gegen den Stadius reichenden Busen des *Mare Imbrium* darstellt, die Kette der Appeninen in das Carpathengebirge fort, welches die Grenze zwischen dem *Mare Imbrium* und dem *Oceanus Procellarum* bildet. Dasselbe besteht aus einzelnen, meist in der Richtung des Meridians, also fast senkrecht zur Richtung des Gesammtstockes streichenden Gebirgszügen, und dazwischen befindlichen Ringgebirgen, von denen die bedeutendsten Gay Lussac im Westen und Tobias Mayer im Osten sind.

Die östliche Grenze des *Mare Imbrium* gegen den *Sinus Roris* wird durch die im Meridian streichende Fortsetzung derjenigen Gebirge gebildet, welche das *Mare Imbrium* im Norden gegen das *Mare Frigoris* begrenzen; die bedeutendsten Ringgebirge dieses Theiles sind: südlich von Bianchini: Sharp und Mairan und zwischen beiden, etwas östlich, ein einzelner Berg: Louville.

Westlich von Mairan dehnen sich die Gebirge etwas weiter in das Innere des *Mare Imbrium* und bilden hier das Cap Heraclides, welches mit dem Cap Laplace und den zwischenliegenden, sie im Bogen verbindenden Gebirgsketten den *Sinus Iridum* begrenzt.

Südlich von Mairan erstrecken sich die Gebirgsketten nur mehr auf eine kurze Strecke und lassen dann eine weite, ebene Fläche, durch welche nur einige wenige lichte Bergadern streichen, auf welcher eine Gebirgsgruppe gelegen ist, welche, ohne gerade eine besondere Höhe zu erreichen, das hellste Mondgebirge enthält. Die Gruppe ist ziemlich isolirt; so wie sich nördlich von derselben ein weiter Kanal zwischen dem *Mare Imbrium* und dem *Sinus Roris* befindet, zieht östlich ein Kanal zwischen diesem letzteren und dem *Oceanus Procellarum* und südwestlich zwischen dieser Gruppe und den Carpathen ein ebenso weiter Kanal zwischen dem *Oceanus Procellarum* und dem *Mare Imbrium*. An der Stelle, wo die drei dunklen Flächen das *Mare Imbrium*, *Oceanus Procellarum* und *Sinus Roris* zusammenstossen, erscheinen die hellen Gebirge an sich schon durch die Contrastwirkung bedeutend heller; umsovielmehr noch, indem auch absolut genommen, das nicht besonders grosse, nur 50 *km* im Durchmesser fassende, und auch nicht besonders hohe, sich etwa bis zu einer Höhe von 2400 *m* erhebende Ringgebirge Aristarch das hellste des ganzen Mondes ist. Oestlich schliesst sich an dasselbe der ebenso grosse, aber viel weniger intensive Herodot an, und gegen Norden mittels einer durch den Formenreichthum ausgezeichneten Berggruppe verbunden das kleinere Ringgebirge Wollaston.

Südlich von den Carpathen und der Gruppe des Aristarch dehnt sich der *Oceanus Procellarum* (nach Hevel mit dem vorigen das *Mare Mediterraneum* bildend) aus, zu welchem auch, als ein Busen desselben, der im Westen gelegene

Sinus Aestuum gezählt werden kann. Es ist das grösste der Mare, hat über 1½ Millionen □*km* Flächeninhalt, ist aber nicht so einheitlich wie das *Mare Imbrium*, indem es durch eine grössere Anzahl von Gebirgsstöcken und Kettengebirgen in mehrere, allerdings miteinander offen zusammenhängende Theile zerfällt; das Mare ist überdies erfüllt von einer sehr grossen Anzahl lichter Bergadern, und nebst den erwähnten grösseren Gebirgsstöcken finden sich im Inneren auch zahlreiche kleinere Ringgebirge und isolirte Wallebenen. Die westlichste, Stadius, südlich von *Erathostenes* gelegen, und mit diesem durch bedeutende Gebirgsketten verbunden, schliesst nach Süden durch ein niedriges Mittelgebirge, den *Sinus Aestuum*, ab, in welchem sich, ausser einigen niedrigen Bergadern, keinerlei nennenswerthe Erhebungen befinden. Oestlich vom Stadius, südlich unmittelbar den Carpathen angelagert, befindet sich die ausgedehnte, über 90 *km* im Durchmesser fassende Wallebene des Copernicus (von HEVEL Mons Aetna genannt), von mehrfachen Wällen umgeben, die sich in nach allen Richtungen gehenden Bergketten fortsetzen; auch im Inneren liegen zahlreiche Bergspitzen und Bergketten[1]).

Oestlich vom Copernicus erstrecken sich die Ausläufer der Carpathen noch weit in den *Oceanus Procellarum*; in diesen Ausläufern befindet sich das sehr helle Ringgebirge Milichius und das viel kleinere, schon fast isolirte Hortensius. Weiter ostwärts gelangt man zum zweitgrössten, durch ein später zu erwähnendes Strahlensystem ausgezeichnetes Ringgebirge, den Kepler, der minder gross, aber durch seine grosse Helligkeit, hauptsächlich aber durch seine isolirte Lage sehr auffällig erscheint.

Südlich von Kepler, mit diesem durch Hügelketten verbunden, liegt das Ringgebirge Encke, und westlich von diesem, südlich von Copernicus, die Gruppe der drei Wallebenen Gambard, Reinhold und Lansberg, welche, durch Gebirgszüge mit einander verbunden, einen weiten Bogen bilden, dessen westliches Ende sich nach Süden durch zahlreiche unregelmässige Gebirgszüge in der Gruppe der grossen Wallebenen Fra Mauro, Parry und Bonpland fortsetzt, welche die Grenze gegen das *Mare Nubium* bilden, während das östliche Ende jenes Bogens sich in das Riphäengebirge fortsetzt, zu welchen noch das allerdings schon isolirte, kleine, aber helle Ringgebirge Euclid gehört.

Von Kepler und Encke ziehen gegen Süden ebenfalls zahlreiche Gebirgszüge, die hier wieder eine natürliche Theilung des *Oceanus Procellarum* bilden, und in dem bereits weniger stark gebirgigen, mehr ebenen Theile das helle Ringgebirge Flamstead enthalten. Südlich von diesem findet sich eine nach Norden offene Wallebene, einem Busen des *Oceanus Procellarum* ähnlich, welche MÄDLER Letronne nannte, und westlich von diesem, im südlichsten Theile des *Oceanus Procellarum* das kleine, aber auffallende Ringgebirge Morinus.

Der östlich von dieser natürlichen Scheide gelegene Theil des *Oceanus Procellarum* ist noch durch eine bedeutende Gebirgsmasse, in welcher das ziemlich grosse Ringgebirge Marius hervorzuheben ist, und durch andere, weniger dichte Bergketten, zwischen welchen das kleine Ringgebirge Bessarion liegt, in einen nördlichen, bis zum Aristarch und Herodot reichenden, und einen

---

[1]) Ueber das Strahlensystem, von welchem die Wallebene umgeben ist, wird später gesprochen.

südlichen Theil geschieden, in welchem, in der Nähe des Marius, aber etwas weiter östlich, die isolirte Wallebene Reiner gelegen ist.

Die östliche Grenze des *Oceanus Procellarum* wird von Gebirgszügen gebildet, die bereits den Gebirgen des östlichen Mondrandes angehören, und besser im Zusammenhange mit diesen besprochen werden.

Südlich an den *Oceanus Procellarum* schliesst sich das *Mare Nubium* und das *Mare Humorum*.

Das *Mare Nubium*, das westliche der beiden, von einer zwischen lichtgrau und dunkelgrau wechselnden Farbe, von zahlreichen lichten Bergadern durchzogen, wird im Westen begrenzt vom Alpetragius, Arzachel, Thebit und Purbachius, im Norden gegen den *Sinus Medii* von den Gebirgszügen, welche die beiden Wallebenen Ptolemäus und Fra Mauro verbindet, und in denen das kleine aber ziemlich stark hervorspringende Ringgebirge Lalande sich befindet; im Osten gegen den *Oceanus Procellarum* von der Gruppe des Fra Mauro, südlich von welcher sich durch eine weite Communication der beiden Mare getrennt, ein bedeutendes Gebirgsmassiv erhebt, aus welchem sich die beiden bedeutenden Wallebenen Guericke und Lubienietzky sondern. Bei der grossen aber unregelmässigen Wallebene Agatharchides, welches den südlichsten Punkt des *Oceanus Procellarum* bezeichnet, wo dieser mit dem *Mare Humorum* und *Mare Nubium* zusammenstösst, wendet sich die Grenze des letzteren (gegen das *Mare Humorum*) nordwärts; im wesentlichen ist dieselbe aus den drei grossen Wallebenen Hippalus, eigentlich eine gegen Osten offene Bucht des *Mare Humorum*, Campanus und Mercator gebildet, zwischen welchen sich kleine isolirte Berge einschieben.

Gegen Süden zu reicht das *Mare Nubium* bis an die Gebirgsformationen, die sich vom Südpol weit gegen Norden hin ausbreiten.

Im Innern des *Mare Nubium* sind zu erwähnen: Südlich von Lalande, noch theilweise zu den mit dem Ptolemäus zusammenhängenden Gebirgen gehörig, das nach Süden offene Ringgebirge Davy, südlich von Lubienietzky die grosse ca. 60 *km* im Durchmesser haltende Wallebene Bullialdus, und noch weiter südlich die kleine Wallebene Kies, die durch einen Querwall in zwei fast gleiche Theile getheilt erscheint.

Das *Mare Humorum*, etwas kleiner wie das vorige; mit dem *Sinus Epidemiarum* ca. 135000 □*km* Flächeninhalt fassend, von einer gegen das Grau des *Mare Nubium* deutlich zu unterscheidenden grünen Färbung ähnlich derjenigen des *Mare Serenitatis*, wie alle Mare von zahlreichen Bergadern durchzogen, ist durch eine von Campanus und Vitello nach Osten ziehende, wenig ansehnliche Bergreihe vom *Sinus Epidemiarum* getrennt.

Die Grenze gegen das *Mare Humorum* erstreckt sich vom Agatharchides südlich über den Hippalus, an welchen sich die beiden aneinandergrenzenden bedeutenden Wallebenen Campanus und Mercator anschliessen, von wo einige kleine gegen Süden etwas bedeutender werdende Gebirgszüge nach Südwesten zum Cichus ziehen.

Vom Agatharchides gegen Südost findet man vier vereinzelte Berge, zwischen welchen hindurch eine offene Verbindung des *Mare Humorum* mit dem *Oceanus Procellarum* stattfindet, bis zu der nördlich gelegenen grossen Wallebene Gassendus, die ca. 90 *km* Durchmesser und nahe 6000 □*km* Fläche hat, und

deren innere Fläche von einer grossen Zahl von Einzelbergen und Bergketten durchzogen ist. Gegen Norden hängt Gassendi durch einen bedeutenden, die verschiedensten Formen aufweisenden Gebirgsstock mit dem Letronne zusammen.

Die Ostgrenze des *Mare Humorum* wird durch Gebirgsgruppen gebildet, die bereits den Formationen am Ostrande des Mondes angehören, und mit diesen gemeinschaftlich besprochen werden sollen.

Wie bereits mehrfach erwähnt, gehören die Gebirgszüge südlich vom *Mare Nubium* und *Mare Humorum* den ausgedehnten Gebirgsmassen an, welche sich um den Südpol, in dieser Gegend aber am wenigsten weit gegen Norden erstrecken.

Südlich vom *Mare Nubium*, mit einem gegen dieses hin offenen Walle liegt die Wallebene Pitatus mit ziemlich dunkler Innenfläche, so dass sie von Hevel auch zu den Maren gerechnet und als *Mare Mortuum* bezeichnet wurde; an diesen schliesst sich östlich die viel kleinere, aber im ganzen dem Pitatus ähnliche Wallebene Hesiodus, und südlich die beiden grossen Wallebenen Gauricus und Wurzelbauer. Durch eine meridional sich erstreckende Kette von gegen Süden immer grösser werdenden Ringgebirgen getrennt, liegt hier westlich, gegen Regiomontan und Walter eine ausgedehnte, etwas dunklere Fläche, welche noch als Busen des *Mare Nubium* aufgefasst werden könnte, und in welcher zahlreiche kleine Berge und Krater, darunter der nicht unbedeutende Hell sich befinden, und welche sich südwärts bis zu dem an den Walter angrenzenden Lexell erstreckt.

Das *Sinus Epidemiarum* wird im Westen abgeschlossen durch das Ringgebirge Cichus, bis zu welchem noch ein zwischen Campanus und Mercator nach Westen ziehender Busen des *Sinus Epidemiarum* reicht.

Südlich von Cichus und Capuanus erhebt sich die Gebirgslandschaft allmählich bis zu der unregelmässigen Wallebene Heinsius, an deren Südrande sich vier bedeutende Ringgebirge vorschieben, diese Wallebene mit der viel bedeutenderen Wilhelm von Hessen von nahe 70 *km* Durchmesser verbindend.

Der westlich vom Gauricus bis zum Lexell sich erstreckende Gürtel von Ringgebirgen bildet gegen Süden zu ein unregelmässiges, von Wällen umgebenes, aber durchaus nicht den Charakter von eigentlichen Wallebenen tragendes Hochplateau; westlich ist Orontius, östlich Sasserides; südöstlich von diesen, gegen Nordosten mit Heinsius und Wilhelm von Hessen durch eine vielgegliederte, formenreiche Gruppe von Kratern, Bergen, Bergketten und Ringgebirgen verbunden, liegt die grosse und helle Wallebene Tycho, deren Durchmesser nahe 90 *km* beträgt, merkwürdig durch das im Vollmonde auftretende Strahlensystem, worüber ebenfalls später noch gesprochen wird. Die vier zuletzt erwähnten Wallebenen Orontius, Sasserides, Heinsius und Wilhelm von Hessen bilden im Süden von Tycho einen Kranz, der sich im Westen von Orontius ausgehend nach Süden in die beiden kleineren Wallebenen Saussure und Pictet, an welch letzteren sich Street anschliesst, und im Osten im Anschlusse an Wilhelm v. Hessen in die grosse Wallebene Longomontan, welche nahe 150 *km* Durchmesser hat, fortsetzt.

Zwischen den weiter südwärts gelegenen Gebirgslandschaften erscheinen zwei sehr grosse Mondgegenden als besondere Gruppen, die sich von der Umgebung da-

durch abheben, dass in ihnen die Gebirgsformationen weniger gedrängt auftreten und dadurch ein mehr ebenes Aussehen erhalten, welche aber in Folge der Form und Anordnung der sie umgebenden Ringgebirge wohl kaum als Wallebenen zu bezeichnen sind: der Maginus und der noch grössere Clavius; insbesondere der letztere, über 230 *km* im Durchmesser und über 4000 □ *km* an Fläche, erscheint durch seine irreguläre, vielfach von kleineren Wallebenen durchsetzte Begrenzung, durch die vielen, in seinem Innern auftretenden kleineren Ringgebirge merkwürdig. »Unbeschreiblich prachtvoll ist in einem guten Fernrohre der Anblick des Sonnenaufganges über Clavius' Fläche. Die kleinen, hellglänzenden Lichtringe, die man alsdann im Schatten emporragen sieht, sind die Wälle der Krater, die in der Fläche zerstreut liegen. Bei einigen zeigt sich der Ring anfangs noch als ein Kranz von isolirten Lichtpunkten, andere zeigen Zusammenhang. Lange matte Lichtstreifen ziehen bald darauf in paralleler Richtung durch die Fläche: es sind die ersten, durch einige tiefe Stellen des Ringgebirges dringenden Sonnenstrahlen«[1]). Dabei steigt die Höhe der Wälle ganz beträchtlich; sie erreicht über 5800 *m*.

Maginus und Clavius sind ringsherum von kleinen Ringgebirgen umgeben, unter denen westlich Deluc, östlich der selbst bedeutende Scheiner mit über 100 *km* Durchmesser, südlich der nicht viel kleinere und fast ebenso hohe Blancanus (über 80 *km* Durchmesser und ungefähr 5000 *m* Höhe) liegt, an welchen sich südwärts Klaproth und Casatus anschliessen.

Südlich von dieser Gruppe, in dem Terrain gegen den Südpol zu, sind zu nennen: Cysatus, Grümberger, Moretus von nahe 130 *km* Durchmesser, nach MÄDLER's Messungen mit dem höchsten aller von ihm bestimmten Centralberge[2]), und Short; dann Newton, nach MÄDLER's Messungen mit der grössten Tiefe im Innern des Walles[3]) (7450 *m*), und direkt am Südpol gelegen Cabaeus und Malepart.

Am Ostrande des Mondes sind in den Nordpolargegenden zu nennen: Anaximenes, Anaximander, Philolaus und Pythagoras, und an der Grenze des *Mare Frigoris* Horrebow. Südlich von Harpalus erstreckt sich dann der *Sinus Roris*, dessen Westgrenze gegen den *Sinus Iridum* ein mächtiges Gebirgsmassiv bildet, in welchem Heraclides, Sharp und Mairan bereits genannt sind. Den Ostrand des *Sinus Roris* bilden Gebirgsketten und Wallebenen, die sich schon in perspektivischer Verkürzung als langgestreckte Ellipsen darstellen, unter denen Repsold zu nennen ist. Von den im Innern des *Sinus Roris* gelegenen Wallebenen sind hervorzuheben: Im nördlichen Theil Xenophanes, Oenopides und Cleostratus; im mittleren Theile, in welchem sich der *Sinus Roris* auf die rückwärtige Hemisphäre erstreckt und daher eine Gebirgsgrenze am Mondrande nicht zu sehen ist, Harding und Gérard; weiter südlich Lavoisier und dann Lichtenberg und Ulugh Beigh; südlich von diesen treten am Mondrande wieder zusammenhängende Bergketten auf, die Montes Hercinii, welche bereits die östliche Begrenzung des Oceanus Procellarum bilden, gegen welchen einzelne meridional streichende Bergketten, zwischen welchen die

---

[1]) MÄDLER, l. c., pag. 298.
[2]) ibid., pag. 333.
[3]) ibid., pag. 331.

beiden Ringgebirge Briggs und Seleucus gelegen sind, sich in den Aristarch und Herodot erstrecken und die südliche Grenze des *Sinus Roris* bilden.

Allmählich treten die Gebirgszüge südlich von den Montes Hercinii mehr auf die sichtbaie Mondhälfte herüber und bilden hier breitere Gebirgsmassen und deutlicher hervortretende Ringgebirge. Unter diesen sind der Reihe nach, von Norden nach Süden fortschreitend, zu nennen: Krafft, Cardanus und Vasco da Gama; Olbers; dann die in der Richtung des Meridians verlaufenden und untereinander zusammenhängenden Wallebenen Cavallerius, Hevel und Lohrmann, von denen Hevel die bedeutendste mit nahe 120 *km* Durchmesser ist, und Lohrmann bereits am Aequator gelegen ist.

Südlich vom Aequator, unmittelbar am Mondrande, etwas östlich von Lohrmann schliesst sich die perspektivisch stark verkürzte grosse Wallebene Riccioli an, deren Fläche nahe 24000 □ *km* beträgt, und südwestlich davon die noch grössere Fläche des Grimaldi mit nahe 36000 □ *km* Fläche; beide, namentlich aber Grimaldi, haben eine ziemlich dunkle Fläche, so dass sie selbst in der Nachtseite des Mondes mitunter gesehen werden können, und sind daher dem Charakter nach vielleicht eher den Mare an die Seite zu stellen.

Westlich von Grimaldi, bereits in den *Oceanum Procellarum* hineinragend, liegt das Ringgebirge Domoiseau; weiter südlich, nahe im selben Parallel: Rocca, Sirsalis, Hansteen und Billy, die letzten beiden mit Letronne die südliche Grenze des *Oceanum Procellarum* bildend. An diese schliessen sich Crueger, Fontana und Zupus; dann Eichstedt, Byrgius, Cavendish und Mersenne, von welchem sich nach Westen gegen Gassendi zu die Nordgrenze und nach Süden über Doppelmayer, Vitello und Ramsden die östliche Grenze des *Mare Humorum* und des *Sinus Epidemiarum* erstreckt. Oestlich von Vitello und Doppelmayer gegen den Mondrand zu liegen: Vieta, Fourier und näher dem Mondrande Lagrange, Piazzi und Bouvard.

Der östliche Mondrand zwischen dem Grimaldi und Bouvard wird durch langgestreckte Bergketten gebildet, welche, von Süden gegen Norden, als Montes d'Alembert, Cordilleras und Montes Rook bezeichnet werden.

Weiter südwärts fallen sofort die beiden grossen, miteinander zusammenhängenden, in bedeutender perspektivischer Verkürzung erscheinenden Wallebenen Schikard mit 220 *km* Durchmesser und Phocylides auf, denen sich östlich das etwas kleinere Wargentin anlagert, und in einiger Entfernung gegen den Mondrand zu Inghirami. Von den zahlreichen kleineren, in der Umgebung liegenden Ringgebirgen sind zu nennen: der nördlich an Schikard grenzende Lehmann, westlich davon Drebbel und weiter westlich an den *Sinus Epidemiarum* grenzend die Wallebene Hainzel, von welcher aus sich eine Reihe von zahllosen Ringgebirgen bis zum Wilhelm von Hessen erstrecken.

Zwischen Longomontan und Phocylides dehnt sich die weite, aber ebenfalls schon stark perspektivisch verkürzte Ebene von Schiller aus, welche in der Richtung des Meridians über 180 *km* Länge erreicht, und westlich daran grenzend das Ringgebirge Bayer. Südlich von beiden die Ringgebirge Rost und Weigel.

Gegen den Südpol zu ziehen, östlich von Schiller beginnend, zwei lange Ketten von Ringgebirgen; die westliche: Segner, Zuchius, Bettinus, Kircher, Wilson schliesst an die bereits erwähnten, in der Nähe des Südpols

gelegenen Wallebenen Cysatus und Klaproth an; die zweite, mit Hausen und Bailly beginnend, geht allmählich in die langgestreckte Bergkette des Dörfel und der Montes Leibnitz über, welche sich bis zum Südpol hinziehen.

Ausser diesen sind noch die folgenden von SCHMIDT und dem englischen Lunar Committee (*) vorgeschlagen:

Adams (*), in 67° westl. Länge und — 32° Breite.

Agarum Promontorium, im *Mare Crisium*, östlich von Hansen.

Alexander, südlich von Eudoxus; auf der LOHRMANN'schen Karte eine von Gebirgszügen umgebene dunklere Fläche.

d'Arrest, westlich von Godin und Agrippa, gegen Dionysius zu, etwas grösser als dieser.

Asclepi, südlich von Ideler.

Beer, nordwestlich von der Wallöffnung des Fracastor.

Bond, zwischen Posidonius und Bunsen.

Brisbane, südöstlich von Oken.

Bunsen, westlich von Posidonius, südlich von Römer, auf der LOHRMANN-schen Karte mit *T* bezeichnet.

Carrington, am Ostrand des *Mare Nectaris* westlich von Ross, südlich von Janssen.

Cayley (*), 16° westl. Länge, +5°·5 nördliche Breite.

Celsius, östlich an Rabbi Levi grenzend.

Chacornac (*).

Challis (*), bei Scoresby (*b*).

Cusanus, am Mondrande, westlich von Petermann.

Daniell (*).

Dawes, zwischen Plinius und Janssen, auf der LOHRMANN'schen Karte mit *A* bezeichnet.

Darwin, helle Fläche, südlich an Crueger grenzend.

Delonuay (*), in 3° westl. Länge, —22° Breite.

Donati (*), in 6° westl. Länge, —20°·5 Breite.

Dove, nördlich von Pitiscus, nahe im Meridian desselben.

Epicurius, helle Fläche zwischen Thales und Strabo einerseits und Endymion andererseits.

Epimenides, westlich an Hainzel grenzend.

Faye (*), in 4° westl. Länge, —21°·5 Breite.

Fouceault (*) = Harpalus *A*.

Galilei, Krater im *Oceanus Procellarium*, nordöstlich von Reiner.

Galvani, am Mondrande bei Repsold.

de Gasparis, das östliche der beiden Ringgebirge zwischen Fourier und Mersennius; westlich von Cavandish.

Glaisher (*), Krater südwestlich bei Proclus.

Goldschmidt, zwischen Anaxagoras und Barrow.

Haidinger, etwa in der Mitte zwischen Hainzel und Heinsius.

Hamilton und Feuillé, zwischen Archimedes und Tymocharis, auf der LOHRMANN'schen Karte mit *H* bezeichnet.

Heis (*), in der östl. Länge 32° und Breite +32°.

Helmholtz, nördlich an Neumayer grenzend.

Heraclites, östlich an Licetus und Cuvier grenzend.

Herschel (*), in 40° östl. Länge und +62° Breite.
Herschel, Miss C. (*) in 32° östl. Länge und +34° Breite.
Hind, nördlich an Hipparchus dicht angrenzend.
Horrox, westlich von Halley am Südwall von Hipparchus.
Huggins, östlich an Nassir Eddin grenzend.
Ideler, etwas südlich zwischen Pitiscus und Baco.
Kaiser, zwischen Playfair und Werner, auf der LOHRMANN'schen Karte mit *N* bezeichnet.
Kirchhoff, westlich, in der Nähe von Bunsen.
Krusenstern, südwestlich von Walter und Aliacensis.
Kunowsky, östlich von Landsberg.
Lassel (*), in 7°·5 östl. Länge und —15°·5 Breite.
Liebig, das westliche der beiden Ringgebirge zwischen Fourier und Mersenius, westlich von Cavendish.
Lockyer, nördlich von Dove, westlich von Nicolai.
Luther = Posidonius *C*, zwischen *Mare Serenitatis* und *Lacus Somniorum*.
Maclear (*), 20°·5 westl. Länge, +10°·5 nördl. Breite bei Ross.
Main (*), bei Scoresby (*c*).
Marco Polo, in den Gebirgszügen zwischen *Mare Vaporum* und *Sinus Aestuum*, in der Breite von Manilius und Erathosthenes
Maury *).
Melloni, Krater im *Oceanus procellarum*, westlich von Lohrmann.
Naumann, an der Ostgrenze des *Oceanus procellarum*, südlich von Briggs.
Neumayer, westlich von Boussingault, am Mondrande.
Palmieri, Krater in 47°·5 östl. Länge und —28°·5 Breite.
Petermann, am Mondrande, südlich von Euctemon.
Peters, zwischen Rosenberger und Hommel.
Regnault, am Mondrande bei Repsold (oder an Stelle desselben, der auf der SCHMIDT'schen Karte fehlt).
Reimarus, südlich an Vega grenzend.
Robinson (*), in 47° östl. Länge und +59° Breite.
Rothmann, zwischen Lindenau und Piccolomini; auf der LOHRMANN'schen Karte mit *K* bezeichnet.
Rümker, westlich von Harding im *Sinus Roris*.
Schiaparelli, Krater im *Oceanus procellarum*, westlich von Naumann.
Schmidt (*), südlich bei Ritter.
Schwabe, zwischen Cusanus und Democritus.
Seleucus, südlich von Naumann an der Ostgrenze des *Oceanus procellarum*.
Sina, in *Mare tranquillitatis*, westlich von Carrington.
Struve O., östlich von Naumann, in der Nähe des Mondrandes.
Timoleon, westlich von Oriani und Plutarch.
Tralles, östlich an Cleomedes grenzend.
Watt, längs des ganzen südwestlichen Walles an Steinheil grenzend.
Whewell, südöstlich von Cayley.
Wichmann (*) = Euclides a.
Wöhler, zwischen Metius und Riccius, etwas näher diesem.
Young, westlich von Metius.
Zöllner, zwischen Delambre und Alfraganus; auf der LOHRMANN'schen Karte nicht enthalten.

Nebst diesen Namen ist für noch nicht benannte wichtigere Punkte die von MÄDLER eingeführte Bezeichnung mittels beigefügter Buchstaben üblich, wie dies schon auf pag. 261 erwähnt wurde.

Von besonderen Erscheinungen auf der Mondoberfläche war der Verschiedenheit der Farbenqualität der Mare bereits gedacht; ebenso war bereits erwähnt, dass die Intensität derselben Farbe, namentlich das Grau bei den verschiedenen Maren und selbst bei einzelnen Theilen desselben Mare verschieden ist. Dieselben Verhältnisse aber findet man auch bei den Binnenräumen der Wallebenen und Ringgebirge. Einzelne sind so dunkel, dass man sie den Maren an die Seite stellen kann; andere so hell, dass man sie im Gegensatz zu diesen als Hochlandschaften bezeichnet hat. Allein ein derartiger Einfluss der Höhe kann hier nicht angenommen werden. »Das dunkle Grau im Innern der Wälle ist so wenig das Anzeichen einer grösseren Tiefe, dass es sich vielmehr ausschliesslich in solchen Ringflächen findet, deren Wall nach Innen und Aussen einen wenig verschiedenen Abfall zeigt, wie dieses ausser Billy beim Crueger, Firmicus, Apollonius, Plato u. a. stattfindet, wogegen grössere Vertiefungen, die tausend und mehr Toisen unter der äusseren Fläche liegen, wie Erathosthenes, Tycho, Aristarch, Eudoxus, die sämmtlich schroff abstürzen, fast immer ein helleres, ja glänzendes Colorit wahrnehmen lassen. Die wahrscheinliche Ursache dieser letzteren Erscheinung ist wohl der Brennspiegelartige Einfluss der senkrecht auffallenden Sonnenstrahlen an den concav geböschten Abhängen jener grossen Tiefen; wogegen bei einer geringen Steilheit des Walles, zumal wenn die Concavität schwach ist oder gar nicht stattfindet, nur die direkten Sonnenstrahlen einfallen. Damit ist nun freilich das Dunkelgrau nicht erklärt, allein es dürfte auch überhaupt nicht möglich sein, dieses bloss von den Beleuchtungsverhältnissen abhängig zu machen«[1]). Die wahrscheinliche Ursache dieser Erscheinung, welche übrigens auch schon von MÄDLER angegeben wurde[2]), dürfte wohl von der Verschiedenheit der Albedo von physikalisch und chemisch verschiedenen Substanzen herrühren. Diesem Umstande haben MÄDLER sowie LOHRMANN dadurch Rechnung getragen, dass sie nebst der Höhenangabe durch Schraffirung noch eine Intensitätsscala für die Färbung durch Punktirung der ebenen oder nahe ebenen Flächen anbrachten.

Die dunkelsten Theile der Mondoberfläche sind das *Mare Crisium*, einige in den Gebirgslandschaften einschneidende Ausbuchtungen des *Mare Tranquillitatis* und des *Mare Nubium* und die Ränder des *Mare Serenitatis*. Die hellste Gegend des Mondes ist Aristarch, und zwar sowohl der Wall wie das Innere; ihm zunächst kommen einzelne Punkte im Werner, Proclus u. s. w.

Ausser den verschiedenen Bergen erscheinen im Monde noch lange, schmale, dunkle Linien, die etwa 1 *km* breit und oft bis 500 *km* lang sind, und welche als grubenartige Furchen angesehen werden. Sie wurden von SCHRÖTER als Rillen bezeichnet. Erwähnt wurde bereits die grosse Rille beim Hyginus im *Mare Vaporum*. Die Zahl der Rillen ist aber ganz beträchtlich und wächst in dem Maasse, als die Beobachtungen mehr Details zu Tage fördern, wie aus der folgenden Vergleichung hervorgeht, welche der SCHMIDT'schen Selenographie entnommen sind.

---

[1]) MÄDLER, l. c., pag. 335.

[2]) l. c., pag. 136.

In der Mondkarte von	Lohrmann	Mädler	Schmidt	
fanden sich eingetragen	7178	7685	32860	Krater
	99	77	348	Rillen.

Wesentlich anderer Natur sind die bei günstiger Beleuchtung, namentlich zur Zeit des Vollmondes sichtbaren Strahlensysteme. Von den Lichtstreifen, welche die Mondmare nach verschiedenen Richtungen durchziehen, und welche sich bei sehr schräger Beleuchtung (zur Zeit der Phasen), durch die Licht- und Schattenvertheilung als niedrige Bergadern zu erkennen geben, sind wohl zu unterscheiden Systeme von hellen Lichtlinien, welche von einem Ringgebirge oder einer Wallebene als Centrum ausgehend, oft erst in einiger Entfernung vom Fusse desselben beginnend, sich über 100, 200 und selbst über 500 *km* weit erstrecken, und dabei Ebenen, Berge, Bergketten, Wälle der Ringgebirge u. s. w. ohne Störung ihrer Richtung übersetzen. Sie sind keineswegs regelmässig, die einzelnen Strahlen oft schwach gekrümmt, immer aber neben einander einherlaufend, sich nicht durchsetzend. Die bedeutendsten dieser Systeme nehmen ihren Ursprung von Tycho, Copernicus und Kepler. Die Streifen des Tycho sind schon mit einem gewöhnlichen Opernglase (nicht aber mit freiem Auge) sichtbar; sie erstrecken sich über den Walter und Regiomontan, über den Stöfler und Longomontan. Unter denselben sind besonders zwei hervorzuheben: ein doppelter mit dunklem Zwischenraume, der nach Nordosten durch das *Mare Nubium* in den *Oceanus Procellarum* geht, wo er sich nach etwa 1000 *km* Länge verliert, und ein zweiter, einfacher, weniger glänzender, der aber fast über die ganze sichtbare Mondfläche, über den Menelaus, auf welchen er bereits sehr schwach trifft, dann aber im *Mare Serenitatis* wieder an Intensität gewinnend bis zum Thales in den Nordpolarlandschaften sich erstreckt. Alle Strahlen entstehen aus einem grauen Nimbus um Tycho.

Das zweitgrösste Strahlensystem ist das des Copernicus, dessen Strahlen sich nach Norden in das *Mare Imbrium* zuweilen noch bis in den *Sinus Iridum* bis zum Pico ziehen. Ueber das Aussehen dieser Streifen bemerkt schon Mädler: »Man drückt sich richtiger aus, wenn man hier dunkle Streifen durch helle Landschaft ziehend annimmt«[1]). Im Osten stossen sie auf das dritte bedeutende Strahlensystem des Kepler, welcher, von einem weiten Lichtschein (Halo) umgeben, Strahlen vorzugsweise gegen Osten sendet, so dass hier einzelne Streifen vom Copernicus über den Kepler bis zum Rainer zu ziehen scheinen. Uebrigens ist das Strahlensystem des Kepler, obgleich weniger ausgedehnt, wie die beiden ersten, wegen der günstigen Umstände deutlich wahrzunehmen; denn während Tycho allseitig von gewaltigen Gebirgsmassen umgeben ist, und ebenso Copernicus auf der Nordseite die Carpathen vorgelagert hat, von denen im Vollmonde allerdings die hauptsächlichsten Terrainunterschiede verschwinden, jedoch nicht so, dass nicht gewisse Intensitätsunterschiede sichtbar bleiben, so liegt Kepler in einer fast ganz ebenen Gegend, welche dem Hervortreten des Strahlensystems sehr günstig ist.

Auch mit anderen, kleineren Strahlensystemen steht dasjenige des Copernicus in Verbindung; so insbesondere mit denjenigen des Aristarch, welcher von einem dunklen Nimbus umgeben ist, aus welchem sich die Irradiationen entwickeln.

Nebst dem Aristarch führt bereits Mädler als bedeutende Strahlensysteme

[1]) l. c. pag. 258.

diejenigen des Byrgius, Anaxagoras und Olbers an; und ausser diesen sieben bedeutenden noch als weniger ausgebildete die Strahlensysteme des Mayer, Euler, Proclus, Aristillus und Tymocharis. Doch erwähnt er, dass weniger ausgedehnte Strahlensysteme sich auch sonst noch finden.

Eingehender hat sich SCHMIDT mit den Strahlensystemen beschäftigt. Strahlensysteme von der Gestaltung des Tycho, Copernicus und Kepler sind wenige; aber die Zahl der minder auffälligen wächst in dem Maasse, als die Kraft der verwendeten optischen Hilfsmittel stärker wird; überdies giebt es eine Reihe von nicht gerade als Strahlensysteme auftretenden Erscheinungen, die aber von diesen nur quantitativ, nicht eigentlich qualitativ verschieden sind. Zu diesen gehört die zweite Form: die Krater mit strahligem Nimbus und die stark umglänzten Krater; aber selbst bei vielen der letzteren, so bei Euclid und Lalande gelang es SCHMIDT, den Nimbus als aus feinen Lichtstreifen zusammengesetzt zu erkennen. Sind aber die umglänzten Krater und Berge sehr klein, und auch der Nimbus nur von geringer Ausdehnung, so sieht man nur die Umrandung, die dritte Form: die Lichtflecken. Im Wesen hält SCHMIDT alle drei Erscheinungen für identisch. Nun tritt auch mitunter ein dunkler Nimbus auf, aus welchem sich das Strahlensystem entwickelt, so bei Tycho, Aristarch und Dyonisius. »Aber der Unterschied ist vielleicht nicht wesentlich, wenn man annimmt, dass die ungleiche Färbung des solche Krater umgebenden Halo durch die Natur der ausgeworfenen Streifen bedingt sei. Wegen der mässigen Erstreckung solcher Gebilde halte ich es für das wahrscheinlichste, dass sie Analoga der vulkanischen Asche sind, die bei der Explosion des Kraters ringsum sich ablagerte, gerade so, wie dieses bei den Vulkanen der Erde geschieht. Solche Stoffe können dunkle oder helle Farbe haben; es ist aber für manche Fälle auch wohl möglich und wie bei Linné sehr wahrscheinlich, dass eine flüssige, schlammartige Materie sich rings um den Krater ergoss und ablagerte« [1]).

Zu den oben von MÄDLER angeführten Strahlensystemen giebt SCHMIDT noch eine grosse Reihe anderer, unter denen Euclides, Eudoxus, Gambart A., Geminus, Hipparchus D., Lalande, Langrenus, Stevinus, Theophilus A. und Zuchius mehr oder weniger entwickelte, wenn auch mitunter nur schwache Strahlensysteme haben, während andere, wie Alpetragius B., Censorinus, Cleomedes A., Dyonisius, Hypatia, Lubienietzky A., F. und G., Manilius, Menelaus, der östliche der beiden Krater Messier Plinius A. und Taruntius mit Halo oder kurzem Strahlennimbus umgeben und zahlreiche andere als umglänzte Krater angeführt werden.

Zwischen den verschiedenen Formen, den eigentlichen Radiationen, den umglänzten Kratern und den einfachen Lichtflecken ist aber eine scharfe Grenze nicht zu ziehen; auch hier, wie bei allen Erscheinungen, deren Unterschiede quantitativer Natur sind, giebt es zahlreiche Uebergänge.

Was sind nun diese Lichtlinien?

Ehe an die Beantwortung dieser Frage gegangen wird, sollen zunächst einige Worte, welche MÄDLER in der Einleitung zu seiner »allgemeinen Selenographie« ausgesprochen hat, und welche eigentlich nicht oft genug wiederholt werden können, wörtlich wiedergegeben werden: »Nur zu häufig haben sich Schriftsteller ihrer Phantasie überlassen, die allerdings nirgend schwerer in Schranken zu halten ist, als bei einem Objecte, das mit der vermehrten Kenntniss desselben nur immer räthselhafter zu werden scheint und dabei für viele so überaus

[1]) SCHMIDT, l. c., pag. 102.

interressant gemacht werden kann, sobald man sich entschliesst, Hypothesen auf Hypothesen zu häufen. Es ist leicht, auf diesem Wege bei dem grössten Theile der Leser den Ruf eines scharfsinnigen und geistreichen Schriftstellers zu erlangen und die Begierde, die erzählten Wunder mit eigenen Augen zu schauen, mächtig anzuregen; aber — der Wissenschaft ist ein solches Verfahren fremd[1]).«

Sucht man nun aber nach einer Erklärung für diese Lichtlinien, so muss man auf der heutigen Stufe der Kenntniss der Mondoberfläche seine Unfähigkeit, diese räthselhaften Erscheinungen zu erklären, eingestehen. Schröter hielt sie für Bergadern und Bergketten; ebenso Hevel, der ihnen auch besondere Namen als Montes gab. Dieses nun können sie aber nicht sein; denn Bergadern müssen nothwendig in der Nähe der Schattengrenze erst recht sichtbar werden; diese Streifen aber verschwinden bei niedrigem Sonnenstande und sind gerade am deutlichsten im Vollmonde, also auf hellem Grunde sichtbar, worin sie einige Aehnlichkeit mit den Erscheinungen des Glanzes zeigen. Cassini hielt sie für Wolken; von Herschel wurden sie für Lavaströme gehalten; dazu sind sie wohl aber zu gerade; auch folgen sie nicht den Krümmungen der Berge und Thäler, gehen vielmehr über dieselben hinaus. Mädler meint nun: »Es bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, dass durch irgend welchen Naturprozess die innere Structur des Mondbodens, an den Stellen, wo diese Streifen ziehen, eine Veränderung erfahren hat, welche die Fähigkeit, das Licht zurückzuwerfen, beträchtlich erhöht[2]).« Welcher Art diese Veränderung ist, ob sie überhaupt unseren erfahrungsmässigen Kenntnissen von den Veränderungen auf der Erde entnommen werden können, bleibt dabei unentschieden; eine Erklärung im eigentlichen Sinne des Wortes, welche uns die Erkenntniss des Phänomens näher bringt, ist dieses nicht.

Nasmyth vergleicht den Krater Tycho und die von ihm ausgehenden Strahlensysteme mit den strahlenförmigen Sprüngen, die man häufig an Glasscheiben findet, wenn sie durch einen kleinen Stein oder eine Flintenkugel durchbohrt wurden, und auch Arago war dieser Ansicht, welche übrigens auch selbst keine Erklärung ist, sondern nur eine Analogie giebt. Schwabe[3]) theilt diese Meinung nicht. Er geht zunächst von der Thatsache aus, dass die Mondmare und ähnliche dunkle Stellen im Vollmonde am dunkelsten aussehen, und gegen die Quadraturen zu bedeutend verblassen, welche Thatsache von Mädler als eine Folge einer auf demselben befindlichen Vegetation gedeutet wurde. Dieses nimmt nun Schwabe auch für die Lichtstreifen an. Er sah mit guten Fernrohren, allerdings bei geeigneter Beleuchtung und hinreichender Geduld, zwischen den Lichtstreifen äusserst feine, parallele, hellgraue Linien in unzähliger Menge, die später als die Lichtstreifen auftreten und früher verschwinden; diese nun verursachen nach seiner Meinung bei höchstem Sonnenstande eine Verdunkelung des Bodens, wodurch die hellen Streifen also lediglich durch Contrastwirkung, in Folge des Dunklerwerdens der Umgebung hervortreten. Dabei bleibt noch, wie Schwabe selbst zugiebt, unerklärlich, wieso eine solche Vegetation in strahligen Linien auftritt, weiters aber spricht hiergegen, dass Auwers die Strahlensysteme auch in der Nachtseite des Mondes, z. B. diejenigen

---

1) l. c., pag. V.
2) l. c., pag. 138.
3) Astron. Nachrichten Bd. 51, pag. 342.

des Tycho am 13. April 1861, als der Mond zwei Tage von dem ersten Viertel entfernt war, sehr deutlich wahrnahm[1]).

Dass SCHMIDT das Aussehen der umglänzten Krater auf eine Art vulkanischer Ausbrüche zurückführt, wurde bereits erwähnt. »Die Lichtstreifen des Tycho«, fährt er jedoch fort, »des Copernicus und andere, die jeder Beobachter kennt, sind nicht erklärt, und wer mit der Sache vertraut ist, wird sich vor übereilten Schlüssen hüten. Auch MÄDLER's Hypothese führt auf grosse Schwierigkeiten . . . Der blosse Anblick überzeugt, dass es die Heerde der grossen Explosionen oder Eruptionen waren, welche über so bedeutende Räume hin die gewaltigen Veränderungen der Oberfläche hervorriefen, welche die Lichtstreifen darstellen. Besonders in den grauen Ebenen haben Krater wie Copernicus oder Kepler das Mare, die graue Oberfläche geradezu absorbirt, so dicht liegen die radialen Streifen nebeneinander[2]).« Eine weitere Stütze für den Erklärungsversuch durch vulkanische Eruptionen findet SCHMIDT in seinen Beobachtungen bei dem Ausbruch des Vulkans Santorin in den Jahren 1866 und 1868; bei den unzähligen aufeinanderfolgenden Eruptionen wurden heller Bimstein und weissgraue Asche einseitig ausgeworfen, die sich dann in vielen, von dem Vulkane radial ausgehenden Linien erstreckten. Im Laufe der Zeiten wurde dann in Folge der nach verschiedenen Richtungen erfolgten Ausbreitung der Streifen ein den Vulkan umgebendes Strahlensystem geschaffen. »Wer aber darf solche Analogien auf den Mond übertragen, wo bei Tycho die Streifen in vier bis fünf Meilen Breite einige hundert Meilen weit fortziehen, ohne Rücksicht auf Berg und Thal?«

Die Oberfläche des Mondes bietet dem Beobachter ein von dem Anblick der anderen Himmelskörper wesentlich verschiedenes Bild. Der Eindruck, den man empfängt, ist derjenige, dass man es mit einem erkalteten, zur Ruhe gekommenen, längst abgestorbenen Weltkörper zu thun hat. Keine wechselnden Flecken-, Protuberanzen- und Fackelbildungen wie bei der Sonne, keine veränderlichen wolkenartigen Flecke, wie sie mehr oder weniger bei allen Planeten gefunden werden: immer das gleiche starre Bild bietet uns der Mondkörper dar.

Einzelne Veränderungen glaubte man allerdings schon frühzeitig bemerkt zu haben. Das stark hervortretende Ringgebirge Cassini im Innern des *Mare Imbrium* findet sich weder bei HEVEL noch bei RICCIOLI verzeichnet, sondern erst auf der Karte von DOM. CASSINI, was, wie schon erwähnt, SCHRÖTER zu der Meinung veranlasste, dass es erst um jene Zeit entstanden wäre.

Etwa 4° südlich von Eimmart setzt SCHRÖTER eine vier bis fünf Meilen lange, graue, mit einem gewöhnlichen Ringgebirge umgebene Tiefe, Alhazen, die er zu Librationsbestimmungen verwendete. Im Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1825 bemerkte KUNOWSKY, dass dieses Ringgebirge nicht mehr zu finden, und überhaupt die ganze Gegend verändert sei. In der That zeigt weder die Karte von MÄDLER, noch von LOHRMANN in dieser Gegend ein Ringgebirge. Allein bezüglich dieses Ringgebirges bemerkte KÖHLER in Dresden, dass Alhazen nicht verschwunden, aber zu verschiedenen Zeiten sehr veränderlich sichtbar sei; MÄDLER bemerkt übrigens, dass die Zeichnungen von SCHRÖTER sich als unzuverlässig erwiesen, wobei er in seiner abfälligen Kritik allerdings etwas zu weit geht. Wenn aber auch die Zeichnungen von SCHRÖTER den Alhazen vielleicht zu stark markirt haben sollten, bleibt dabei unerklärlich, wie er sich eines zu verschiedenen Zeiten verschieden und nach den späteren Zeichnungen

---

1) Astron. Nachrichten Bd. 58, pag. 75.

2) l. c., pag. 102.

im Allgemeinen wenig gut sichtbaren Ringgebirges zu, wenn auch noch so rohen Librationsbestimmungen hat bedienen können.

Weniger zweifelhaft bleibt allerdings die Auffassung bezüglich des Cassini; eine früher nicht gesehene und später deutlich gesehene Formation spricht durchaus nicht für das Nichtvorhandensein derselben in früheren Zeiten, sondern in erster Linie stets nur für das Nichtgesehensein. Vergrösserte Aufmerksamkeit, verbesserte optische Hilfsmittel werden stets neue Formen entdecken lassen, die, weil sie neu entdeckt sind, deshalb nicht schon neu entstanden sein müssen. Auch Mädler glaubt, dass Cassini früher schon bestanden haben könnte, aber wegen der geringen Höhe seines Walles und der in Folge dessen nur kurzen Schatten weniger gut sichtbar ist. Aehnliches nimmt er für den Oerstedt, den er neu entdeckte, und für den Stadius, den er drei Jahre lang vergeblich suchte, an; und ähnliches gilt für viele andere Formationen. Man vergleiche nur die Karten von Mädler, Lohrmann und Schmidt. Nur beispielsweise soll angeführt werden, dass Mädler an den beiden Mondformationen Albategnius und Hipparch wesentliche Verschiedenheiten findet: die erstere bezeichnet er als wahre »Wallebene«, die letztere als »Musterkarte der verschiedensten Mondformationen«; in der Lohrmann'schen Karte aber haben beide genau denselben Charakter, und zwar eher den zuletzt angeführten. Proclus wird von Mädler als Ringgebirge angegeben; Lohrmann hat hier kein charakteristisch ausgesprochenes Ringgebirge. Auf Verschiedenheiten dieser Art wurde übrigens schon mehrfach bei den einzelnen Formationen hingewiesen. Mädler selbst giebt seine Karte durchaus nicht für eine getreue Wiedergabe alles gesehenen aus; er erwähnt wiederholt, dass sich eine grosse Menge Details darbot, welche in die Karte aufzunehmen sich als unmöglich erwies.

Einen weiteren Beleg hierfür bieten einige im Jahre 1864 von Webb und Bird in der Umgebung des Marinus und Mersennius neuentdeckte Krater, welche aber Schmidt bereits seit 1846 gesehen hatte. Schmidt spricht sich bei dieser Gelegenheit[1]) folgendermaassen aus: »In der letzten Zeit haben sich verschiedene Beobachter in England sehr anhaltend mit dem Specialstudium der Mondoberfläche beschäftigt und sind gelegentlich zu Schlüssen gelangt, welche glauben lassen, dass gegenwärtig neu entstandene Gebirgsformen auf dem Monde entdeckt seien. Wenn ich selbst auch nicht im Stande bin, nach 25jährigen, sehr eingehenden Beobachtungen der Art auch nur ein sicheres Beispiel einer Neubildung anzuführen, wenn es sich nämlich bloss um Kraterformen handelt, so bin ich auch weit davon entfernt, neue Formenbildungen auf dem Monde in Abrede zu stellen. Nur suche ich sie nicht gerade unter den Kratern, in denen man einige tausend kleinere nach und nach bemerkt, die bei Lohrmann und Mädler fehlen, sondern ich richte seit etwa 25 Jahren meine Aufmerksamkeit vorzugsweise auf Rillen, deren ich eine sehr grosse Zahl neu entdeckt habe, und darunter leicht kenntliche, die seit Schröter's Zeiten nicht gesehen wurden[2])«. So hatte Schmidt westlich von der seit lange bekannten Aristarchusrille 12 oder 13 ungewöhnliche und vorher nicht bekannte Rillen und Kraterfurchen bemerkt, die sich nicht wohl bloss wegen »äusserlicher Umstände« der Beobachtung entzogen haben können«[3]).

Dennoch führt Schmidt an derselben Stelle an, dass er am 2. und 4. Januar

[1]) Astron. Nachrichten Bd. 64, pag. 79.
[2]) l. c., pag. 79.
[3]) Ebenda, pag. 80.

1865 in der inneren Fläche des Picard A (im *Mare Crisium)* einen kleinen Krater fand, der vorher allen Beobachtern entgangen war; eine Vergleichung der Mondkarten von MÄDLER, LOHRMANN, SCHMIDT, ferner der seither erschienenen Spezialkarten, z. B. von FAUTH u. A., von denen schon auf pag. 247 gesprochen wurde, wird den Einfluss der subjectiven Wahrnehmungen bei diesen Darstellungen leicht ersehen lassen; ganz ähnliche Verhältnisse, nur in einem, durch die Schwierigkeit der Gegenstände noch erhöhtem Maasse, treten ja auch bei der Beobachtung der Oberfläche der Planeten auf, wovon bei diesen gesprochen werden wird. Dabei ist nur von Darstellungen die Rede, welche völlig verbürgt, als unanfechtbar zu bezeichnen sind. Hierzu treten nun aber andere Zeichnungen, welche an sich durch die Technik der Darstellungen etwas an Vertrauenswürdigkeit einbüssen, selbst dann, wenn man den wissenschaftlichen Ernst des Beoqachters dabei nicht in Zweifel ziehen wollte.

Der Meinung, dass es sich bei den meisten neu entdeckten Objecten nur um noch nicht gesehene handelt, schliessen sich auch die meisten Mondbeobachter an; so H. J. KLEIN aus Anlass eines von GAUDIBERT gefundenen Kraters [1]) und aus Anlass einer von demselben wahrgenommenen scheinbaren Veränderung im Krater Plinius [2]); KELLNER aus Anlass einer von ihm gesehenen neuen Rille [3]); FAUTH aus Anlass einiger von ihm neu aufgefundener Mondkrater [4]) und andere.

Unter allen diesen verschiedenen Beobachtungen aber giebt es eine [5]), welche mit voller Sicherheit auf eine reelle Veränderung auf der Mondoberfläche deutet; sie betrifft nicht das Auftreten, d. h. das Auffinden einer neuen Formation, sondern das vollständig erwiesene Verschwinden einer wohlbekannten, früher bestandenen.

Der Krater Linné im südöstlichen Theile des *Mare Serenitatis*, welcher sowohl auf der Karte von MÄDLER, wie von LOHRMANN als ansehnliches Gebilde von der Form eines kleinen Ringgebirges auftritt, und der von SCHMIDT in der Zeit zwischen 1841 Februar 27 bis 1843 September 9 wiederholt gesehen und in seinen Tagebüchern angeführt wurde [6]), war von ihm in den folgenden Jahren nicht mehr gelegentlich beobachtet, und wahrscheinlich seit 1853 überhaupt nicht mehr als Krater erschienen, da SCHMIDT ihn seit dieser Zeit, wo er wiederholt die Gegend des *Mare Serenitatis* durchmusterte, ohne aber speciell nach ihm zu suchen, nicht mehr anführte. Dieses Fehlen des Kraters bei gelegentlichen Beobachtungen wurde endlich als ein thatsächliches Fehlen durch ein specielles Nachforschen nach demselben am 16. Oktober 1866 in positiver Weise constatirt: der einst eine Meile breite und tausend Fuss tiefe Krater war und blieb verschwunden.

Selbstverständlich wurde bald nach dem Bekanntwerden dieser merkwürdigen Beobachtung eifrig nach dem Krater gesucht. H. J. KLEIN fand an seiner Stelle im März 1867 einen kleinen elliptischen Fleck [7]), HUGGINS [8]) und bald darauf

---

[1]) Astr. Nachrichten Bd. 122, pag. 407.

[2]) Astr. Nachrichten Bd. 122, pag. 399 und Bd. 123, pag. 224.

[3]) Astr. Nachrichten Bd. 132, pag. 207.

[4]) Astr. Nachrichten Bd. 132, pag. 361.

[5]) Aehnlich, wenn auch nicht so sichergestellt, verhält es sich mit den Beobachtugen der Mondlandschaft Alhazen.

[6]) Selenographie, pag. 156.

[7]) Astron. Nachr. Bd. 69, pag. 35.

[8]) Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Bd. 27, pag. 296.

SCHJELLERUP und D'ARREST[1]) bemerkten denselben ebenfalls, und in der Mitte desselben eine äusserst feine, punktförmige Krateröffnung, welche übrigens von SCHMIDT auch schon früher, aber nur an zwei Nächten (am 26. December 1866 und am 25. Januar 1867) gesehen worden war[2]). SCHJELLERUP wies aber darauf hin, dass der Krater Linné auf SCHRÖTER's Zeichnungen im ersten Bande seiner selenotopographischen Fragmente (Tafel 9) gerade so aussieht, wie er von HUGGINS, D'ARREST und SCHJELLERUP gesehen worden war.

Eine Erklärung für diese vorerst doch nur als sicher verbürgte vereinzelte Thatsache einer Veränderung auf dem Monde zu geben, wäre jetzt noch verfrüht; und weitere Veränderungen zu constatiren, kann nicht durch die Anlegung von Generalkarten angestrebt werden, sondern hier müssen Specialkarten einzelner Gegenden, die bis ins kleinste sichtbare Detail ausgeführt, ein möglichst getreues Bild alles Gesehenen geben, als Grundlage für die Vergleichung dienen; dieses ist der Weg, den die moderne Selenographie sich vorgezeichnet hat und von dem bereits auf pag. 247 die Rede war.

Die Frage, ob der Mond eine Atmosphäre besitzt, wurde mehrfach erörtert und in verschiedenem Sinne beantwortet. HEVEL und SCHRÖTER nahmen eine solche an, HERSCHEL leugnete sie. Die Mehrzahl der Beobachtungen spricht nicht für das Vorhandensein einer solchen, oder um präciser zu sein, einer mit der irdischen Atmosphäre in Qualität und Dichte gleichen Atmosphäre.

Gegen das Vorhandensein einer solchen spricht der absolute Mangel von veränderlichen, wolkenartigen Objekten; zwar hielt man anfänglich die bei den Sonnenfinsternissen beobachteten Protuberanzen und Fackeln für Gebilde, die dem Monde angehören und bei den Sonnenfinsternissen sichtbar werden; es ist aber längst nachgewiesen, dass diese Objekte der Photosphäre der Sonne angehören. Ebensowenig wurden bei Sonnenfinsternissen andere Erscheinungen, welche auf eine Mondatmosphäre hindeuten würden, beobachtet; eine solche wäre das Auftreten eines Ringes, eines um den Mond sich erstreckenden Halbschattens, welcher von der successiven Lichtschwächung bis zur vollständigen Verdunkelung des Sonnenlichtes herrühren müsste. Die Lichtbrechung in der Mondatmosphäre, wenn eine solche vorhanden wäre, müsste übrigens auch ein Uebergreifen der Hörner der Sonnensichel über den Mondrand heraus auftreten lassen; ferner eine verwaschene, unscharfe Schattengrenze, welche z. B. auf der Erde eine Art Zwielicht oder Dämmerung erzeugt; der aus den Sternbedeckungen abgeleitete Mondhalbmesser müsste sich kleiner ergeben, als der direkt gemessene, weil die Sterne später verschwinden und früher wiedererscheinen würden (da sie in Folge der Brechung in der hypothetischen Atmosphäre noch ein Stück hinter dem Monde gesehen würden); überdies könnte das Verschwinden nicht plötzlich stattfinden, sondern die Sterne müssten in Folge der Lichtschwächung in der Atmosphäre nach und nach an Intensität verlieren. Keine einzige der in diesen Richtungen gemachten Erfahrungen deutet mit Sicherheit auf eine Mondatmosphäre; aber man kann dennoch nicht behaupten, dass die Beobachtungen mit absoluter Sicherheit die Abwesenheit einer solchen zu constatiren gestatten; denn keine einzige dieser Beobachtungen ist hinreichend scharf, um die Abwesenheit überhaupt einer Atmosphäre mit Sicherheit festzustellen. BOGUSLAWSKY beobachtete einmal eine Sternbedeckung, welche nicht plötzlich stattfand, sondern welche mit einem Längerwerden des Sterns in der Richtung des Mond-

[1]) Astron. Nachr. Bd. 69, pag. 367.

[2]) Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. in Wien, II. Abtheilung 1867, pag. 859.

radius begann. Eine einzige Beobachtung dieser Art wäre aber soviel wie nichtssagend; aber jedem Beobachter ist das wiederholt auftretende sogen. Kleben des Sterns am Mondrande bekannt: der Stern braucht eine wenn auch unmessbare kurze, so doch immerhin angebbare Zeit zum Verschwinden.

Bezüglich der Schärfe der Schattengrenze muss bemerkt werden, dass allerdings die Uebergänge von Hell und Dunkel äusserst scharf und intensiv sind, dass aber die Unregelmässigkeiten der Schattengrenze, welche von den Mondgebirgen herrührt, doch immerhin nicht zu unterschätzende Unsicherheiten in der Abschätzung dieser Verhältnisse herbeiführen. So haben z. B. Beer und Mädler zuweilen eine schwache Aenderung der Farbe, nämlich einen bläulichen Schimmer beobachtet, wenn ein Ringgebirge beleuchtet zu werden anfing[1]).

Aus den Messungen der Mondhalbmesser durch die Sternbedeckungen und auf direktem Wege ergiebt sich wohl auch ein Unterschied, aber ein äusserst kleiner, so dass Bessel den Schluss zog, dass der Mond keine Atmosphäre besitzen kann, deren Dichte $\frac{1}{900}$ derjenigen unserer Atmosphäre übersteigt. Und wenn man die Messungen dieser Durchmesser selbst in Folge von systematischen oder zufälligen Beobachtungsfehlern als mit gewissen Unsicherheiten behaftet ansieht, so könnte man nur zu dem Schlusse berechtigt sein, dass die Mondatmosphäre, wenn eine solche vorhanden wäre, jedenfalls eine viel zu geringe Dichte habe, als dass sie sich durch die Refractions- oder Extinctionsphänomene offenbaren könnte.

Hiermit erscheint auch eine zweite Frage unmittelbar gelöst, die Frage, ob auf dem Monde Wasser vorhanden wäre. Wäre dieses der Fall, so müssten sich nothwendig Wasserdämpfe entwickeln, die die Rolle einer Atmosphäre spielen, und sich zum mindesten durch Wolkenbildungen verraten würden. Dieses scheint nun ebenfalls nicht der Fall zu sein. Auch Polarflecke, wie dieselben beim Vorhandensein von Wasser in der Gegend der Pole auftreten müssten, sind nicht constatirt worden. Und hiermit erscheint auch über einen weiteren Punkt, wenigstens bis zu einem gewissen Grade, Klarheit gebracht: dass nämlich die Rillen keine Flüsse sein können. Dass aber überhaupt keine Atmosphäre vorhanden wäre, ist andererseits wieder nicht anzunehmen, da ja bekanntermaassen alle Körper, auch die festen, eine gewisse Tension der Dämpfe haben, welche von dem äusseren Drucke abhängt, und durch diese Dampfbildung sich eine Atmosphäre, wenn auch von äusserst geringer Dichte, bilden muss.

Es erübrigt noch das wichtigste über die Messung der Berghöhen auf dem Monde und über die erhaltenen Resultate anzuführen.

Zur Bestimmung der Höhen der Mondberge kann man drei verschiedene Methoden anwenden. Die eine, die Messung der Erhebungen über den Mondrand, ist nur für Randgebirge anwendbar; eine zweite, die Messung des Abstandes eines in der Nachtseite liegenden hellen Punktes von der Schattengrenze, wurde zuerst von Galilei[2]) und später von Hevel angewendet; die sicherste und allgemein anwendbarste Methode ist die der Messung der Schattenlängen, welche von Schröter eingeführt wurde, der auch die hierfür nöthigen Formeln gab, und welche später allgemein angewendet wurde.

Die Länge des Mondschattens hängt natürlich von drei Momenten ab: von der Lage des Berges gegen die Schattengrenze, von der Lage dieser Schatten-

---

[1]) l. c., pag. 153.

[2]) Ueber diese wurde das Nöthige bereits im I. Bde., pag. 75 mitgetheilt, weshalb hier auf dieselbe nicht näher eingegangen zu werden braucht.

grenze selbst (Phase) und von der Höhe des Berges. Die Grösse der Phase ist bestimmt, wenn man die Lage der Schattengrenze gegen den durch die beiden Mondhörner gehenden grössten Kreis (Hörnerlinie), welcher die Mondscheibe halbirt, kennt.

Ist S (Fig. 360) die Sonne, M der Mond, E die Erde, diese in einer zur Zeichnungsfläche senkrechten Ebene gedacht[1]), so ist HkH_1 die Schattengrenze des Mondes. Auf einer um E als Mittelpunkt beschriebenen Kugel von beliebigem Radius wird sich die Hörnerlinie HhH_1 als ein durch den Mondmittelpunkt M gehender grösster Kreis $(M)(H)$ darstellen; die Ebene EMS schneidet diese Kugel in dem grössten Kreise $(M)(S)$ und es muss $(M)(H)$ auf $(M)(S)$ senkrecht stehen; der Abstand $MES = (M)E(S)$ bestimmt die Phase. Sind ☾, β Länge und Breite des Mondes, ☉ die Länge der Sonne, so erhält man, wenn $(S)m$ ein Stück der Ekliptik ist, aus dem Dreiecke $(S)(M)m$, in welchem $(S)m =$ ☾ $-$ ☉, $(M)m = \beta$ ist, den Winkel $(S)(M) = E$:

$$\cos E = \cos\beta \cos(☾ - ☉). \tag{1}$$

Man erhält dann in dem ebenen Dreiecke MES, in welchem die Seiten ME, ES und der eingeschlossene Winkel E bekannt sind:

$$\frac{\sin S}{\sin M} = \frac{\sin(M+E)}{\sin M} = \cos E + \operatorname{cotang} M \sin E = \frac{EM}{ES} = a$$

und daraus

[1]) Der Mond ist dabei wesentlich vergrössert.

$$cotang\, M = \frac{\alpha - \cos E}{\sin E}.$$

Nun steht die Ebene der Schattengrenze senkrecht auf der Richtung SM; es ist daher $kM \perp MS$, wenn kM der Schnitt der Ebene HkH_1 mit der Ebene MES ist. Bezeichnet man daher den Winkel kME mit ϑ, so ist

$$\vartheta = 90^\circ - M,$$

folglich

$$tang\, \vartheta = \frac{\alpha - \cos E}{\sin E}. \qquad (2)$$

Dabei ist α das Verhältniss der Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde; führt man statt dessen die Parallaxen ein, und ist $\pi_☾$ die Mondparallaxe, $\pi_\odot$ die Sonnenparallaxe, so wird

$$\alpha = \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}. \qquad (3)$$

Da $\sin E$ beständig positiv ist, weil E zwischen den Grenzen 0 und 180° eingeschlossen ist, so folgt aus (2) ϑ positiv oder negativ, je nachdem $\cos E \lesseqgtr \alpha$ ist, oder da α eine sehr kleine Grösse ist (sehr nahe $\frac{1}{400}$) je nachdem $E \gtreqless 90°$ ist[1]; es wird daher die Formel (2) ϑ positiv ergeben für den zu beiden Seiten des Vollmondes gelegenen halben Monat (zwischen erstem und letztem Viertel), d. i. wenn der Mond mehr als halb erleuchtet ist, und negativ für den zu beiden Seiten des Neumondes gelegenen (zwischen letztem und erstem Viertel), wenn der Mond weniger als halb erleuchtet ist.

Hiermit ist die Lage der Schattengrenze gegen die Hörnerlinie festgelegt.

Für das weitere wird es nöthig, die einzelnen Punkte auf der Mondoberfläche in irgend einer Weise festzulegen. Da es sich hierbei nur um die Bestimmung der Höhen handelt, so wird die Art der Festlegung eigentlich ganz willkürlich, und es erscheint am zweckmässigsten, alle Punkte auf eine Fundamentalebene zu beziehen, welche durch den Mondmittelpunkt senkrecht zur Hörnerlinie HH_1 liegt, d. i. auf den Beleuchtungsäquator khp. Der Punkt P ist bestimmt, wenn sein Abstand PQ von der Schattengrenze und sein Abstand Pp vom Beleuchtungsäquator bekannt ist; dann wird die Höhe aus der Schattenlänge PR bestimmt.

Die Abstände PQ, Pp werden nun geocentrisch bestimmt; die durch EP parallel zu MS gelegte Ebene wird die Himmelskugel in einem grössten Kreise schneiden, während die aus E genommene Centralprojection des Parallelkreises PQ kein grösster Kreis ist; da jedoch der von der Erde aus gesehene Halbmesser des Mondes nur etwa $\frac{1}{4}°$ beträgt, so wird man diese beiden sphärischen Linien als zusammenfallend ansehen können und daher PQ als den Schnitt der durch EP parallel zu MS gelegten Ebene mit dem Mond betrachten können. Der hieraus entspringende Fehler ist um so weniger von Belang, als die zu diesem Behufe anzustellenden Messungen in Folge mancherlei Umstände, insbesondere in Folge der Unregelmässigkeit der Schattengrenze mit weit grösseren Fehlern behaftet sind.

Zunächst ist zu bemerken, dass der Winkel $hHk = \vartheta$ ist.

Ist nun der Punkt P festgelegt durch seinen Abstand $PQ = \Lambda$ von der Schattengrenze und $Pp = \mathrm{H}$ von dem Beleuchtungsäquator, u. z. als geocentrische Winkel (PEQ, PEp), so wird man zweckmässig diese Winkel in Theilen des

---

[1] Die kleine Abweichung rührt davon her, dass für die Dichotomie EM nicht senkrecht steht zu ES.

Mondhalbmessers ausdrücken, indem man durch den Werth P des Mondhalbmessers, in Secunden, dividirt, und es sei:

$$\frac{\Lambda}{P} = \lambda; \quad \frac{H}{P} = \eta.$$

Ist δ die selenocentrische, auf den Beleuchtungsäquator bezogene Breite des Punktes P, also $\delta = PMp$, so wird, wenn ρ der lineare Mondhalbmesser, und r die Entfernung des Mondes von der Erde ist:

$$MP \sin\delta = EP \sin H$$

daher

$$\sin\delta = \frac{EP}{MP} \sin H.$$

Hier kann man, ohne mehr als bereits erwähnt, zu vernachlässigen, für EP die Entfernung r ersetzen, und erhält dann, $\sin H$ mit H vertauschend:

$$\sin\delta = \frac{r}{\rho} H$$

oder da $\frac{\rho}{r} = P$ der scheinbare Mondhalbmesser ist:

$$\sin\delta = \eta. \tag{4}$$

Projicirt man den Bogen QP auf eine zu EM senkrechte Ebene, so findet sich, da der Halbmesser des Paralleles PQ in Einheiten des Mondhalbmessers gleich $\cos\delta$ ist:

$$\lambda = \cos\delta \sin\varepsilon + \cos\delta \sin\vartheta,$$

wobei ϑ in dem bereits früher angeführten Sinne positiv zu zählen ist. Hieraus erhält man für den Abstand des beobachteten Objektes P von der Hörnerlinie

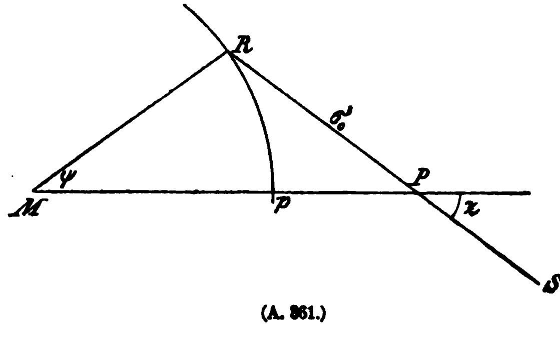
$$\sin\varepsilon = \lambda \sec\delta - \sin\vartheta. \tag{5}$$

Dabei ist ε positiv in der Richtung gegen den hellen Mondrand zu, also in der Richtung, in welcher die Abstände QP gemessen werden; in demselben Sinne ist nun auch ϑ, von der Lichtgrenze aus gezählt, positiv, so dass jetzt ganz allgemein die sämmtlichen Winkel von der Lichtgrenze aus gegen den hellen Mondrand zu positiv sind.

Die Neigung der Lichtstrahlen $P(S)$ gegen die Tangentialebene in P giebt die absolute Höhe der Sonne über dem Horizont von P, daher ist der Winkel zwischen dem Lichtstrahl $P(S)$ und dem Radius MP des Punktes P, d. i. der Winkel PMi die Zenithdistanz z der Sonnenstrahlen. Aus dem sphärischen Dreiecke PHi, in welchem $PH = 90° - \delta$, $Hi = 90°$, $PHi = 90° - (\vartheta + \varepsilon)$ (weil $kHi = 90°$ ist), folgt die gesuchte Zenithdistanz z aus der Gleichung

$$\cos z = \cos\delta \sin(\vartheta + \varepsilon). \tag{6}$$

Weiters ist zu beachten, dass man niemals die wahre Schattenlänge findet, sondern nur den Abstand des Schattenendes von der Spitze des schattenwerfenden Objectes. Sei nämlich M (Fig. 361) der Mondmittelpunkt, P die Spitze des Berges, p deren Projection auf die Mondoberfläche, SP die Richtung der Lichtstrahlen, daher R der Schatten der Bergspitze, so ist die wahre Schattenlänge Rp; wo immer nun aber die Erde sich befindet, kann man den Punkt p nicht sehen, sondern man bestimmt die Entfernung $PR = \sigma_0$. Allein diese Linie wird von der Erde



(A. 361.)

nicht normal gesehen, sondern sie hat gegen die Sehstrahlen eine gewisse Neigung; man kann für diese ohne merklichen Fehler statt des Sehstrahles EP (Fig. 360) den der Mitte der Mondoberfläche entsprechenden Sehstrahl EM setzen, und hat dann als Neigung der Linie PR (Fig. 361) gegen den Sehstrahl den bereits bestimmten Winkel M. Ist daher Σ die gemessene Entfernung in Bogensecunden

$$\frac{\Sigma}{P} = \sigma$$

die gemessene Entfernung in Theilen des Mondhalbmessers, so ist die wahre Länge

$$PR = \sigma_0 = \frac{\sigma}{\sin M} = \frac{\sigma}{\cos \vartheta}.$$

Weiter ist MPR (Fig. 361) gleich z, die Zenithdistanz der Sonne an der Spitze des Berges, folglich erhält man den zu σ_0 gehörigen selenocentrischen Winkel ψ aus

$$\sin \psi = \frac{\sigma_0 \sin z}{MR}$$

und

$$MP = \frac{\sin (z + \psi)}{\sin z} MR$$

$$pP = h = MP - MR$$

oder da als Einheit von σ der Mondradius MR gewählt ist:

$$\sin \psi = \frac{\sigma \sin z}{\cos \vartheta} \tag{7}$$

$$h = \frac{\sin (z + \psi)}{\sin z} - 1. \tag{8}$$

Die erhaltenen Formeln lassen sich noch in manchen Punkten etwas vereinfachen; so wird man in den meisten Fällen damit ausreichen, dass man auf die Veränderlichkeit der Mondparallaxe nicht Rücksicht nimmt, und demgemäss für α eine Constante nimmt. Ist $\pi_{\odot} = 8''{\cdot}815$, $\pi_{☾} = 3522''{\cdot}06$, so kann ausreichend genau

$$\alpha = 0{\cdot}00250$$

angenommen werden.

Eine andere Vereinfachung ergiebt sich aus der Zusammenziehung der Formeln (5) und (6); entwickelt man die Formel (6) und setzt (5) ein, so erhält man noch

$$\cos z = \lambda \cos \vartheta + \cos \delta \sin \vartheta (\cos \varepsilon - \cos \vartheta)$$

und hier verschwindet das zweite Glied, und z wird von δ unabhängig, wenn entweder ε und ϑ sehr klein, oder beide nahe gleich sind, d. h. für Bergspitzen, welche gegenüber der Hörnerlinie nahe symmetrisch zur Schattengrenze liegen.

Im allgemeinen wird man von diesen Vereinfachungen jedoch keinen Gebrauch zu machen in der Lage sein; hingegen muss in Formel (8) noch darauf hingewiesen werden, dass wegen der Kleinheit der Schattenlängen ψ immer nur ein mässiger Winkel sein wird, und die Höhen h sich dann in dieser Form nicht mit der genügenden Schärfe ergeben werden. Man erhält aber leicht

$$h = \cos \psi + \cot z \sin \psi - 1$$

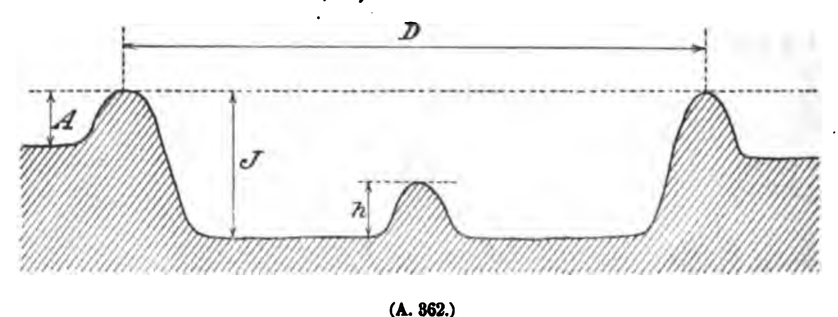
oder

$$h = \frac{\sigma \cos z}{\cos \vartheta} - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi. \tag{8a}$$

welche Formel für alle Fälle ausreichen wird.

Um über die Resultate der Messungen ein klares Bild zu bekommen, genügt es nicht, die Höhen an und für sich zu betrachten; diese sind selbstverständlich sehr wechselnd; einiges wurde bereits nach den Messungen von MÄDLER früher angeführt. Die Höhen steigen etwa bis 7000 *m*, also ungefähr zur Höhe der Erdgebirge, doch ist die relative Höhe bedeutender, da ja der Mondhalbmesser nur etwa $\frac{1}{4}$ des Erdhalbmessers beträgt. Bei der grossen Schwierigkeit der Messung kann es natürlich nicht Wunder nehmen, dass die Uebereinstimmung der Resultate verschiedener Messungen oft eine nur mässige ist. Wichtig aber sind die Aufschlüsse, die man aus der Vergleichung der Höhenmessungen mit der allgemeinen Configuration der Mondgebirge erhält.

Eine sehr bemerkenswerthe Zusammenstellung gab EBERT[1]); er verglich für 92 typische Wallebenen, Ringgebirge und Krater die Dimensionen u. zwar: 1. den Durchmesser D der Wallebene; 2) die Höhe A des Walles über dem äussern



(A. 362.)

Niveau (vergl. Fig. 362); 3) die Höhe I des Walles über dem innern Niveau; und 4) die Höhe h des Centralberges über dem innern Niveau.

Eine statistische Zusammenstellung über die einzelnen Werthe der A, I, h und D zu geben, würde gemäss der geringen Anzahl der angeführten Mondgegenden selbstverständlich werthlos sein; hingegen geben die gegenseitigen Vergleichungen der Werthe dieser Grössen sehr interessante Resultate, welche im folgenden kurz hervorgehoben werden sollen.

1) Bei allen Ringgebirgen (unter denen jetzt Kürze halber auch die Wallebenen und Krater verstanden werden sollen) ist $I > A$, d. h. das innere Niveau liegt stets unter dem äusseren Niveau. Unter denen 92 untersuchten Objekten ist das Verhältniss

$\frac{J}{A}$ zwischen	1	2	3	4 und darüber:
	34	34	16	8 mal.

Das Verhältniss ist am kleinsten, nämlich 1·015 für Hansteen, bei welchem $I = 0{\cdot}863$ *km*, $A = 0{\cdot}850$ *km* ist; hier ist also das innere Niveau nahe in derselben Höhe wie das äussere; es ist dieses auch absolut die geringste Niveaudifferenz; sie beträgt nur 13 *m*, während unter den verglichenen Objekten diesem am nächsten kommen: Anaxagoras mit 217 *m* und Cichus mit 271 *m* Niveau-Differenz, deren Wälle aber auch absolut genommen bedeutende Höhen (über 2 *km*) erreichen. Das Verhältniss ist am grössten, nämlich 4·735 für die grosse Wallebene Scheiner, bei welcher die Erhebung des Walles über das äussere Niveau nicht besonders bedeutend: $A = 766$ *m* ist, hingegen die Tiefe sehr beträchtlich: $I = 3627$ *m*; es ist dieses übrigens auch die zweitgrösste, in der

[1]) »Ueber die Ringgebirge des Mondes« Sitzungsberichte der physik.-med. Societät Erlangen. 1890, pag. 171 ff.

Tabelle auftretende Niveaudifferenz; dieselbe ist nur noch grösser bei Maurolycus, für welchen $A = 1446\ m$, $I = 4477\ m$ ist.

2) Bei allen Ringgebirgen ist I bedeutend kleiner als D. Das Verhältniss $\frac{D}{I}$ ist zwischen 0 5 10 15 20 25 30 40 50 und darüber:

$\frac{D}{I}$ ist zwischen	0	5	10	15	20	25	30	40	50 und darüber:
für	0	9	20	20	16	8	10	5	4 Objecte.

Die kleinsten Werthe sind:

7·0	bei Thebit A,	dessen	Durchmesser	24·0 km	ist
7·1	„ Phytheas,	„	„	18·5 „	„
7·2	„ Messier (östl. Krater),	„	„	14·8 „	„
7·8	„ Flamsteed,	„	„	14·8 „	„
8·2	„ Diophantus,	„	„	19·6 „	„
8·5	„ Argelander C,	„	„	26·0 „	„
9·2	„ Picard A,	„	„	19·0 „	„
9·4	„ Clavius D,	„	„	27·0 „	„
9·5	„ Luther,	„	„	14·0 „	„

Die grössten Werthe des Verhältnisses sind:

50·9	bei Hansteen,	dessen	Durchmesser	50·8 km	ist
58·7	„ Taruntius,	„	„	70·5 „	„
70·1	„ Alphonsus	„	„	133·6 „	„
71·0	„ Schikard	„	„	215·0 „	„

Selbstverständlich kommen die kleinen Werthe von $\frac{D}{J}$ bei den kleinen Ringgebirgen vor; Krater von 14 km Durchmesser oder darunter, sind nur noch die folgenden beiden angeführt:

Euler B mit dem Durchmesser 12 km und dem Verhältnisse $\frac{D}{J} = 13·6$
Milichius „ „ „ 12 „ „ „ „ 12·6

also ebenfalls mit relativ kleinen Werthen von $\frac{D}{I}$. Ebenso treten die grossen Werthe von $\frac{D}{I}$ bei den grossen Wallebenen auf. Das Verhältniss $\frac{D}{I}$ ist im Mittel:

für kleine Ringgebirge	$D < 28\ km$	$: D : I = 10$
„ mittlere „	$28\ km < D < 90\ km$:	$= 20$
„ grosse „	$90\ km < D < 120\ km$	32
„ Wallebenen	$120\ km < D$	40[1])

Doch kommen auch grosse Wallebenen mit verhältnissmässig kleinen Werthen von $\frac{D}{I}$ vor, bei denen eben I ziemlich gross ist. Die Form der Wallebenen ist aber ausnahmslos von tiefen Einsenkungen oder Löchern verschieden, und nähert sich unter allen Umständen der Tellerform, wie aus Fig. 362 zu entnehmen ist.

3) Eine weitere Charakteristik des Ringgebirges erhält man durch Vergleichung des Volumens V der Einsenkung und v des Walles. Bei einfachen Massenumwälzungen müsste das Volumen der Einsenkung gleich demjenigen der Erhebung sein, also $\frac{V}{v} = K = 1$, oder $\varepsilon = 1 - K = 0$; dieses ist nun aber auf dem Monde

[1]) Ebert, l. c. pag. 185.

durchaus nicht die Regel; es kommen sowohl positive wie negative ε vor. Ein positives ε bedeutet, dass die Erhebung überwiegt; solche Fälle sind in der EBERT'schen Tabelle 28; ein negatives ε hingegen bedeutet, dass die Einsenkung überwiegt; solche Fälle sind 64; die Einsenkungen überwiegen daher ziemlich bedeutend.

4) Die Höhe h ist nur für 19 von den 92 Mondgebirgen angegeben; sie bleibt stets so klein, dass die Kuppe des Centralberges meist das äussere Niveau noch nicht erreicht; es ist

	$I-(A+h)$		$I-(A+h)$		$I-(A+h)$
für Geminus	$+1875\,m$	für Langrenus	$+589\,m$	für Tycho	$-\;4\,m$
Maurolycus	1840	Werner	585	Cyrillus	$-\;88$
Copernicus	1660	Stevinus	325	Arzachel	$-\;231$
Theophilus	1267	Cleomedes	260	Walter	$-\;713$
Bullialdus	808	Piccolomini	206	Alphonsus	$-\;782$
Mersenius	637	Timocharis	170	Moretus	-1594
		Agrippa	8		

im Mittel $I-(A+h) = 360\,m$, also der innere Bergkegel noch um 360 m tiefer als das äussere Niveau.

Weitere Schlüsse über die Beziehungen, in welchen die Höhen des Centralberges zu den übrigen charakteristischen Grössen der Mondgebirge stehen, wären jedenfalls verfrüht, da die Zahl der in Betracht gezogenen Objecte noch zu klein ist. Im allgemeinen stehen wir erst im Beginne der Erkenntniss der Oberflächenbeschaffenheit des Mondes, und wird erst durch eine grosse Zahl von Messungen die Zukunft hierüber Klarheit bringen. N. HERZ.

Multiplikationskreis. Setzt man voraus, dass bei der Einstellung zweier Striche des Limbus und der Alhidade oder des Nonius ein Fehler von einer gewissen Grösse im linearen Maasse durch Abweichung der Striche zu beiden Seiten möglich ist, so wird dieser Fehler im Winkelmaasse um so kleiner, je grösser der Halbmesser der Kreise ist. Um nun aber auch mit kleineren Instrumenten eine grössere Genauigkeit zu erzielen, hat BORDA das Verfahren der Multiplication oder Repetition eingeführt. Ist es nämlich möglich, das n-fache des Winkels zu bestimmen, so wird der auf die erwähnte Weise entstandene Fehler der Lesung das n-fache des Winkels treffen, und der Fehler der einfachen Winkelmessung wird demnach auf $\frac{1}{n}$ reducirt. Das Verfahren findet ausschliesslich seine Anwendung bei der Messung von Horizontalwinkeln bei den Theodolithen, zu welchem Zwecke eigene Instrumente, die Repetitions- oder Multiplikationstheodolithe construirt worden sind. Die Möglichkeit der Vervielfältigung der Messung wird dadurch erreicht, dass Limbus sowie Alhidade um eine gemeinschaftliche Axe, aber unabhängig von einander, drehbar eingerichtet werden, wodurch der nicht mit dem Fernrohr verbundene Kreis zum Multiplikationskreis wird.

Denkt man sich bei dem Universalinstrument (s. dieses) den äusseren Horizontalkreis nicht fest, sondern selbst um die verticale Axe drehbar, aber zunächst festgeklemmt, so wird die Messung des Horizontalwinkels durch zwei Einstellungen bewerkstelligt werden können; es wird zunächst auf das links gelegene Objekt pointirt, die Einstellung abgelesen, dann das Fernrohr nach dem rechts gelegenen Objekte gedreht, und neuerdings abgelesen; die Differenz der ersten und zweiten Ablesung giebt die Grösse des Winkels am Standorte. Lüftet

man aber jetzt, nachdem Limbus und Alhidade aneinander geklemmt wurden, die Klemme, welche den Limbus gegen das Stativ befestigt, und dreht das Fernrohr wieder auf das links gelegene Objekt zurück, so hat sich die gegenseitige Stellung von Limbus und Alhidade nicht geändert, es wird daher die Ablesung dieselbe sein, und die Grösse des zu messenden Winkels bestimmen, das Fernrohr jedoch wird wieder auf den Anfangspunkt des Winkels gerichtet sein. Klemmt man jetzt wieder den Limbus, lüftet die Alhidade, und dreht neuerdings nach dem rechts gelegenen Objekte, so erhält man eine dritte Lesung, und die Differenz der zweiten und dritten Lesung giebt wieder die Grösse des zu messenden Winkels. Dieses Verfahren kann beliebig oft wiederholt werden und man erhält *n* Messungen desselben Winkels an verschiedenen Stellen des Kreises; es ist aber nicht nöthig, jedesmal eine Lesung zu machen, und man erhält dann nach *n* Repetitionen durch zwei Lesungen den *n*-fachen Winkel.

Nebst der Erhöhung der Genauigkeit hat dieses Verfahren noch den Vortheil, dass sich Instrumentalfehler theilweise eliminiren. Zur Erhöhung der Genauigkeit jedoch liest man nicht blos am Anfange und Ende der *n* Repetitionen ab, sondern man macht nach jeder zweiten oder dritten Einstellung eine Lesung; die so erhaltenen Werthe müssen aber nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden. Die Anwendung der Methode selbst gehört jedoch fast ausschliesslich dem Gebiete der Geodäsie an, und muss daher die weitere Ausführung hier unterbleiben. (Man vergl. darüber z. B.: BESSEL, »Betrachtungen über die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen«, Astr. Nachr. Bd. XI, pag. 269 und Ges. Werke Bd. III, pag. 306). N. HERZ.

Niveau, Niveauprüfer. Zur Beurtheilung der Neigung von Linien oder Ebenen gegen den Horizont dient das Niveau oder die Libelle (Wasserwage). In älteren Zeiten, wo man sich wesentlich darauf beschränkte, Instrumententheile, wie Axen, Kreisebenen, horizontal zu stellen und soweit als möglich zu berichtigen, wurde sie in der Form der Kanalwage benützt, d. i. eines aus zwei durch einen horizontalen Arm verbundenen, communicirenden verticalen Schenkeln bestehenden, mit Flüssigkeit bis zu einer gewissen Höhe gefüllten Gefässes, in welchem die gleiche Höhe der Flüssigkeit in den beiden verticalen Schenkeln die horizontale Lage des horizontalen Armes und damit des unter demselben befindlichen Instrumententheiles angab. Die Erkenntniss, dass eine vollständige Constanz der Stellung des Instrumentes auf die Dauer nicht zu erhalten ist, und dass man in jedem Augenblicke die Lage der Instrumententheile prüfen, bestimmen, und die Abweichungen von der theoretisch geforderten Lage in Rechnung zu ziehen hat, brachte es mit sich, dass man auch Neigungen zu messen suchte. Die Kanalwage ist hierzu jedoch wenig geeignet, da die Höhendifferenzen in den beiden Schenkeln bei mässigen Neigungsänderungen ganz klein sind, wenn der Verbindungsarm nur kurz ist, und eine Verlängerung des horizontalen Verbindungsarms nothwendig erhebliche Fehlerquellen, in erster Linie die ungleiche Temperatur der Flüssigkeit in den beiden verticalen Schenkeln, mit sich bringt.

Schon 1730 schlug daher HADLEY die Röhrenlibelle vor: eine einfache cylindrische Röhre, die nach einer Seite etwas gekrümmt ist, so dass sie einen Theil eines vertical gestellten hohlen Ringes von sehr grossem Halbmesser bildet. Die Krümmung wird in der Praxis durch Anschleifen hergestellt, so dass man von einer »kreisförmigen« Form des Niveaus spricht. Ausserdem kommen für

die Horizontalstellung von Ebenen noch sogen. Dosenlibellen vor, deren innere Oberfläche nach einer Kugelfläche angeschliffen ist.

Das Niveau wird mit einer Flüssigkeit bis auf eine kleine Blase, die sogen. »Luftblase«, gefüllt; in der That sind es jedoch Dämpfe der leichtflüchtigen Flüssigkeit (Alkohol, Aether), von welchen diese »Luftblase« gebildet wird. Bei höherer Temperatur dehnt sich die Flüssigkeit aus, der Hohlraum wird kleiner, wobei sich durch den Druck ein Theil der Dämpfe condensirt: die Blase wird kleiner; bei niedriger Temperatur und Zusammenziehung der Flüssigkeit wird die Blase grösser, wobei ein Theil der Flüssigkeit durch den verminderten Druck sich in Dampf verwandelt. Da die verschiedene Länge der Blase, wie später erwähnt wird, nicht ohne Einfluss auf die Neigungsbestimmung ist, sind Einrichtungen getroffen, um die Länge der Blase immer constant zu erhalten; es wird an dem einen Ende des Niveaus ein Reservoir R (Fig. 363) angebracht, welches durch eine Oeffnung an der unteren Seite mit dem eigentlichen Flüssigkeitsraume communicirt. Bei der gewöhnlichen Stellung der Libelle, bei welcher die convexe Seite AB nach aufwärts gerichtet ist, werden sich die sogen. Lufträume a und O jeder für sich vergrössern, bezw. verkleinern. Wird die Blase O sehr gross, so wird die Libelle umgekehrt, so dass CD nach oben kommt, und vorsichtig so viel Alkohol- oder Aetherdampf in die Kammer entlassen und dafür Flüssigkeit eintreten gelassen, dass die Blase eine bestimmte Länge erhält. Umgekehrt wird, wenn die Blase zu kurz ist, ein Theil des Aetherdampfes aus a in den eigentlichen Libellenraum aufgenommen.

Das Niveau wurde früher zugeschmolzen; doch war das Zuschmelzen häufig von nachtheiligen Folgen für die Erhaltung der Gleichmässigkeit der Krümmung verbunden, weshalb jetzt namentlich Repsold die Seiten bei AD und BC anschleift und durch Glasplatten verschliesst, welche, nachdem das Libellenrohr mit destillirtem Wasser gereinigt und gehörig getrocknet ist, mit dickem arabischen Gummi oder mit Fischleim[1]) angekittet werden. Die Füllung der Libelle geschieht am bequemsten in folgender Art[2]): Nachdem die beiden Deckgläschen AD und BC, von denen das eine mit einer feinen Durchbohrung versehen ist, angekittet und gut angetrocknet sind, wozu immerhin 2 bis 3 Tage erforderlich sind, wird an das nicht durchbohrte Deckglas noch ein Stückchen Kalbs- oder Schweinsblase, das mit Gummi oder Fischleim bestrichen ist, angekittet, und der Rand der Thierblase an das Ende des Libellenrohres gekittet und festgebunden. Sobald dieser Verschluss getrocknet ist, wird die Libelle von der durchbohrten Scheibe aus mittels einer Injectionsspritze mit säurefreiem[3]) Aether fast ganz gefüllt. Der Aether wird dann durch Erwärmen auf ca. 36° zum schwachen Sieden gebracht, was dadurch geschehen kann, dass das Niveau längere Zeit in der warmen Hand gehalten wird, und wenn dies nicht ausreichen sollte, noch mit einem etwas wärmeren Tuche umwickelt wird, worauf er sofort zu sieden beginnt. In diesem Momente wird die Oeffnung mit einem kleinen, ebenfalls mit Gummi oder Fischleim bestrichenen Deckglase und darauf mit Kalbs- oder Schweinsblase verschlossen, trocknen gelassen und endlich der Verschluss an

---

[1]) Man verwendet dazu geschmolzenen Fischleim; das käufliche sogen. »Syndeticon« enthält stets nicht unbeträchtliche Quantitäten Säure und darf daher nicht verwendet werden.

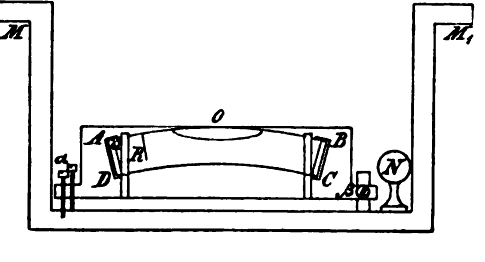
[2]) Ich entnehme das folgende Verfahren einer gütigen schriftlichen Mittheilung von Prof. Oudemans in Utrecht vom 6. November 1887, welche ich mit dessen freundlicher Bewilligung wiedergebe.

[3]) Ist man nicht vollkommen überzeugt, dass der Aether säurefrei ist, so empfiehlt es sich ihn vorher noch mit etwas Aetzkalk zu schütteln.

beiden Seiten durch einen Ueberzug von Schellackfirnis gesichert. Bei dem Operiren in feuchten Gegenden empfiehlt es sich, die Enden noch überdies durch eine dünne Kautschukmembran, welche unmittelbar über der Blase festgebunden wird, zu dichten.

Bei Verwendung von Gummi arabicum muss der Aether absolut wasserfrei sein, überdies unter allen Umständen absolut säurefrei, da sonst das Glas im Laufe der Zeit angegriffen wird und sich Körnchen ansetzen, wodurch die Blase träge wird oder leckt, an manchen Stellen nicht haften bleibt. Wiederholte Untersuchungen zeigten übrigens, dass Kaliglas von Säuren weniger angegriffen wird, und neue Versuche in dieser Richtung zur Herstellung dauerhafter Niveaus aus besseren Glassorten sind, wenigstens theilweise, von Erfolg gekrönt worden.

Das Niveau ist gewöhnlich in einer oben mit einem Glasfenster versehenen Messinghülse (Fig. 363) befestigt, und diese durch zwei Correctionsschrauben α an dem einen Ende im verticalen Sinne, und durch zwei Correctionsschrauben β an dem anderen Ende im horizontalen Sinne verschiebbar, an dem Niveauträger befestigt, welcher entweder mittels zweier Füsschen aufgesetzt oder mittels zweier Arme angehängt wird. Als Unterlage des Niveaus ist dabei die Verbindungslinie der Unterstützungspunkte, also die Linie MM_1 anzusehen, welche als Basis des Niveaus bezeichnet werden kann.



(A. 363.)

Die Blase wird nach hydrostatischen Gesetzen stets den höchsten Punkt einnehmen; der Horizontalstellung der Basis bezw. der Axe, auf welche die Libelle aufgesetzt oder angehängt wird, wird eine Stellung der Blase an einem gewissen Punkte, dem Einspielpunkte, entsprechen. Um Abweichungen der Blase vom Einspielpunkte zu messen, wird an der kreisförmig angeschliffenen Seite eine willkürliche Theilung angebracht, und man nennt die Veränderung der Neigung des Niveaus, welche der Verschiebung der Blase um einen Theilstrich entspricht, den Winkelwerth eines Scalentheiles oder kürzer den Parswerth des Niveaus[1]). Die Theilung ist dabei ganz willkürlich, ebenso auch der Ort des Nullpunktes; dieser kann in der Mitte angebracht sein; er kann an der Seite sein; nur wird in letzterem Falle der Einspielpunkt des Niveaus nicht mit dem Nullpunkte zusammenfallen können. Doch hält man selbstverständlich, um Neigungen nach beiden Seiten in gleichem Ausschlage messen zu können, den Einspielpunkt in der Nähe der Mitte der Theilung, zu welchem Zwecke die Correctionsschräubchen α dienen. Zur Kenntniss der Neigung von MM_1 ist aber die Lage des Einspielpunktes wichtig, und wenn der Nullpunkt in der Mitte angebracht ist, nennt man die Abweichung des Einspielpunktes vom Nullpunkte den »Fehler des Niveaus«.

Sei für ein Niveau E (Fig. 364) der Einspielpunkt, also die Basis bestimmt durch die Richtung MM_1 (sie kann dabei irgendwo oberhalb oder unterhalb

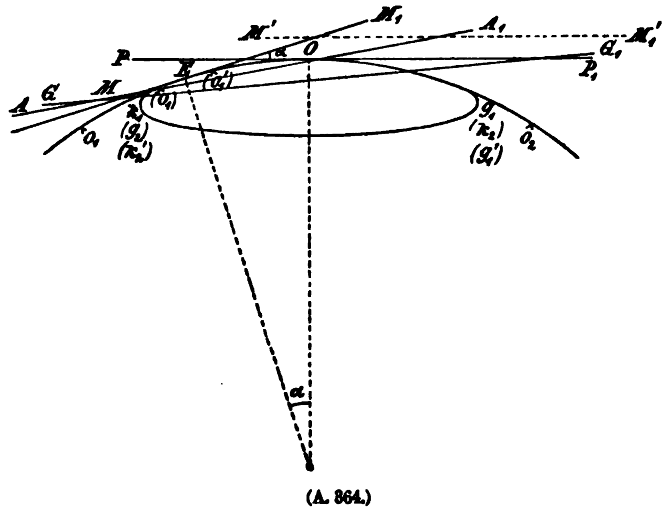
---

[1]) Die Krümmung, nach welcher feine Niveaus geschliffen sind, ist dabei, wie man leicht sieht, ausserordentlich schwach: wenn z. B. die Entfernung zweier Theilstriche 3^{mm} beträgt, und der Parswerth dabei 1'' sein soll, so entspricht dieses der Krümmung nach einem Kreise von $\frac{3^{mm}}{arc\,1''} = 618{\cdot}8$ Metern.

MM_1 liegen, je nachdem das Niveau aufgehängt oder aufgesetzt ist). Die Blase nimmt dabei diejenige Stellung ein, bei welcher die Tangente an ihrem höchsten Punkte O horizontal ist, und die Neigung von MM_1 gegen die Horizontale PP_1 ist gleich dem Winkel, den die Radien in E und O einschliessen. Ist der Nullpunkt der Theilung in o_1 auf der Seite von P gelegen, so wird die grössere Lesung g_1, die kleinere k_1 sein, und $\frac{1}{2}(g_1+k_1)$ wäre die Lesung für O, daher wenn E die Lesung für den Einspielpunkt bedeutet, die Abweichung des höchsten Punktes vom Einspielpunkte

$$[\tfrac{1}{2}(g_1 + k_1) - E]$$

und ist μ der Parswerth des Niveaus, so ist



(A. 864.)

$$\alpha = [\tfrac{1}{2}(g_1 + k_1) - E]\,\mu$$

die gesuchte Neigung. Wäre hingegen der Nullpunkt in o_2, auf der Seite von P_1, so wird die grössere Lesung g_2, die kleinere k_2, daher

$$\alpha = [E - \tfrac{1}{2}(g_2 + k_2)]\,\mu.$$

Macht man daher zunächst Lesungen bei der Stellung 1 (Nullpunkt o_1) setzt dann das Niveau um und macht die Lesungen bei der Stellung 2 (Nullpunkt o_2), so erhält man durch Combination der beiden Lesungen (Addition der beiden Gleichungen):

$$\alpha = [(g_1 + k_1) - (g_2 + k_2)]\cdot\tfrac{1}{4}\mu. \tag{1}$$

Man erhält demnach durch ein vollständiges Nivellement, welches aus den Lesungen des Niveaus in beiden Lagen desselben besteht, die Neigung unabhängig von der unbekannten Lesung im Spielpunkte. Diese selbst erhält man durch Subtraction der beiden Gleichungen:

$$E = \tfrac{1}{4}[(g_1 + k_1) + (g_2 + k_2)]. \tag{2}$$

Liegt der Nullpunkt nahe dem Spielpunkte, so wird für die eine Lage [Nullpunkt in (o_1)]:

$$\alpha = [\tfrac{1}{2}(g_1 - k_1) - E]\mu$$

und bei umgesetztem Niveau [Nullpunkt in (o_1')]:

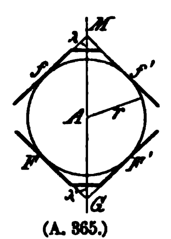
$$\alpha = [\tfrac{1}{2}(g_1' - k_1') + E]\mu$$

und daraus

$$\alpha = [(g_1 - k_1) + (g_1' - k_1')]\tfrac{1}{4}\mu; \qquad E = \tfrac{1}{4}[(g_1 - k_1) - (g_1' - k_1')].$$

Von den beiden Punkten des Niveaus (zu beiden Seiten des Nullpunktes), welche der Lesung E entsprechen, ist derjenige der Spielpunkt, welcher auf der Seite der grösseren Lesungen ($g_1 > g_1'$, $k_1 > k_1'$) liegt, wonach auch eine event. nöthig werdende Berichtigung des Niveaus leicht vorzunehmen ist. Würde man, was viel praktischer wäre, die Lesungen nach der einen Seite als positiv, die nach der anderen als negativ bezeichnen, so würden die Formeln mit (1), (2) zusammenfallen.

So einfach wird die Ausführung des Nivellements in der Praxis aber nicht. Das Niveau ruht nicht auf zwei Punkten auf der Unterlage, sondern ist mittels zweier schräg angeschliffenen Flächen f, f' (s. Fig. 365) auf cylindrischen Zapfen aufgesetzt, welche selbst wieder in ein Zapfenlager eingesenkt sind, das ebenso aus zwei schräg angeschliffenen Flächen F, F' besteht. Der mit dem Niveau fest verbundene Unterstützungspunkt der ersteren an dem einen Ende ist der Schnittpunkt M der beiden Linien f, f' (eigentlich eine kurze gerade Linie als Schnitt zweier Ebenen), während je nach der Grösse des Zapfenhalbmessers r die Entfernung des Mittelpunktes des Zapfens von M variiren wird. Diese Entfernung AM ist gleich $r\, cosec\, \lambda$, wenn 2λ der Winkel ist, unter dem sich die beiden Flächen f, f' schneiden. Es handelt sich aber nun in diesem Falle nicht darum, die Neigung der Basis MM_1 zu finden, sondern darum, die Neigung der Drehungsaxe, d. i. der Verbindungslinie AA_1 der beiden Zapfenmittelpunkte zu finden. Sind die Zapfen gleich gross, und die Winkel λ, λ', welche die Flächen f, f' und F, F' bilden und ebenso für den zweiten Zapfen die Winkel λ_1, λ_1' der Flächen $f_1 f_1'$, bezw. F_1, F_1' einander gleich, so ist sofort klar, dass die Linien MM_1, GG_1, AA_1 [1]) einander parallel sind, und die Neigung der Basis des Niveaus wird mit der Neigung der Axe und mit der Neigung der im Raume festen Zapfenlager identisch sein. Wenn aber, was in der Regel der Fall ist, die beiden Zapfen nicht gleich stark sind, so wird durch den Unterschied in der Zapfendicke eine Correction entstehen, welche man die Zapfengleichung nennt, und welche auf das Nivellement nicht ohne Einfluss bleibt.



(A. 365.)

Der Abstand AG ist gleich $r\, cosec\, \lambda'$, daher

$$MG = r\,(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda');$$

ebenso ist für den zweiten Zapfen:

$$M_1 G_1 = r_1\,(cosec\,\lambda_1 + cosec\,\lambda_1')$$

und der Werth

$$\varphi = \frac{M_1 G_1 - MG}{L\, arc\, 1''},$$

wenn $MM_1 = L$ die Länge der Basis des Niveaus ist, giebt den Winkel φ, um welchen der erhaltene Werth von α zu corrigiren ist, wenn man die Neigung der im Raume festen, mit den Zapfenlagern verbundenen Linie GG_1 bestimmen will. Es ist also diese Neigung:

$$\psi = \alpha - \frac{r_1(cosec\,\lambda_1 + cosec\,\lambda_1') - r\,(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda')}{L\, arc\, 1''}.$$

Nennt man

$$\frac{r}{L\, arc\, 1''} = \rho; \quad \frac{r_1}{L\, arc\, 1''} = \rho_1,$$

so wird daher:

$$\psi = [\tfrac{1}{2}(g_1 + k_1) - E]\mu - \rho_1\,(cosec\,\lambda_1 + cosec\,\lambda_1') + \rho(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda'). \quad (3)$$

Setzt man das Niveau um, so wird die Linie MM_1 eine andere Lage erhalten, wenn die Winkel λ, λ_1 nicht gleich sind; ungeändert bleibt hierbei aber die Lage von AA_1 und GG_1 und man erhält daher aus dem Nivellement wieder denselben Winkel ψ, also:

$$\psi = [E - \tfrac{1}{2}(g_2 + k_2)]\mu - \rho_1\,(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1') + \rho\,(cosec\,\lambda_1 + cosec\,\lambda'). \quad (4)$$

[1]) In Fig. 365 sind die auf den zweiten Zapfen bezüglichen Buchstaben M_1, G_1, A_1 (vergl. Fig. 364) hinter den entsprechenden M, G, A zu denken.

Anders wird es, wenn man das Instrument in seinen Lagern umlegt; dann sind nämlich die beiden Zapfen vertauscht. Unter der Voraussetzung, dass die Linie GG_1 fest im Raume geblieben ist, wozu also nöthig ist, dass man beim Umlegen und Einsenken der Zapfen in ihre Lager keinen einseitigen Druck ausgeübt und keine Erschütterungen der Lager hervorgerufen hat, bleibt dann ψ unverändert, und man erhält hierfür durch ein Nivellement in beiden Lagen des Niveaus:

$$\psi = [\tfrac{1}{2}(g_1' + k_1') - E]\mu - \rho\,(cosec\,\lambda_1 + cosec\,\lambda_1') + \rho_1\,(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda') \quad (5)$$
$$\psi = [E - \tfrac{1}{2}(g_2' + k_2')]\mu - \rho\,(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1') + \rho_1\,(cosec\,\lambda_1 + cosec\,\lambda'). \quad (6)$$

Zu bestimmen aber hat man nicht den Winkel ψ, sondern den Winkel, den die Axe AA_1 mit dem Horizonte macht; nennt man diesen Winkel in der Lage der Axe, welcher die Gleichungen (3), (4) entsprechen i, in der zweiten Lage (nach dem Umlegen), welcher die Gleichungen (5), (6) entsprechen, i', so wird

$$\left.\begin{aligned} i &= \psi + \rho_1\,cosec\,\lambda_1' - \rho\,cosec\,\lambda' \\ i' &= \psi + \rho\,cosec\,\lambda_1' - \rho_1\,cosec\,\lambda'. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

In der Praxis werden die Winkel λ, λ_1, λ', λ_1' einander gleich und nahe gleich 45° gemacht; die Vorschriften werden jedoch ebenso einfach, wenn λ, λ_1 von einander verschieden, und nur $\lambda' = \lambda_1'$ angenommen wird. In diesem Falle erhält man durch additive Verbindung der Gleichungen (3) und (4) und der Gleichungen (5) und (6), wenn man die durch das unmittelbare Nivellement erhaltenen Werthe

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{4}\mu[(g_1 + k_1) - (g_2 + k_2)] \\ \alpha' &= \tfrac{1}{4}\mu[(g_1' + k_1') - (g_2' + k_2')] \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

einführt, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \alpha - \tfrac{1}{4}(\rho_1 - \rho)(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1 + 2\,cosec\,\lambda') \\ \psi &= \alpha' + \tfrac{1}{4}(\rho_1 - \rho)(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1 + 2\,cosec\,\lambda'), \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

folglich $\psi = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$. Die Bestimmung von ψ hat jedoch keine Bedeutung; man erhält aber aus (9)

$$\rho_1 - \rho = \frac{\alpha - \alpha'}{cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1 + 2\,cosec\,\lambda'} \quad (10)$$

und mit Rücksicht auf $\lambda' = \lambda_1'$ aus (7):

$$\left.\begin{aligned} i &= \alpha - \tfrac{1}{4}(\rho_1 - \rho)\,(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1) \\ i' &= \alpha' + \tfrac{1}{4}(\rho_1 - \rho)\,(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

i, i' sind die wegen Zapfengleichung corrigirten Neigungen; die Zapfenungleichheit selbst wird erhalten, indem man in jeder Lage der Axe ein vollständiges Nivellement ausführt. Natürlich wird man, um sie möglichst sicher zu erhalten, wiederholt umlegen, und in jeder Lage der Axe ein vollständiges Nivellement ausführen.

Die beiden Axenenden werden durch besondere Kennzeichen unterschieden. Ist beim Meridiankreise (s. diesen) nur ein getheilter Kreis, während auf der anderen Seite ein Kreis nur zur Aequilibrirung angebracht, aber nicht getheilt ist, so nennt man das eine Ende das Kreisende; dasselbe gilt für das Passageninstrument im Meridian, und man unterscheidet dann die beiden Axenlagen als »Kreis West«, bezw. »Kreis Ost«; desgleichen beim Passageninstrument im Ersten Vertical als »Kreis Nord« und »Kreis Süd«. Sind beim Meridiankreise zwei getheilte Kreise, so unterscheidet man die beiden Lagen nach der Lage der Klemmschraube als »Klemme West« und »Klemme Ost«. Bei dem Universalinstrumente, das nur einen getheilten Verticalkreis hat, unterscheidet man je nach

der Lage des Kreises gegen den Beobachter »Kreis rechts« und »Kreis links«; doch muss man beachten, dass bei dem Universalinstrumente ein Wechsel der Kreislage durch Drehung des Horizontalkreises um 180° und Durchschlagen des Instrumentes durch das Zenith erzielt wird; für die Bestimmung der Zapfengleichung ist dieses aber nicht ausreichend, und muss für diesen Zweck der Wechsel der Kreislage durch Umlegen des Instrumentes in den Lagern vorgenommen werden.

Ist in den vorhergehenden Fällen der Kreis bei A_1, also bei dem ersten Nivellement, welchem die uncorrigirte Neigung α entspricht, auf der Seite von M_1 (Fig. 364), so ist, wenn $\rho_1 > \rho$ ist, $\alpha > \alpha'$[1]) und Formel (10) giebt den in (11) zu verwendenden Werth der Zapfengleichung sofort mit dem entsprechenden Zeichen, wobei die Neigungen positiv sind, wenn das Zapfenende A_1 mit dem Halbmesser r_1 in dieser Lage das höhere ist.

Hat man bei Beobachtungen, bei denen nicht umgelegt wird, und die nur zur Neigungsbestimmung dienen, in derjenigen Kreislage, welche Kürze halber als »Kreislage I« bezeichnet werden soll (Kreis West, Kreis links[2]), Klemme West) eine Neigung β beobachtet, oder bei anderen Beobachtungen in der Kreislage II (Kreis Ost, Kreis rechts[2]), Klemme Ost) eine Neigung β', so hat man die wahre Neigung der Achse in den beiden Fällen, wenn die Zapfengleichung bereits als bekannt angesehen wird:

$$i = \beta - \Delta; \quad i' = \beta' + \Delta, \tag{12}$$

wenn

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{(\alpha - \alpha')(cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1)}{cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1 + 2\,cosec\,\lambda'}. \tag{13}$$

Zusammengefasst werden daher die Resultate die folgenden:

1) Neigungen sind positiv, wenn das Achsenende auf der Seite I das höhere ist.

2) Die Zapfengleichung ist positiv, wenn das Nivellement bei der Kreislage I eine grössere Neigung ergiebt, als bei der Kreislage II.

3) Die Zapfengleichung ist bei der Kreislage I zu subtrahiren, bei der Kreislage II zu addiren.

Dabei ist es jetzt ganz gleichgültig, welche Seite man als die Seite I ansieht, ist dieselbe Nord, so wird II Süd, u. s. w.

Ist, wie dieses in der Regel der Fall ist, $\lambda = \lambda_1 = \lambda'$, so wird

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha'). \tag{14}$$

Der lineare Unterschied in der Dicke der Zapfen folgt aus

$$r_1 - r = (\rho_1 - \rho)\,L\,arc\,1'' = \frac{2\Delta}{cosec\,\lambda + cosec\,\lambda_1}\,L\,arc\,1'';$$

für $\lambda = \lambda_1 = 45°$ wird hieraus

$$r_1 - r = \frac{\Delta}{\sqrt{2}}\,L\,arc\,1''.$$

Ist z. B. $L = 50\,cm$, $\Delta = 1''\cdot0$, so folgt $r_1 - r = 0\cdot0017\,mm$. Hieraus ersieht man, dass äusserst kleine Ungleichheiten in den Zapfen schon beim Nivellement eine Gleichung erzeugen, die nicht zu vernachlässigen ist.

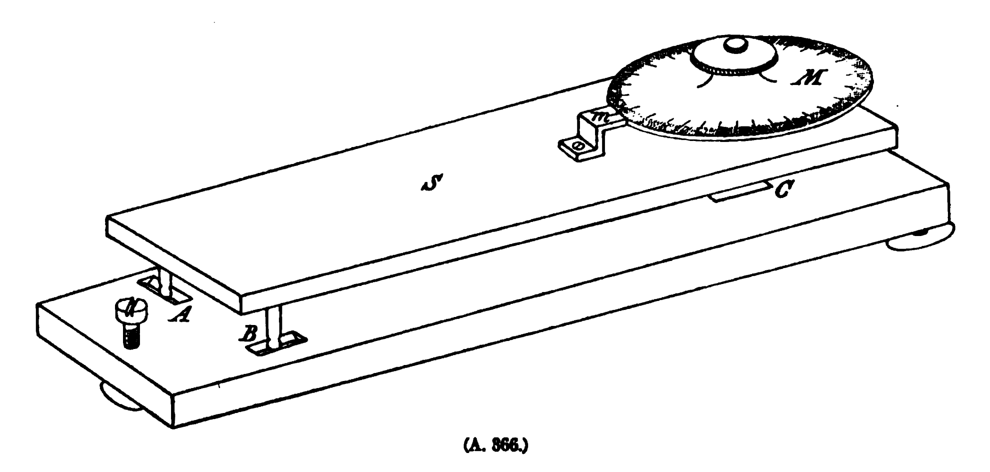
---

[1]) Da nach dem Umlegen, bei welchem die Lage von GG_1 unverändert bleibt, die Tangente im Spielpunkte die Lage $M'M_1'$ erhält.

[2]) So lange nur durchgeschlagen (nicht in den Lagern umgelegt) wird, bleibt natürlich die Correction wegen Zapfengleichung in beiden Kreislagen der Universalinstrumente dieselbe.

Für eine richtige Bestimmung der Neigung ist nothwendig, dass sich das Niveau, bezw. derjenige Medianschnitt durch dasselbe, auf welchen sich die Theilung bezieht, in derselben Verticalebene befindet, wie diejenige Linie, deren Neigung zu bestimmen ist. Eine Abweichung in dieser Richtung hat nämlich zur Folge, dass bei einer Drehung des Niveaus senkrecht zu seiner Längsachse, also um die Achse MM_1, die Blase ausweicht. Liegt z. B. die zu nivellirende Linie in der Zeichnungsfläche, und tritt das Ende β des Niveaus (Fig. 363) vor die Zeichnungsfläche, so wird bei einer Bewegung des Niveaus vor die Zeichnungsfläche das Ende β höher treten, als das Ende α und die Blase nach der Seite β ausweichen. Zur Correction dienen die Schräubchen β und muss die Correction so lange vorgenommen werden, bis bei einer Drehung des Niveaus um MM_1 keine Verschiebung der Blase eintritt. Bei sehr feinen Niveaus ist überdies ein Versicherungsniveau N senkrecht zum Niveau $\alpha\beta$ angebracht, und man hat bei der Ablesung dafür zu sorgen, dass stets dieses Hilfsniveau einspielt.

Zur Bestimmung der (uncorrigirten) Neigungen α, α', β, β' bedarf man der Grösse μ, des Parswerthes des Niveaus in Secunden. Man erhält denselben durch ein einfaches Instrument, welches, da es auch zur Prüfung des Niveaus dient, als Niveauprüfer bezeichnet wird. Es besteht aus einer langen Horizontalschiene S (Fig. 366), welche an einem Ende um eine horizontale Axe drehbar



(A. 366.)

ist, die durch zwei kugelförmige Füsschen A, B gebildet ist, die in entsprechenden Versenkungen einer Basisplatte ruhen, und deren anderes Ende durch eine Mikrometerschraube M mit getheiltem Kopfe (Schraubenmikrometer) verstellbar ist. Bei einer vollen Umdrehung, wobei der Nullpunkt der Trommel an der Marke m einspielt, wird sich die Neigung der Schiene S um einen gewissen Winkel ändern, welcher leicht dadurch bestimmt werden kann, dass man durch ein aufgesetztes Fernrohr eine entfernte Scala betrachtet. Hat man diese z. B. in der Entfernung von A Meter aufgestellt, und hat der Kreuzungspunkt der Fäden bei einer vollen Umdrehung sich um m Millimeter der Scala bewegt, so ist der Werth einer Revolution gegeben durch

$$1^R = \frac{m}{1000\,A\,arc\,1''} = \sigma.$$

Setzt man auf die Schiene das Niveau und bewegt die Schraube M so lange, bis die Blase sich um p Theile weiter bewegt hat, so wird, wenn diese Bewegung der Blase eine Drehung der Schraube von s Revolutionen erfordert,

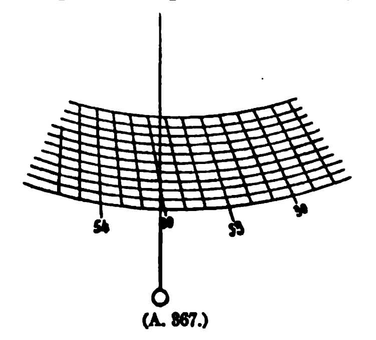
$$\mu = \frac{s\alpha}{p}.$$

Ist ein Niveau vollständig richtig, so muss die Krümmung desselben genau kreisförmig sein, und gleichen Bewegungen der Blase werden gleiche Drehungen der Schraube entsprechen. Um bei dieser Prüfung von den Fehlern der Schraube M unabhängig zu sein, ruht die Basisplatte ABC selbst wieder auf Stellschrauben, und man kann durch Verstellen dieser letzteren es leicht dahin bringen, dass das Einspielen der Libelle auf einen bestimmten Theilstrich bei verschiedenen, willkürlich zu wählenden Stellungen der Schraube (z. B. nach einer halben Revolution, auf die Theilstriche 0 und 50, wenn der Kopf der Schraube in hundert Theile getheilt ist) stattfindet.

Zu erwähnen ist noch, dass man die Prüfung des Niveaus am besten in der Fassung vornimmt, weil durch das Fassen derselben meist eine äusserst kleine, uncontrollirbare, aber nicht zu vernachlässigende Spannung entsteht, welche die Krümmung etwas ändert. Hat man die Bestimmung von μ mit und ohne Fassung vorgenommen, so wird man stets denjenigen Parswerth zu verwenden haben, welchen die Prüfung in der Fassung ergab. Auch muss die Prüfung des Niveaus, sowie auch die Bestimmung des Parswerthes bei verschiedenen Längen der Blase vorgenommen werden, eventuell die Abhängigkeit von der Blasenlänge, welche eine Folge verschiedener Krümmung ist, berücksichtigt werden.

Wenn das Niveau mit kleinen Fehlern behaftet ist, welche entweder in der Stärke der Krümmung oder auch in Fehlern der aufgetragenen Theilung ihren Grund haben können, so kann dasselbe dennoch ganz wohl verwendet werden, wenn man diese Fehler entsprechend berücksichtigt, was ohne allzu grosse Schwierigkeiten geschehen kann, indem man an jeden Theilstrich eine für denselben constante Correction anbringt[1]). N. HERZ.

Nonius, Ablesemikroskop. Die Theilungen, welche auf geradlinigen Messstäben oder auf Kreisen angebracht werden, sind durch die Kleinheit der dabei zu erreichenden Intervalle und die ausserordentliche Mehrarbeit, welche die Vermehrung der Theilstriche mit sich bringt, an eine gewisse Grenze gebunden. Man hat daher, sobald von den Beobachtungen eine grössere Genauigkeit gefordert wurde, an Mittel gedacht, ohne Vermehrung der Theilstriche die Genauigkeit der Ablesung zu erhöhen. Das einfachste Mittel waren die Transversalmassstäbe. In ihrer Anwendung auf Kreistheilungen, welche bei astronomischen Instrumenten vorzugsweise in Betracht kommen, hatte man z. B. elf concentrische Kreise, von denen der äusserste und innerste von 10′ zu 10′ getheilt waren, und bei denen nicht die in einem Radius gelegenen

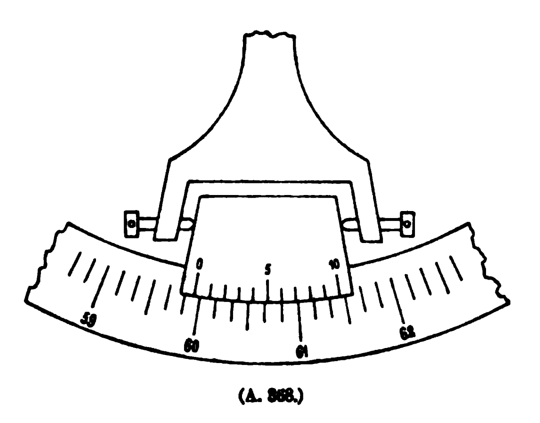


(A. 367.)

[1]) Man sehe hierüber meine »Untersuchungen über den Meridiankreis der v. KUFFNER'schen Sternwarte«, Publicationen I. Bd., pag. 48. Ueber eine Einrichtung zur Bestimmung von Neigungsänderungen ohne Niveau mittels eines in der Fernrohraxe angebrachten Linsensystems habe ich auf der 66. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Wien berichtet.

Theilstriche verbunden waren, sondern je ein Theilstrich des äusseren Kreises mit dem, dem correspondirenden des innern benachbarten. Zeigte der Index (z. B. das Loth bei einem Verticalkreise) auf den zweiten Schnittpunkt der von 30′ ausgehenden Transversale, so las man 32′ u. s. w.

Bald jedoch wurde diese Methode durch den Nonius oder Vernier verdrängt. Bei diesem trägt die Alhidade statt des Index eine kurze Theilung derart, dass n Theilstriche des Kreises in $n+1$ Theile[1]) getheilt sind. Coincidirt der Nullpunkt des Nonius mit einem Theilstriche, so ist der erste Theilstrich derselben um $\frac{1}{n}$, der zweite um $\frac{2}{n}$, u. s. w. gegen den benachbarten Theilstrich der Haupttheilung zurück; coincidirt der mit 1, 2, 3 ... bezeichnete Theilstrich, so ist der Nullpunkt um $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ ... vorgeschoben; ist also z. B. der Kreis von 10′ zu 10′ getheilt, und sind 9 Theilstriche des Kreises gleich 10 Theilen des Nonius, so wird, wenn der vierte Theilstrich des letzteren coincidirt, der Nullpunkt desselben, welcher an Stelle der einfachen Marke tritt, um $\frac{4}{10}$ des Intervalles, d. i. um 4′ vorgeschoben sein, und die Lesung wird daher gleich der Lesung des dem Nullpunkte vorangehenden Theilstriches der Kreistheilung + 4′. Coincidirt kein Theilstrich, so wird man aus der Stellung derjenigen benachbarten Theilstriche des Nonius, welche zwischen zwei Theilstrichen der Kreistheilung sich befinden, auf die Stellung des Nullpunktes schliessen. In Fig. 368 wäre, da der sechste Theilstrich schon etwas vorgerückt ist, der siebente aber noch nicht coincidirt, die Lesung 59° 56·5′.



(A. 368.)

Die Ausführung kann dabei ziemlich mannigfach sein. Man findet ältere Instrumente, bei denen der Kreis in halbe Grade getheilt ist, und 29 Theile des Kreises in 30 Theile getheilt sind, so dass man an dem Nonius, der einen Bogen von 15° umspannte, Bogenminuten ablesen konnte. Dabei waren natürlich die Theilungsfehler für die Ablesung von ausserordentlichen Einflüssen. Die feinen Theilmaschinen unserer Zeit gestatten mit Leichtigkeit selbst kleinere Kreise in Sechstelgrade zu theilen, so dass man mit zehntheiligen Nonien leicht Minuten erhalten kann.

Bei der Ablesung des Nonius hat man noch darauf zu achten, dass das Auge sich in einer auf der Kreisebene senkrechten Ebene durch den abzulesenden Theilstrich befindet; da nämlich der Arm, auf welchem die Noniustheilung angebracht ist, eine gewisse Dicke hat, welche allerdings dadurch so gering als möglich gemacht wird, dass die Fläche des Nonius gegen den Kreis zu keilförmig abgeschrägt ist (vergl. z. B. die Abbildung des Passageninstrumentes), so wird immerhin die Theilung des Nonius nicht in die Ebene derjenigen des Kreises fallen, sondern etwas über ihr liegen, und daher bei seitlicher Stellung

[1]) oder in $n-1$ Theile; doch ist diese Ausführung ungebräuchlich.

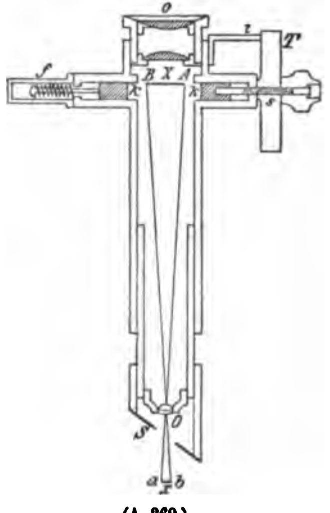
des Auges eine kleine Parallaxe entstehen. Meist wird der Nonius durch eine über demselben angebrachte Lupe gelesen, welche die Intervalle wesentlich vergrössert und dadurch die Schätzung der Coincidenz erleichtert, aber auch die Verschiedenheit der Ebenen der beiden Theilungen besonders fühlbar macht. Die Lupe muss daher, namentlich wenn der Nonius eine grössere Länge besitzt, stets sorgfältig über den abzulesenden Theilstrich gebracht werden, zu welchem Zwecke sie an einem längeren Arme drehbar ist.

Im Falle, dass einer gewissen Stellung des Intrumentes eine gewisse Lesung entsprechen soll (z. B. für die Zenitstellung eines Passageninstrumentes, Universalinstrumentes, Meridiankreises die Lesung 0) ist der Arm, an welchem der Nonius befestigt ist, etwas verstellbar (z. B. mittels schlitzförmigen Oeffnungen für die ihn befestigenden Schrauben); zur feineren Correction aber ist der Nullpunkt dadurch verstellbar, dass der Nonius an dem Arme zwischen den Spitzen zweier Correctionsschrauben (vergl. die Fig. 368) ruht, was auch den Vortheil hat, dass er wenn nöthig (z. B. behuts Reinigung oder beim Umlegen des Instrumentes u. s. w.) zurückgeschlagen werden kann.

Zur Erzielung der nöthigen Genauigkeit muss untersucht werden, ob $n + 1$ Theilstriche des Nonius wirklich gleich n Theilstrichen der Kreistheilung sind. Da diese Untersuchung ebenso wie die entsprechende Correction im wesentlichen *mutatis mutandis* mit der bei dem Ablesemikroskop erforderlichen identisch ist, so wird das folgende für diese Zwecke genügen.

Das Ablesemikroskop gewährt eine viel grössere Genauigkeit dadurch, dass das Intervall der Kreistheilung beliebig vergrössert werden kann, und die Stellung einer festen Marke gegen zwei Theilstriche des Kreises durch ein Schraubenmikrometer sehr genau bestimmt werden kann.

Das Objectiv eines Mikroskopes sei so gegen die Theilung eines Kreises gerichtet, dass die Entfernung des Objectives von der Theilung grösser als die einfache und kleiner als die doppelte Brennweite des Objectivs ist; dann giebt dieses von dem Intervalle ab (Fig. 369) jener Theilstriche des Kreises ein reelles, vergrössertes Bild AB. Ebenso entsteht von einem Indexstrich x ein Bild X, und man kann durch eine in der Ebene von AB bewegliche Marke (Fadenkreuz, ein einfacher oder Doppelfaden, der parallel zur Richtung der Theilstriche a, b, x gespannt ist), die Stellung des Bildes X gegen AB finden. Die Ordnungsnummer des Theilstriches a selbst kann unter dem Mikroskop nicht gelesen werden; da man aber bei den Winkelmessungen stets die Differenz zweier Lesungen zu nehmen hat, z. B. bei Horizontalwinkelmessungen die Differenz der Lesungen auf die beiden Objecte, bei Höhenmessungen die Differenz der Lesungen bei direkter und reflektirter Beobachtung oder bei der Beobachtung vor und nach dem Durchschlagen des Fernrohres, oder bei der Beobachtung am Meridiankreise die Lesungen für die Einstellungen auf den Stern und das Nadir u. s. w.), so wird man den Index J an einer beliebigen Stelle des Kreises anbringen können. Zu diesem Zwecke dient bei beweglichem Kreise ein in der oben beschriebenen Art verstellbarer Indexstrich, der so gestellt wird, dass er mit einem



(A. 369.)

Theilstrich des Kreises coincidirt, wenn irgend ein Theilstrich *a*, *b* mit der Marke *x*, d. h. die Bilder *A* oder *B* mit dem Bilde *X* der Marke zusammenfällt. Die Theilung ist dann ganz willkürlich, wie bei den Horizontalkreisen der Universalinstrumente, oder so, dass der Index für eine bestimmte Stellung des Instrumentes Null zeigt. Bei irgend einer beliebigen Stellung des Instrumentes werden dann die Grade und Minuten am Index gelesen, und die Abweichung der Bilder *A* und *X* giebt die Verschiebung des Theilstriches *a* gegen die Marke *x*, also auch des beim Index stehenden Theilstriches gegen den Index selbst. Die Grösse dieser Verschiebung kann durch eine Schraube *s* gemessen werden, welche z. B.[1]) den Kern *k*, auf welchem die Fäden in der Ebene *AB* aufgezogen sind, mitzieht, und ihre Mutter in der Bohrung der Trommel *T* hat, deren Stellung durch den Index *i* abgelesen werden kann. Der Kern *k* wird durch eine in dem Federgehäuse befindliche Feder nach links gezogen, und die Stellung durch den Contakt der Trommel *T* mit dem Mikrometergehäuse fixirt. Bringt man die Theilung an der Trommel so an, dass die Lesung an derselben 0 ist, wenn *X* mit *A* coincidirt, so giebt die Lesung an der Trommel sofort die Verschiebung von *A*; dann benöthigt man aber keine Marke *x*, sondern die Lesung 0 an der Trommel bei der Einstellung auf *A* zeigt sofort an, dass der Index *J* mit einem Theilstriche der Kreistheilung coincidirt, d. h. dass die Lesung am Kreise gleich derjenigen des Index $+ 0''$ wäre. Grössere Abweichungen können dadurch weggeschafft werden, dass der Kern gegen die Schraube etwas verstellbar ist; kleinere Abweichungen sind wegen Excentricität- und Theilungsfehlern, überhaupt nicht für alle Theilstriche wegzuschaffen, und werden für die Nullstellung des Instrumentes als Nullpunktscorrection (Bestimmung des Nadirpunktes u. s. w.) stets in Rechnung gebracht.

Die Eintheilung an der Trommel kann so gewählt werden, dass die Lesung oder entsprechende Combinationen von Lesungen sofort Secunden geben, wobei es selbstverständlich unnöthig ist, vor der Lesung die Mikrometerschraube auf die Lesung Null zu bringen. Ist z. B. der Kreis von zwei zu zwei Minuten getheilt, und das Intervall $AB = 2^R$ der Schraube, so wird $1^R = 1'$ und wenn die Trommel in 60 Theile getheilt ist, so giebt jeder Trommeltheil $1''$. Bei der Anwendung von vier Mikroskopen (welche auf vier, um 90° von einander entfernte Theilstriche zeigen), habe ich die Einrichtung als sehr praktisch gefunden, das Zweiminutenintervall gleich 3^R zu machen, und die Trommel in 100 Theile zu theilen. Wäre die Trommel in 10 Theile getheilt, so wären $3^R = 30^t = 2' = 120''$, demnach $1^t = 4''$; der Abstand *xa*, gemessen an der Entfernung *XA* wird demnach, wenn die Lesung *l* ist, $4l''$; an den übrigen Mikroskopen werden ebenso die Abstände $4\,l_1''$, $4l_2''$, $4l_3''$ gelesen, und das Mittel $\frac{1}{4}(4l + 4l_1 + 4\,l_2 + 4l_3) = l + l_1 + l_2 + l_3$ ist zur Lesung des Index *J* hinzuzufügen; in diesem Falle wird daher die Summe der Lesungen an den vier Mikroskopen sofort Secunden geben, und wenn die Trommeln in 100 Theile getheilt sind, kann jeder zehnte Theilstrich beziffert sein, und die Zwischenstriche geben Zehntelsecunden.

Die Beobachtung des Bildes *AB* geschieht durch ein aufgesetztets Ocular.

Das Mikroskop muss (s. auch den Artikel »Mikrometer und Mikrometermessungen«) gewisse Bedingungen erfüllen, um richtige Resultate zu geben. Zunächst muss seine Axe senkrecht auf der Kreisebene stehen, oder in einer, auf der Kreisebene senkrechten, durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden

[1]) Ueber andere Einrichtungen siehe den Artikel »Mikrometer«.

Ebene liegen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so werden die Striche von der Seite angesehen, und die geringste Veränderung in der Entfernung des Objectivs vom Kreise wird den Theilstrich scheinbar verschieben. Man kann diese Erscheinung auch zur Prüfung und Berichtigung dieser Eigenschaft verwenden: Verschiebt sich ein unter dem Mikroskop befindlicher Theilstrich bei sanftem Drucke auf den Kreis nach der Seite zu, so muss die Stellung des Mikroskops durch hierzu vorhandene Correctionsschrauben berichtigt werden. Bei sehr genauen Beobachtungen stellt man das Mikroskop überhaupt senkrecht zum Limbus, da in diesem Falle auch stets dieselben Punkte der Theilstriche unter das Mikroskop kommen, was deshalb von Wichtigkeit ist, weil dadurch ein etwa vorhandener Nichtparallelismus der Theilstriche unschädlich wird, indem die Theilungsfehler eben für die, beständig unter das Mikroskop kommenden Punkte der Theilstriche gelten. Bei älteren Universalinstrumenten findet man allerdings häufig die gegen das Centrum gerichtete Stellung, wofür aber bei neueren Instrumenten auch die senkrechte Stellung gewählt ist, wobei zur Erleichterung der Ablesung (wegen der über den Mikroskopen noch vorkommenden Instrumententheile) Ablesung durch ein Ocularprisma gewählt ist (vergl. die Abbildung des Universalinstrumentes).

Weiter muss das Bild der Theilung in der Ebene der Fäden liegen und die Entfernung der Bilder zweier Theilstriche gleich der geforderten Anzahl von Schraubenumgängen sein. Beide Bedingungen sind durch gleichzeitige Correctionen zu erfüllen. Zunächst wird das Ocular so gestellt, dass die Fäden des Mikrometers scharf erscheinen; wird dann das ganze Mikroskop so in seine an dem Stative befestigten Hülse verschoben, bis auch die Bilder der Theilstriche scharf sind, so fallen diese mit den Fäden zusammen. Eine genauere Berichtigung kann dadurch vorgenommen werden, dass man einen Faden mit einem Theilstriche zur Deckung bringt, und das Auge etwas seitlich verschiebt; findet dabei eine Verschiebung der beiden beobachteten Objecte statt (Parallaxe), so liegen dieselben nicht in derselben Ebene, und die Stellung muss weiter berichtigt werden[1]). Ist dann das Intervall zweier Theilstriche (im Bilde) nicht, wie gefordert, gleich r^R, sondern $r^R + \zeta$ (oder $r^R - \zeta$), also zu gross (bezw. zu klein), so muss die Entfernung Ox des Objectivs vom Kreise vergrössert (bezw. verkleinert), sodann aber auch die Bildebene AB dem Objective genähert (bezw. von demselben entfernt) werden. Eine vollkommene Coincidenz aber ist schwer zu erzielen; es genügt jedoch, dieselbe genähert hergestellt zu haben und den noch übrigbleibenden kleinen Fehler, welchen man den Fehler des Schraubenwerthes oder den Run nennt, in Rechnung zu bringen. Ist nämlich das Intervall zwischen zwei Theilstrichen $r^R + \zeta$ und ζ genügend klein, positiv oder negativ, so ist der wahre Werth einer Revolution gleich

$$1^R_w = 1^R \frac{r}{r+\zeta} = 1^R\left(1 - \frac{\zeta}{r}\right) = 1^R - \frac{\zeta^R}{r} = 1^R - \zeta_0^p$$

und der Wert eines Trommeltheiles

$$1^p_w = 1^p \frac{r}{r+\zeta} = 1^p\left(1 - \frac{\zeta}{r}\right).$$

Zu bemerken ist noch, dass der Werth $r + \zeta$ an einer grösseren Anzahl, über den ganzen Kreisumfang vertheilten Intervallen bestimmt wird, wodurch sowohl periodische und zufällige Theilungsfehler, als auch die als Folge einer

[1]) Diese Schlussberichtigung wird natürlich erst vorgenommen, wenn das Intervall ausreichend genau richtiggestellt ist.

nicht ganz senkrechten Stellung der Kreisebene gegen die Rotationsaxe auftretende veränderliche Entfernung der Theilstriche von dem Objectiv eliminirt wird.

Wie jede Mikrometerschraube muss auch die hier verwendete wegen periodischer Schraubenfehler untersucht werden; fortschreitende Schraubenfehler werden allerdings hier nicht von Belang, da es sich nur um 2 bis 3, höchstens 5 Schraubengänge handelt. Bezüglich der Berechnung derselben kann auf den Artikel »Mikrometer und Mikrometermessungen« verwiesen werden.

Bezüglich der Ausführung ist noch zu bemerken, dass das Ocular ein RAMSDEN-sches sein muss, da verschiedene Beobachter das Ocular gegen die Fäden verstellen müssen, dabei aber die Lage der Fadenebene unverrückt bleiben muss. Die Einrichtung des Mikrometers (Fadenplatte, Schlittenführung, Vermeidung des toten Ganges u. s. w.) ist genau dieselbe, wie bei den an anderen Stellen beschriebenen Fadenmikrometern. Die bei den Meridiankreisen übliche Beleuchtung der Kreistheilungen wurde beim Meridiankreise besprochen. Bei Theodolithen, Universalinstrumenten u. s. w. sind an dem Objectivende Illuminatoren angebracht, d. h. drehbare cylindrische, schief abgeschnittene Stutzen *S*, welche durch versilberte oder mit weissem Papier belegte Flächen gedeckt sind, die nur eine kleine Oeffnung für die in das Objectiv zu werfenden Lichtstrahlen haben, und das Licht durch passende Drehung von einer seitlichen Lichtquelle (zerstreutes Tageslicht, Lampenlicht) auf die Kreistheilung zu werfen gestatten. N. HERZ.

Nutation. Die periodischen Aenderungen in der Lage des Frühlungspunktes und der Schiefe der Ekliptik, welche man mit dem Namen der Nutation zusammenfasst, wurden in dem Artikel »Mechanik des Himmels«, § 98, nach v. OPPOLZER wie folgt angegeben[1]):

Nutation in Länge:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = &- 17''\cdot274 \sin ☊ + 0''\cdot209 \sin 2☊ + 0''\cdot015 \sin (☾ - 2\odot + 2\omega - 2\omega_1) + \\ &+ 0''\cdot068 \sin ☾ + 0''\cdot011 \sin (☾ + 2\omega + 2☊) \\ &- 0''\cdot204 \sin (2☾ + 2\omega + 2☊) - 0''\cdot026 \sin (3☾ + 2\omega + 2☊) - \\ &- 0''\cdot034 \sin (2☾ + 2\omega + ☊) + 0''\cdot012 \sin (2\odot + 2\omega_1 + ☊) \\ &+ 0''\cdot127 \sin \odot - 1''\cdot263 \sin (2\odot + 2\omega_1 + 2☊) - \\ &- 0''\cdot049 \sin (3\odot + 2\omega_1 + 2☊) + 0''\cdot021 \sin (\odot + 2\omega_1 + 2☊)\end{aligned}$$

Nutation in Schiefe: (1)

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon = &+ 9''\cdot236 \cos ☊ - 0''\cdot090 \cos 2☊ + 0''\cdot089 \cos (2☾ + 2\omega + 2☊) + \\ &+ 0''\cdot011 \cos (3☾ + 2\omega + 2☊) + 0''\cdot018 \cos (2☾ + 2\omega + ☊) \\ &+ 0''\cdot548 \cos (2\odot + 2\omega_1 + 2☊) + 0''\cdot021 \cos (3\odot + 2\omega_1 + 2☊)\end{aligned}$$

Die Nutation ändert daher die Breite der Himmelskörper nicht, sondern nur die Länge, und es wird die wahre Länge einfach erhalten, indem man die mittlere Länge des Himmelskörpers um die Nutation vermehrt[2]).

[1]) Da die Seculargheder der Nutation hier weggelassen wurden, die rein periodischen Glieder aber beim Uebergang auf die wahre Ekliptik keine Aenderung erfahren (s. den Artikel »Präcession«), so bleiben die dort angeschriebenen Glieder unverändert.

[2]) Für irgend einen Moment, für welchen die Länge des Mondknotens ☊ ist, weicht der wahre Pol des Aequators von dem mittleren in einer durch den Winkel $\Delta\lambda$ bestimmten Richtung um $\Delta\varepsilon$ ab; bezieht man daher den wahren Ort des Aequatorpoles auf ein durch den mittleren Ort desselben gelegtes, rechtwinkliges Axensystem, so sind $x = \Delta\varepsilon$, und $y = \sin \varepsilon \Delta\lambda$ die recht-

Die Berechnung der obigen Ausdrücke ist aber ziemlich zeitraubend, kann aber leicht durch Tafeln[1]) wesentlich vereinfacht werden. Auch hier ist jedoch die wichtigere Aufgabe, die Bestimmung des Einflusses der Nutation auf die Rectascension und Declination, welche jetzt stets die der Beobachtung direkt entnommenen, und allen Untersuchungen zu Grunde gelegten Daten sind. Man gelangt leicht zu diesen Beziehungen, wenn man von den Formeln, welche den Uebergang von Länge und Breite auf Rectascension und Deklination vermitteln (vergl. den Artikel »Coordinaten«, I. Band, pag. 663) ausgeht, und in denselben die Länge und Breite als veränderlich ansieht. Die im I. Band, pag. 668 unten angegebenen Formeln sind unmittelbar anwendbar, wenn man für dl den Werth der Nutation in Länge, für $d\varepsilon$ den Werth der Nutation in Schiefe, und $db = 0$ setzt. Man erhält dann leicht, wenn man den parallaktischen Winkel η eliminirt:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \cos\varepsilon\Delta\lambda + (\sin\varepsilon\sin\alpha\Delta\lambda - \cos\alpha\Delta\varepsilon)\tang\delta \\ \Delta\delta &= \sin\varepsilon\cos\alpha\Delta\lambda + \sin\alpha\Delta\varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

Da man die Präcession für irgend einen Stern stets nur bis zum Jahresanfange eines gegebenen Jahres rechnet, so muss zu diesen Werthen der Nutation noch die Präcession für die Zwischenzeit τ vom Jahresanfange bis zum vorgelegten Datum hinzugefügt werden. In der Praxis werden diese beiden Reductionen stets vereinigt; die Präcession ist für das Zeitintervall τ [vergl. den Artikel »Präcession« Formeln 6 (b)]:

$$\begin{aligned} &\text{in Rectascension: } && \tau m_1 + \tau n_1 \sin\alpha \tang\delta \\ &\text{in Deklination: } && \tau n_1 \cos\alpha. \end{aligned}$$

Demnach die Gesammtreduction vom Jahresanfange auf das vorgelegte Datum:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= (\tau m_1 + \cos\varepsilon\Delta\lambda) + (\tau n_1 + \sin\varepsilon\Delta\lambda)\sin\alpha\tang\delta - \Delta\varepsilon\cos\alpha\tang\delta \\ \Delta\delta &= (\tau n_1 + \sin\varepsilon\Delta\lambda)\cos\alpha + \sin\alpha\Delta\varepsilon. \end{aligned}$$

Die Werthe τ, $\Delta\lambda$, $\Delta\varepsilon$ hängen nur von dem Datum ab; m_1, n_1, ε_1 kann man für ein Jahr als constante Grössen ansehen. Setzt man daher nach BESSEL:

$$\begin{aligned} f &= \tau m_1 + \cos\varepsilon\Delta\lambda \\ g\cos G &= \tau n_1 + \sin\varepsilon\Delta\lambda \\ g\sin G &= -\Delta\varepsilon, \end{aligned} \tag{3}$$

so wird

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= f + g\sin(G+\alpha)\tang\delta \\ \Delta\delta &= g\cos(G+\alpha). \end{aligned} \tag{3a}$$

Eine zweite Form für die Berechnung dieser Reductionen leitete BESSEL folgendermaassen ab. Setzt man:

$$\begin{aligned} \tau m_1 + \cos\varepsilon\Delta\lambda &= Am_1 + E \\ \tau n_1 + \sin\varepsilon\Delta\lambda &= An_1 \\ \Delta\varepsilon &= -B, \end{aligned}$$

---

winkligen Coordinaten des ersteren. Beschränkt man sich auf die Hauptglieder, und eliminirt ☊, so erhält man

$$\frac{x^2}{(9''\cdot 236)^2} + \frac{y^2}{(17''\cdot 274\sin\varepsilon)^2} = 1,$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist, deren Halbaxen $9''\cdot 236$ und $17''\cdot 274\sin\varepsilon$ sind. Der wahre Pol des Aequators beschreibt daher um den mittleren Pol in Folge der Nutation eine Ellipse, die sogen. »Nutationsellipse«.

[1]) s. v. OPPOLZER, l. c. pag. 569—628.

so wird, weil $\frac{m_1}{n_1}$ sehr nahe gleich *cotang* ε ist, E eine sehr kleine Grösse sein. Es ist

$$n_1 E = (n_1 \cos\varepsilon - m_1 \sin\varepsilon)\Delta\lambda,$$

sodann findet sich

$$A = \tau + \frac{\sin\varepsilon}{n_1}\Delta\lambda$$
$$B = -\Delta\varepsilon$$

und hiermit erhält man:

$$\Delta\alpha = (Am_1 + E) + (An_1 \sin\alpha \tang\delta + B\cos\alpha \tang\delta)$$
$$\Delta\delta = An_1 \cos\alpha - B\sin\alpha.$$

Setzt man daher die für jeden Stern constanten Grössen:

$$m_1 + n_1 \sin\alpha \tang\delta = a \qquad n_1\cos\alpha = a'$$
$$\cos\alpha \tang\delta = b \qquad -\sin\alpha = b', \tag{4}$$

so wird:

$$\Delta\alpha = aA + bB + E$$
$$\Delta\delta = a'A + b'B. \tag{4a}$$

Die in $\Delta\lambda$, $\Delta\varepsilon$ auftretenden Glieder haben verschiedene Perioden. Die von ☊ abhängigen Glieder sind langsam veränderlich und ebenso die von der Sonnenlänge abhängigen, die man mit diesen vereinigen kann, können daher in grösseren Intervallen tabulirt werden; die von der Mondlänge abhängigen Glieder hingegen sind wegen der raschen Bewegung des Mondes rasch veränderlich. Man nennt diese Glieder die »Mondglieder kurzer Periode«. Will man daher bei der Tabulirung der Werthe f, g, G, A, B nicht zu enge Intervalle wählen, oder soll bei etwas weiteren Intervallen die Differenz nicht zu gross werden, die höheren Differenzen nicht besonders hervortreten, so ist es besser, diese beiden Gruppen von Gliedern zu trennen; man erhält dann, indem man in (3) oder (4) $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ in zwei Theile zerfällt[1]):

$$\Delta\lambda = k_1 \sin ☊ + M_\odot + M_☾ = \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2$$
$$\Delta\varepsilon = k\cos ☊ + M'_\odot + M'_☾ = \Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2, \tag{5}$$

wenn man in $M_\odot$, $M'_\odot$ die von der Sonne abhängigen Nutationsglieder zusammenfasst, und $M_☾$, $M'_☾$ die kleineren, von der Mondlänge abhängigen Glieder bedeuten, mit denen auch bei der Tabulirung die übrigen kleinen von ☾, ω, ☊ abhängigen Glieder vereinigt werden können, wenn man in diesen ω und ☊ für die Dauer eines Jahres als constant ansieht. Die Ausdrücke k und k_1 sind nach II. Bd., pag. 591, nicht von einander unabhängig; es ist $k_1 = -2\cotang 2\varepsilon_0 \cdot k$; ist eine der beiden Grössen bekannt, so wird es auch die andere. Man bezeichnet demnach vorzugsweise k als die Nutationsconstante. Der für dieselbe hier angenommene Werth $= 9''\cdot2370$ für 1900 ist der von v. Oppolzer abgeleitete. Etwas verschieden von demselben ist der von Peters gefundene $= 9''\cdot2237$.

Zur Bestimmung dieser Constanten kann man sowohl Beobachtungen von Rectascensionen, als von Deklinationen heranziehen.

Der Einfluss der Nutation auf die Rectascension wird, wenn man die Formeln (5) heranzieht:

---

[1]) Die Grössen k_1 und k sind mit der Zeit etwas veränderlich. Es ist für $1900 + \tau$ (τ in Einheiten des julianischen Jahrhundert):

$$k_1 = -17''\cdot2828 - 0''\cdot01770\tau$$
$$k = +\ 9''\cdot2370 + 0''\cdot00092\tau.$$

$$(\alpha - \alpha_0)_0 = N_0 + N_☾ + N_⊙$$
$$(\delta - \delta_0)_0 = N_0' + N'_☾ + N'_⊙, \tag{6}$$

wobei

$$N_0 = k_1 (\cos\varepsilon \sin ☊ + \sin\varepsilon \sin ☊ \sin\alpha \tan\delta) - k \cos ☊ \cos\alpha \tan\delta$$
$$N_0' = k_1 \sin\varepsilon \sin ☊ \cos\alpha + k \cos ☊ \sin\alpha$$

und $N_☾$, $N_⊙$, $N'_☾$, $N'_⊙$ wieder die kurzperiodischen, kleinen Zusatzglieder sind. Sei nun der wahre Werth der Nutationsconstante $k(1 + \rho)$, so wird, wenn man die Aenderungen der kleinen Zusatzglieder unberücksichtigt lässt:

$$\alpha - \alpha_0 = N_0 + N_☾ + N_⊙ + N_0\rho = (\alpha - \alpha_0)_0 + N_0\rho$$
$$\delta - \delta_0 = N_0' + N'_☾ + N'_⊙ + N_0'\rho = (\delta - \delta_0)_0 + N_0'\rho.$$

Man kann ρ bestimmen, wenn Beobachtungen von Sternen, deren Rectascension und Deklination gut bekannt sind, aus der Zeit eines ganzen Umlaufes des Mondknotens vorliegen, da dann die Coëfficienten N_0, N_0' genügend verschiedene Werthe, überhaupt alle, deren sie fähig sind, annehmen. Wegen des Faktors $\tan\delta$ in N_0 erscheint dieser Coëfficient übrigens für Polsterne bedeutend vergrössert, weshalb es sich empfiehlt, für diese Bestimmungen aus Rectascensionen Beobachtungen von polnahen Sternen zu wählen. Man wird aber diese Bestimmung stets gleichzeitig mit derjenigen der Aberrationsconstanten vornehmen können. Berechnet man nämlich die Aberration und Nutation mit angenommenen, genäherten Werthen K_0, k_0 der Constanten, und sind α_0, δ_0 die berechnete Rectascension und Deklination, $\Delta\alpha_0$, $\Delta\delta_0$ die vermöge der Beobachtungen an die mittleren Orte anzubringenden Correctionen, so erhält man (vergl. den I. Bd., pag. 175):

$$\alpha' - [\alpha_0 + K_0 a \sin(A + ⊙) \sec\delta + N_0 + N_☾ + N_⊙] = n = \Delta\alpha_0 + A\Delta K + N_0\rho$$
$$\delta' - [\delta_0 + K_0 b \sin(B + ⊙) + N_0' + N_☾' + N_⊙'] = n' = \Delta\delta_0 + A'\Delta K + N_0'\rho. \tag{7}$$

Um auch die Beurtheilung eines möglichen Einflusses der jährlichen Parallaxe und der Eigenbewegung der Gestirne auf das Resultat zu ermöglichen seien u, v Correctionen, welche in den jährlichen Ortsveränderungen (Präcession + Eigenbewegung) des Sternes anzubringen sind, so dass ut, vt die Aenderungen in der seit der angenommenen Epoche verflossenen Zeit sind, wenn t in Jahren und Jahresbruchtheilen ausgedrückt wird; ferner sind die Ausdrücke für die jährliche Parallaxe

in Rectascension: $p\,[\sin ⊙ \cos\varepsilon \cos\alpha - \cos ⊙ \sin\alpha] \sec\delta = pP$

in Deklination: $p\,[\sin ⊙ (\cos\delta \sin\varepsilon - \sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon) - \cos ⊙ \cos\alpha \sin\delta] = pP'$.

Es sind daher die wegen aller Correctionen verbesserten Constanten des beobachteten Sternes

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha_0 + tu + N\rho + A\Delta K + Pp$$
$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta_0 + tv + N'\rho + A'\Delta K + P'p. \tag{8}$$

Zur Bestimmung der Constanten können in erster Linie Beobachtungen im ersten Vertical herangezogen werden.

Man erhält, wenn $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ Aenderungen der Coordinaten eines Sternes, $\Delta\zeta$, $\Delta\tau$ die denselben entsprechenden Aenderungen der Zenithdistanzen und des Stundenwinkels, und $\Delta\varphi$ die Aenderung der Polhöhe bedeuten, aus den Formeln für den ersten Vertical

$$\cos\delta\Delta\delta = \cos\varphi \cos\zeta\Delta\varphi - \sin\varphi \sin\zeta\Delta\zeta$$
$$\sec^2\varphi\Delta\varphi = \sec^2\delta \sec\tau\Delta\delta + \tan\delta \sec\tau \tan\tau\Delta\tau$$

oder

$$\Delta\varphi - \frac{\tan\varphi}{\tan\delta}\Delta\delta = \tan\varphi \tan\zeta\Delta\zeta; \qquad \Delta\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}\Delta\delta = \sin\varphi \tan\zeta\Delta\tau.$$

Da aber $\Delta\tau = \Delta\vartheta_w - \Delta\alpha$ für Stern West und $\Delta\tau = \Delta\alpha - \Delta\vartheta_o$ für Stern Ost ist, wenn $\Delta\vartheta$ die Correktion der Uhrzeit bedeutet, so erhält man statt der zweiten Gleichung

$$\Delta\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}\Delta\delta \pm \sin\varphi \tang\zeta\Delta\alpha = \pm \sin\varphi \tang\zeta\Delta\vartheta.$$

Die Correktionen $\tang\varphi \tang\zeta\Delta\zeta$ und $\pm \sin\varphi \tang\zeta\Delta\vartheta$ sind durch die Beobachtungen der Sterne gegeben[1]). Bezeichnet man die Summe der in diesen Formeln enthaltenen, von ξ, i, k, c abhängigen Glieder, zu denen eventuell noch die von den persönlichen Fehlern herrührender Glieder kommen, mit C, so hat man aus den Zenithdistanzen

$$\varphi - \psi - \frac{\tang\varphi}{\tang\delta}\Delta\delta = C$$

und aus den Durchgängen durch die Mittel- und die Seitenfäden

$$\varphi - \psi - \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}\Delta\delta \pm \sin\varphi \tang\zeta\Delta\alpha = C$$

In diesen Formeln hat man für $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ die obigen in (8) zu α_0 und δ_0 hinzutretenden Zusatzglieder zu substituiren, und erhält daher:

$$\begin{aligned} &\varphi - \psi - \frac{\tang\varphi}{\tang\delta}[\Delta\delta_0 + tv + N'\rho + A'\Delta K + P'p] = C \\ &\varphi - \psi - \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}[\Delta\delta_0 + tv + N'\rho + A'\Delta K + P'p] \pm \\ &\qquad \pm \sin\varphi \tang\zeta[\Delta\alpha_0 + tu + N\rho - A\Delta K + Pp] = C. \end{aligned} \tag{9}$$

In diesen Gleichungen ist ψ der unmittelbar durch die Beobachtungen gegebene Werth; unbekannt sind: die Polhöhe φ, welcher man jedoch für verschiedene Beobachtungsepochen verschiedene Werthe beilegen muss, ferner ρ, ΔK und die für jeden Stern einzuführenden Unbekannten $\Delta\alpha_0$, $\Delta\delta_0$, u, v, p.

Zur Bestimmung der Constanten eignen sich auch besonders Messungen von Zenithdistanzen von zenithnahen Sternen, bei denen der Einfluss einer Unsicherheit der Refractionsconstanten nicht wesentlich wird[2]). Ganz besonders aber eignet sich hierzu die Methode der Beobachtung von Sternpaaren zu beiden Seiten des Zenithes, die HORREBOW-TALCOTT'sche Methode.

Sei $\delta^{(s)}$ die Deklination eines Sternes, der südlich vom Zenith in der Zenithdistanz $\zeta^{(s)}$ culminirt; ebenso $\delta^{(n)}$, $\zeta^{(n)}$ dieselben Grössen für einen nördlich vom Zenith culminirenden Stern, so ist

$$\varphi = \delta^{(s)} + \zeta^{(s)}; \qquad \varphi = \delta^{(n)} - \zeta^{(n)}$$

und daraus

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta^{(s)} + \delta^{(n)}) + \tfrac{1}{2}(\zeta^{(s)} - \zeta^{(n)}).$$

Ist daher die Zenithdistanz der Sterne nahe gleich, so wird man mit einem Universalinstrument, durch Drehung desselben um seine Verticalachse oder mit einem Passageninstrument durch Umlegung desselben in seinen Lagern, ohne Verstellung des Fernrohres die Differenz der Zenithdistanzen messen können, wenn das Fernrohr mit einem in der Richtung der Zenithdistanzen beweglichen Mikrometerfaden versehen ist. Da jedoch das Fernrohr praktisch nicht auf zwei Punkte mit genau derselben Zenithdistanz gestellt werden kann, so muss die Stellung des Fernrohres durch eine mit demselben fest verbundene Libelle con-

---

[1]) Vergl. den Artikel »Passageninstrument«, Formeln VII und I.

[2]) Sowohl die Aberration als auch die Nutation wurden auf diese Weise von BRADLEY entdeckt.

trollirt, bezw. die Abweichung durch Berücksichtigung der Libellenneigung in Rechnung gezogen werden.

Sei m_0 die Lesung für die Coincidenz des Mikrometerfadens mit der optischen Achse (fester Faden, Mittelfaden), entsprechend der Einstellung des Fernrohres auf eine gewisse Zenithdistanz ζ_0. Sind m_s, m_n die Lesungen für die Stellung des Mikrometers auf einen anderen Punkt (für die Beobachtung im Süden bezw. Norden) und R der Werth einer Schraubenrevolution, so sind, wenn die Mikrometerlesungen für wachsende Zenithdistanzen grösser werden: $\zeta_0 + R(m_s - m_0)$, bezw. $\zeta_0 + R(m_n - m_0)$ die Zenithdistanzen derjenigen Punkte am Himmel (Sterne), welche am Mikrometerfaden erscheinen. Ist die dabei stattfindende Neigung des Niveaus i_s, bezw. i_n, positiv, wenn der äussere Endpunkt der Libelle der höhere ist (also das Nordende bei Beobachtung von Nordsternen, das Südende bei Beobachtung von Südsternen), so müsste für positive Neigungen das Fernrohr in grössere Zenithdistanzen gebracht, also der Mikrometerfaden bei der Beobachtung des Sternes etwas zurück geschraubt werden; es sind also noch an die oben angeschriebenen Zenithdistanzen die Correctionen $-i_s$ bezw. $-i_n$ anzubringen. Sind endlich r_s, r_n die Refractionen und

$$x_s = -\frac{\sin 2\delta \sin^2 \frac{1}{2} t_s}{arc\ 1''}; \qquad x_n = -\frac{\sin 2\delta \sin^2 \frac{1}{2} t_n}{arc\ 1''}$$

die Reductionen auf den Meridian, wenn der Stern im Stundenwinkel t_s, bezw. t_n beobachtet wurde[1]), so sind die wahren Zenithdistanzen der Sterne:

$$\zeta^{(s)} = \zeta_0 + R(m_s - m_0) - i_s + r_s + x_s$$
$$\zeta^{(n)} = \zeta_0 + R(m_n - m_0) - i_n + r_n + x_n,$$

demnach

$$\begin{aligned} \varphi &= \tfrac{1}{2}(\delta^{(s)} + \delta^{(n)}) + \Delta \\ \Delta &= \tfrac{1}{2}R(m_s - m_n) - \tfrac{1}{2}(i_s - i_n) + \tfrac{1}{2}(r_s - r_n) + \tfrac{1}{2}(x_s - x_n). \end{aligned} \tag{10}$$

Die einzelnen Glieder von Δ sind der Beobachtung zu entnehmen; zu den δ selbst müssen jedoch wie früher gewisse, von den Reduktionselementen abhängige Correktionen hinzugefügt werden, und es wird mit Rücksicht auf (8), wenn $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ und $\varphi_0 - \frac{1}{2}(\delta_0^{(s)} + \delta_0^{(n)}) = \Delta\varphi$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} 2\Delta\varphi = \Delta\delta_0^{(s)} + tv_s + N_s'\rho + A_s'\Delta K + P_s'p_s + \\ + \Delta\delta_0^{(n)} + tv_n + N_n'\rho + A_n'\Delta K + P_n'p_n. \end{aligned}$$

Die strenge Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate würde erfordern, dass man das gesammte Beobachtungsmaterial gleichzeitig nach allen Unbekannten auflöst. Bedenkt man, dass hierfür eigentlich $\Delta\varphi$ veränderlich ist, $\Delta\alpha_0$, $\Delta\delta_0$, u, v, p für jeden Stern andere Werthe haben, ΔK, ρ hingegen zu ihrer genauen Bestimmung Beobachtungsreihen von einem, bezw. achtzehn Jahren erfordern, so sieht man, dass diese strenge Auflösungsmethode einen ungeheuren Aufwand von Arbeit in Folge der Menge des Materials erfordert, ferner aber den grossen Nachtheil hat, dass die Resultate erst spät abgeleitet werden können. Durch eine sehr kleine Abweichung von der völligen Strenge kann jedoch beiden Uebelständen wenigstens theilweise begegnet werden, wenn man nur mit gewisser Vorsicht bei der Wahl der Sterne vorgeht. Bei einigermaassen gut bestimmten Sternen werden nämlich die Werthe u, v so klein, dass die von denselben abhängigen Beträge selbst im Laufe eines Jahres unmerklich bleiben, und ähnlich verhält es sich mit p. Nun hat man weiter zu berücksichtigen, dass die Coëffi-

[1]) Vergl. den Artikel »Polhöhenbestimmung«, wo auch über die Bestimmung von $r_s - r_n$ das Nähere zu finden ist.

cienten von $\Delta\alpha_0$, $\Delta\delta_0$ von der Zeit unabhängig und die Coëfficienfen von ρ nur sehr langsam veränderlich sind, da N_0 und N_0' von der Länge des Mondknotens abhängen, die sich in drei bis vier Monaten nur um 5 bis 6° ändert, so dass man also auch für diese Coëfficienten in erster Näherung constante Mittelwerthe annehmen kann.

Man beobachtet nun sowohl im ersten Vertical als auch nach der HÖRREBOW-TALCOTT'schen Methode immer Sterngruppen, im ersten Falle am besten nach einem passenden Schema (vergl. den Artikel »Passageninstrument«), im zweiten Falle eine Gruppe von Sternpaaren, stets so, dass die Beobachtungen der ganzen Gruppe etwa eine oder eine und eine halbe Stunde umfasst; es werden sich dann jederzeit mindestens zwei Gruppen hinter einander beobachten lassen, so dass z. B. eine Zeit lang die Gruppen A und B, dann die Gruppen B und C, später wieder C mit einer anderen Gruppe D u. s. w., endlich wieder die letzte Gruppe G mit A beobachtet werden kann.

Leitet man aus den Beobachtungen einer Gruppe $\Delta\varphi$ ab, wobei die von den $\Delta\alpha_0$, $\Delta\delta_0$, ρ und ΔK abhängigen Glieder mit den absoluten Gliedern der Gleichungen vereinigt gedacht sind, so erhält man aus dieser Gruppe

$$\Delta\varphi = m' + F'(\Delta\alpha_0', \Delta\alpha_0'' \ldots \Delta\delta_0', \Delta\delta_0'' \ldots\ldots \rho) + q'\Delta K = m' + F' + q'\Delta K,$$

wo F' eine lineare Function der darin enthaltenen Grössen bedeutet, deren Coëfficienten für eine gegebene Gruppe in ganz bestimmter Weise von den Deklinationen der Sterne und deren Zenithdistanzen im ersten Verticale abhängen, auf die es hier jedoch nicht weiter ankommt. Für eine zweite zur selben Zeit (am selben Tage) beobachtete Gruppe folgt

$$\Delta\varphi = m'' + F'' + q''\Delta K$$

und es muss daher

$$0 = m'' - m' + (F'' - F') + (q'' - q')\Delta K$$

sein. An einem anderen Tage werden die gefundenen Correctionen andere sein, aber die Werthe von F', F'' werden sich nicht geändert haben; man hat daher

$$\Delta\varphi_1 = m_1' + F' + q_1'\Delta K; \qquad \Delta\varphi_1 = m_1'' + F'' + q_1''\Delta K$$

und daher wieder

$$0 = m_1'' - m_1' + (F'' - F') + (q_1'' - q_1')\Delta K.$$

Bezeichnet man die unbekannte Differenz $F'' - F'$ mit x_{12}, die bekannten Coëfficienten $q'' - q'$, $q_1'' - q_1' \ldots$ allgemein mit q_{12} und die bekannten Grössen $m'' - m'$, $m_1'' - m_1'$ allgemein mit m_{12}, so erhält man die sämmtlichen Gleichungen für die beiden Gruppen in der Form:

$$0 = m_{12} + x_{12} + q_{12}\Delta K.$$

Für die Vergleichung der zweiten Gruppe mit einer dritten ergiebt sich ein System von Gleichungen

$$0 = m_{23} + x_{23} + q_{23}\Delta K,$$

und ähnlich für die Vergleichung der dritten mit einer vierten Gruppe u. s. w. Zu diesen Gleichungen tritt dann noch die Schlussgleichung (für μ-Gruppen):

$$0 = x_{12} + x_{23} + x_{34} + \ldots + x_{\mu 1},$$

deren Richtigkeit aus der Bedeutung der x sofort klar ist. Jedes Gruppenpaar ist natürlich wiederholt beobachtet, und aus allen Gleichungen, in denen die $\mu + 1$ Unbekannten x_{12}, $x_{23} \ldots x_{\mu 1}$ und ΔK enthalten sind, können diese ermittelt werden. Die x sind die Reductionen der Gruppen auf einander; ΔK die vorläufige Correction der Aberrationsconstante.

Setzt man die gefundenen Werthe der Unbekannten ein, so wird, von einer vorläufig willkürlichen Grösse F' abgesehen, alles bekannt, und man erhält

$$\Delta\varphi = m + F'; \quad \Delta\varphi_1 = m_1 + F'; \quad \Delta\varphi_2 = m_2 + F' \; \ldots\ldots$$

aus welchen Resultaten man die Amplitude und das Gesetz einer eventuellen Polhöhenänderung ermitteln kann.

Diese Ausgleichung erstreckt sich auf einen geschlossenen Cyclus, d. i. auf einjährige Beobachtungen. Die Ausgleichung könnte für jeden weiteren Cyclus in derselben Weise wiederholt werden; verschiedene Werthe des sich ergebenden ΔK wären nur eine Folge der Beobachtungsfehler und der nicht völlig strengen Ausgleichung; Aenderungen in den x müssen sich aber in Folge der Veränderungen der u, v, ρ ergeben.

Bei der definitiven Ausgleichung wird man nun aber leicht den Werth von ρ selbst mitbestimmen. Wollte man hierbei die einzelnen Unbekannten $\Delta\alpha_0$, $\Delta\delta_0$ u, v mitbestimmen, so wird dies auch keinen Schwierigkeiten unterliegen; einfacher und vielleicht ebenso genau ist es, aus den Functionen F nur das von ρ abhängige Glied abzutrennen und die Veränderlichkeit der x, welche nachher nur noch von den mit u, v behafteten Gliedern herrührt, als mit der Zeit proportional anzusehen; dann hat man für die auf einander folgenden Gruppen eines Cyclus:

$$0 = m_{12} + x_{12} + \xi_{12}t + p_{12}\rho + q_{12}\Delta K$$
$$0 = m_{23} + x_{23} + \xi_{23}t + p_{23}\rho + q_{23}\Delta K$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aus den Gleichungen, welche jetzt für sämmtliche Cyklen gleichzeitig betrachtet werden, können die Werthe der Unbekannten, in erster Linie also ρ und ΔK gefunden werden, während die definitive Bestimmung der $x_{ik} + \xi_{ik}t$ den für irgend einen Zeitmoment giltigen Werth von $F_i - F_k$ giebt, welcher zur definitiven Bestimmung der $\Delta\varphi$ verwendet werden kann. N. Herz.

Ort; mittlerer, wahrer, scheinbarer. Unter dem Ort (pl. Oerter) eines Gestirns versteht man die Lage der nach ihm gezogenen Visur gegen ein gewisses System von zu einer gewissen Zeit gehörigen Fundamentalebenen. Je nach der räumlichen Lage der Fundamentalebenen (der Lage des Coordinatenursprungs) unterscheidet man den Ort vom Beobachtungsorte aus gesehen, von dem geocentrischen und heliocentrischen Orte (vergl. den Artikel »Parallaxe«); ferner für die Bewegungen von Satelliten um ihre Hauptplaneten den jovicentrischen, kronocentrischen, areocentrischen Ort u. s. w. und für die Festlegung von Objecten (Flecken) oder die Untersuchung der Bewegung der Gestirne um ihre Axe, z. B. für den Mond, den selenocentrischen Ort (vergl. den Artikel »Mechanik des Himmels«, § 64).

Je nach der zeitlichen Lage der Fundamentalebenen, welche für verschiedene Epochen verschieden ist (s. die Artikel »Mechanik des Himmels«, »Präcession« und »Nutation«) unterscheidet man den mittleren Ort für eine gegebene Epoche, das sind die Coordinaten des Gestirns, bezogen auf die instantane, wegen der Seculaꞃänderungen (Präcession) corrigirte, mittlere Lage der Fundamentalebene, den wahren Ort, bezogen auf die wahre, wegen der secularen und periodischen Aenderungen (Präcession und Nutation) corrigirten Lage der Fundamentalebene, und den scheinbaren Ort, wie sich derselbe in Folge der Aberration des Lichtes (s. d.) darbietet.

Weitere, von der Lage des Beobachtungsortes oder von gewissen, diesem eigen-

thümlichen Reductionselementen (Temperatur, Luftdruck) abhängige Correctionen (Parallaxe und Refraction) werden besonders betrachtet.

Der mittlere Ort eines Gestirns für eine beliebige Epoche wird nicht weiter berücksichtigt, wesentlich bleibt nur der mittlere Ort für den Jahresanfang, dieser kann nämlich als eine für das Gestirn im Laufe eines Jahres Constante angesehen werden, während man dann die Präcession vom Jahresanfang bis zu der gewünschten Epoche mit der Nutation zusammenzieht.

Bringt man an den für eine gegebene Epoche gültigen mittleren Ort eines Sterns (Katalogposition) die Präcession bis zum Jahresanfange eines beliebigen Jahres an, so erhält man dessen mittleren Ort für den betrachteten Jahresanfang. Umgekehrt erhält man aus Beobachtungen auf die unten gegebene Art den mittleren Ort für den Jahresanfang des Beobachtungsjahres, und durch Anbringen der Präcession (mit dem entsprechenden Zeichen) den mittleren Ort für eine gewisse angenommene Epoche, z. B. eine solche, auf welche alle Beobachtungen reducirt werden sollen.

Ueber die Ausführung der diesbezüglichen Operationen ist hier nichts weiter anzuführen, da alles Nöthige in dem Artikel »Präcession« zusammengestellt erscheint.

Es ist jedoch hier noch ein zunächst nicht genügend bestimmtes Element zu betrachten: der Jahresanfang.

Bei der Berechnung der Präcession werden alle Constanten, welche als Coëfficienten der Zeit auftreten, nicht auf das julianische Jahr, sondern auf das tropische Jahr bezogen (vergl. den Artikel »Präcession«); die Länge des tropischen Jahres ist aber nicht genau durch eine ganze Anzahl von Tagen ausdrückbar, so dass verschiedene Jahre am selben Ort zu verschiedenen Ortszeiten anfangen werden, und überdies wird der Beginn desselben tropischen Jahres, wenn man ihn z. B. vom Mittage oder von der Mitternacht zählen würde, für verschiedene Orte verschiedenen absoluten Zeitmomenten entsprechen. Man kann diesem Umstande auf zwei Arten Rechnung tragen.

1) Man wählt als Nullpunkt der Zeitzählung den Jahresanfang für einen Hauptmeridian, den Meridian der Ephemeride, also z. B. Berlin, Paris, Greenwich, Washington; alle beobachteten Zeiten werden, wie bei allen aus den Ephemeridensammlungen zu entnehmenden Zahlenwerthen auf die Zeit des Hauptmeridians reducirt; die mittleren Oerter der Sterne gelten ebenfalls für den Jahresanfang, d. i. Januar 0·0 des Meridians der Ephemeride[1]). Für die Berechnung der mittleren Oerter für diesen Jahresanfang hat man aber die Länge des Jahres (eine ganze Anzahl von Tagen) in Theilen des tropischen Jahres auszudrücken.

2) Man wählt als Nullpunkt der Zeitrechnung einen von der Lage des Erdortes unabhängigen Anfangspunkt der Zählung. BESSEL wählte als solchen den Zeitpunkt, zu welchem die mittlere Länge der Sonne, vermehrt um den constanten Theil der Aberration (— 20·48″) den Werth 280°, gezählt von dem zugehörigen mittleren Aequinoctium, hat. Dieses »fingirte Jahr« wurde seither beibehalten und heisst *annus fictus*. Dieses ist demnach ein tropisches Jahr, mit einem von der Lage der Erdorte unabhängigen Jahresanfang *(dies reductus)*. Der Jahresanfang des *annus fictus* wird daher für denselben Erdort in verschiedenen Jahren

[1]) Januar 0·0 entspricht dem Mittage des 31. December des vorangehenden Jahres. Diese Wahl ist getroffen, damit für jeden Jahrestag die Ordnungsnummer des Tages auch die seit dem Jahresanfang verflossene Anzahl von Tagen darstellt; so sind für den 1., 10., 20. Januar bereits 1, 10, 20 Tage verflossen.

zu ganz verschiedenen Tagesstunden fallen, oder aber, der Beginn dieses Jahresanfanges wird auf 0 Uhr in verschiedenen Jahren an verschiedenen Orten fallen. Denjenigen Meridian, für welchen der Jahresanfang auf 0 Uhr fällt, nennt man den Normalmeridian; für ihn ist, da die Sonnenlänge 280° ist, die zugehörige Sternzeit $18^h 40^m$[1]).

Man kann den Normalmeridian, für welchen der Jahresanfang auf 0 Uhr fällt, mit Hilfe der bekannten tropischen Bewegung der Sonne für jedes Jahr berechnen, sobald man denselben für ein Jahr kennt. Nun ist nach LE VERRIER die mittlere tropische Länge der Sonne für 1850 Januar 1·0 mittlerer Pariser Zeit: $L_0 = 280° \, 46' \, 43{\cdot}51''$; dieses ist der Werth, welcher für L_0' in Formel (2) des Artikels »Präcession« einzusetzen ist, während L' für den Jahresanfang gleich 280° anzunehmen ist. Man erhält daher die Zeit ϑ_0 (ausgedrückt in julianischen Jahren und mittlerer Pariser Zeit), zu welcher der tropische Jahresanfang für 1850 fällt aus der Formel:

$$c = -46' \, 43{\cdot}51'' = a_1\vartheta_0 + a_2\vartheta_0^2 + a_3\vartheta_0^3.$$

Diese Gleichung hat genau dieselbe Form, wie die in dem Artikel »Präcession« für die Bestimmung der Jahreslänge gelöste, und giebt, wenn c an Stelle von $bx = 1296000\,x$ oder $x = c:b$ gesetzt wird:

$$\vartheta_0 = A_1 \frac{c}{b} + A_2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 + A_3 \left(\frac{c}{b}\right)^3,$$

wobei man wegen der Kleinheit von $c:b$ und der Coëfficienten A_2, A_3 die beiden letzten Glieder unbedenklich vernachlässigen kann. In Tagen ausgedrückt wird daher der Beginn des tropischen Jahres 1850:

$$\vartheta_0' = A_1 \frac{c}{b} \cdot 365{\cdot}25 = -(1 - 0{\cdot}000021357) \frac{2803{\cdot}51}{1296000} \cdot 365{\cdot}25 = -0{\cdot}7901^d,$$

d. i. 0·7901 Tage vor Januar 1·0 mittlere Pariser Zeit.

$x = T - 1850$ tropische Jahre sind nach Formel (2a) »Präcession« gleich

$$t = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 = x + (A_1 - 1)x + A_2 x^2 + A_3 x^3,$$

wobei

$$A_1 - 1 = -0{\cdot}000021357, \quad A_2 = -0{\cdot}00000000008543,$$
$$A_3 = -0{\cdot}000000000000000247$$

ist; x tropische Jahre nach 1850 fällt daher der Jahresanfang

$$\vartheta_0 + t = \vartheta_0 + x + (A_1 - 1)\,x + A_2 x^2 + A_3 x^3$$

Jahre nach 1850 Januar 1·0 oder

$$\vartheta = \vartheta_0 + (A_1 - 1)x + A_2 x^2 + A_3 x^3$$

nach dem Beginn des julianischen Jahres $T = 1850 + x$, ausgedrückt in julianischen Jahren, daher in Tagen ausgedrückt:

$$\vartheta' = \vartheta_0' + [(A - 1)\,x + A_2 x^2 + A_3 x^3] \cdot 365{\cdot}25$$
$$= -0{\cdot}7901 - 0{\cdot}0078004\,x - 0{\cdot}0000000312\,x^2.$$

Während aber nach LE VERRIER das julianische Jahr 1850 mit Januar 1·0 anfängt, wird wegen der Jahreslänge 365·25 Tage nur jedes vierte folgende mit dem Mittage anfangen. Es wird daher zweckmässiger, den Beginn des *annus fictus* gegen den Anfang des stets mit dem Mittage beginnenden Kalenderjahres zu suchen. Dieses ist im ersten, zweiten, dritten folgenden Jahre um 0·25, 0·50, 0·75 früher, im vierten Jahre wieder zusammenfallend mit dem Be-

---

[1]) Sternzeit im mittleren Mittage = Rectascension der mittleren Sonne = mittlere Länge der Sonne (s. den Artikel »Zeit«).

ginn des julianischen Jahres. Es wird daher der Beginn des *annus fictus* dem Beginne des Kalenderjahres um $\frac{1}{4}r'$ genähert, wenn r' der Rest der Division von $T_0 - 1850$ durch 4 ist, oder um $\frac{1}{4}r - 0{\cdot}5$, wenn r der Rest der Division der Jahreszahl selbst durch 4 ist, wobei aber r die Werthe 1, 2, 3, 4 annehmen muss, da die Correction für $r' = 2$ nicht $-0{\cdot}5$, sondern $+0{\cdot}5$ ist. Es wird daher für das laufende Jahrhundert der Jahresanfang

$$-0{\cdot}7901 - 0{\cdot}0078004\,x - 0{\cdot}0000000312\,x^2 + \tfrac{1}{4}r - 0{\cdot}5$$

vor Januar 1·0, oder an dem Datum des Januar:

$$\text{Januar } 0{\cdot}0 + 0{\cdot}2099 - 0{\cdot}0078004\,x - 0{\cdot}0000000312\,x^2 + \tfrac{1}{4}r - 0{\cdot}5.$$

Da nun aber die Secularjahre im gregorianischen Kalender keine Schaltjahre sind, so wird in jedem Secularjahr der Anfang des Kalenderjahres um einen Tag zurückweichen oder umgekehrt der Anfang des *Annus fictus* um einen Tag des Jahres vorrücken, was am einfachsten berücksicht werden könnte, wenn man die Ordnungszahl des Seculums, um eine Constante vermindert, dazu addiren würde. Da die obige Formel für das neunzehnte Jahrhundert richtig ist, so würde man noch $\tau - 18$ zu addiren haben, wenn τ die Hunderte der Jahreszahl bedeuten. Andererseits ist aber jedes vierte Jahrhundert wieder ein Schaltjahr, so dass in jedem vierten Jahrhundert die hinzugefügte Einheit wieder weggenommen werden muss. Schreibt man daher $\tau = 4\sigma + \rho$, wobei $\rho = 0, 1, 2, 3$ ist, und addirt $3\sigma + \rho - 14$, so wird auch diesem Umstande des gregorianischen Kalenders Rechnung getragen. Es ist daher für den Meridian von Paris:

$$k = 0{\cdot}2099 + 3\sigma + \rho - 14{\cdot}5 - 0{\cdot}0078004\,x - 0{\cdot}0000000312\,x^2 + \tfrac{1}{4}r$$

das Datum des Beginnes des *annus fictus* in Bruchtheilen des Tages ausgedrückt für das Jahr des gregorianischen Kalenders

$$(4\sigma + \rho)\,100 + (4q + r); \qquad \rho = 0, 1, 2, 3; \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

Für einen anderen Ort O, dessen westliche Länge von Paris d ist (ebenfalls ausgedrückt in Bruchtheilen des Tages), wird der Beginn des *annus fictus* Januar $k - d$ sein; für Greenwich wird die Constante daher 0·2034, für Berlin 0·2406.

Alle Constanten, welche für die einzelnen Daten des Normalmeridians tabulirt sind, gelten daher für $k - d$ des betrachteten Ortes O. Sucht man die Constanten für den Mittag dieses Ortes, so hat man mit dem Argumente: Datum $- k + d$ einzugehen[1]). Braucht man aber den Werth der Constanten für eine andere Zeit, z. B. für die Culminationszeit eines Sterns, dessen Rectascension α ist, für welche daher die Sternzeit α ist, so wird das Argument: Datum $- k + d + \alpha$. An diesen Werth ist jedoch noch eine Correction anzubringen. An dem Tage, an welchem die Sonne einen Stern passirt, wird dieser nämlich zweimal culminiren, einmal unmittelbar nach der Sonne und dann noch einmal unmittelbar vor der Sonne; für die erstere Culmination ist das Argument das eben angeführte, für die zweite Culmination dieses Tages ist das Argument natürlich um 1 grösser und bleibt es für alle folgenden Daten. Man hat daher als Argument für die Entnahme derjenigen Constanten, welche für $18^h\,40^m$ des Normalmeridians gelten:

$$\text{Argument} = \text{Datum} - k + d + \alpha + i$$

$d + \alpha$ in Tagesbruchtheilen, $i = 0$ für alle Daten, für welche die Sonnenlänge kleiner als α ist, und gleich 1 für alle Daten, für welche die Sonnenlänge grösser

[1]) Die von BESSEL und später von WOLFERS herausgegebenen »Tabulae quantitatum Besselianarum« haben k mit dem entgegengesetzten Zeichen, so dass für diese das dort gegebene k zum Datum zu addiren ist.

als α ist; dabei vorausgesetzt, dass $\alpha > 18^h\,40^m$ ist, denn nur für diesen Fall erhält man die Culmination desjenigen Datums, welches mit $18^h\,40^m$ Sternzeit des Normalmeridians beginnt. Ist aber $\alpha < 18^h\,40^m$, so würde man durch diese Formel die Culmination erhalten, welche dem betr. Datum vorangeht; in diesem Falle ist also $i = 1$ bezw. 2 zu nehmen, je nachdem die Sonnenlänge kleiner oder grösser als α ist.

Doch wird man diese Regeln nur für die ältere Form der Tabulirung benöthigen, da in den Ephemeriden jetzt allgemein eine vereinfachte Form gewählt ist (s. unten).

Vereinigt man die Reductionen, welche an dem mittleren Orte α_0, δ_0 eines Sterns für den Jahresanfang anzubringen sind, um seinen wahren Ort zu einer anderen Epoche zu erhalten (Präcession vom Anfang des Jahres bis zu dieser Epoche, Eigenbewegung in der Zwischenzeit und Nutation), und die Reduction vom wahren Ort auf den scheinbaren α, δ (Aberration), so ergiebt sich als Reduction:

$$\Delta\alpha_0 = \alpha - \alpha_0 = f + g \sin(G + \alpha_0) \tang \delta_0 + h \sin(H + \alpha_0) \sec \delta_0 + \mu t$$
$$\Delta\delta_0 = \delta - \delta_0 = g \cos(G + \alpha_0) + h \cos(H + \alpha_0) \sin \delta_0 + i \cos \delta_0 + \mu' t$$

oder

$$\Delta\alpha_0 = \alpha - \alpha_0 = aA + bB + cC + dD + E$$
$$\Delta\delta_0 = \delta - \delta_0 = a'A + b'B + c'C + d'D,$$

wobei für das zweite System die Constanten für den Stern die Bedeutung haben:

$$a = m_1 + n_1 \sin\alpha \tang\delta \qquad a' = n \cos\alpha$$
$$b = \cos\alpha \tang\delta \qquad b' = -\sin\alpha$$
$$c = \cos\alpha \sec\delta \qquad c' = \cos\delta \tang\varepsilon - \sin\alpha \sin\delta$$
$$d = \sin\alpha \sec\delta \qquad d' = \cos\alpha \sin\delta.$$

Nach diesen Formeln erhält man entweder den scheinbaren Ort α, δ aus dem mittleren α_0, δ_0 durch Addition der berechneten Correctionen, oder aber aus den beobachteten Positionen durch Anbringen derselben Correctionen mit dem entgegengesetzten Zeichen den mittleren Ort für den Jahresanfang[1]).

Die Constanten I: f, g, h, G, H, i und II: A, B, C, D, E sind mit der Zeit veränderlich und für jeden Tag des Jahres in den Ephemeriden tabulirt.

Das »Berliner Astronom. Jahrbuch« gab bis 1867 die Grössen I für die Epochen des Normalmeridians und die Grössen II für die mittlere Berliner Mitternacht von 10 zu 10 Tagen ohne Berücksichtigung der schnell veränderlichen von der Mondlänge abhängigen Glieder. Von 1868 ab wurden die Grössen III (f' g', G', A', B') für die Mondglieder kurzer Periode mit dem Argumente einfache Mondlänge hinzugefügt, die Grössen I von Tag zu Tag für die mittlere Mitternacht gegeben, und überdies Grössen f, g, G zur Reduction des wahren Ortes auf den jedesmaligen mittleren Ort des nächstliegenden Decenniums, also für die Zeit 1868—1874 auf das mittlere Aequinoctium 1870, von 1875—1884 auf das mittlere Aequinoctium 1880 u. s. w. hinzugefügt. Man erhält diese Ausdrücke leicht, wenn man in den Formeln (3) des Artikels »Nutation«, τ nicht vom Jahresanfange des betr. Jahres, sondern vom Jahresanfang des zu Grunde gelegten Decenniums bis zum betr. Tag zählt.

---

[1]) Eine andere Form, bei welcher die Ausdrücke für Nutation und Aberration vereinigt sind, hat KLINKERFUES vorgeschlagen (»Astron. Nachr.« Bd. 62, pag. 355). Ueber differentielle Aenderungen in den Constanten a, b, c . . . s. »Astron. Nachr.« Bd. 101, pag. 245; über die Glieder zweiter Ordnung und die Formeln von FABRITIUS, s. v. OPPOLZER l. c., pag. 259.

Für die Reduction von Sternen bis 1869 muss das Argument in der oben angegebenen Weise gebildet werden. Seit 1870 finden sich die zu jedem Datum gehörigen, der Sternzeitepoche $18^h 40^m$ des Normalmeridians entsprechenden mittleren Zeiten Berlin auf eine Decimale, seit 1884 auf zwei Decimalen hinzugefügt, und seit 1888 giebt das »Berliner Astron. Jahrbuch« die mit den Mondgliedern kurzer Periode vereinigten Grössen II, ebenfalls für die Epoche $18^h 40^m$ des Normalmeridians, aber mit Hinzufügung der zugehörigen mittleren Zeit Berlin auf 3 Decimalen, von Tag zu Tag.

Der »Nautical Almanac« von Greenwich gab seit 1834 die sämmtlichen Reductionsgrössen für die mittlere Mitternacht Greenwich, die Grössen II für jeden Tag, die Grössen I bis 1873 von 5 zu 5 Tagen, seit 1874 für jeden Tag.

Die »Connaissance des Temps« gab seit 1863 sämmtliche Reductionsgrössen für die mittlere Mitternacht Paris, die Grössen II ebenfalls für jeden Tag, die Grössen I bis 1874 von 5 zu 5 Tagen, seit 1875 ebenfalls von Tag zu Tag. N. Herz.

Parallaxe. Die von beliebigen Punkten der Erdoberfläche aus in einem beliebigen Augenblicke gesehenen Stellungen eines Gestirnes müssen, um mit einander vergleichbar zu sein und zu Untersuchungen über die Bewegung des Gestirnes dienen zu können, auf einen und denselben Punkt als Ort des Beobachters bezogen werden. Die Beobachtungen der unserem Sonnensystem angehörigen Körper werden bezogen auf den Erdmittelpunkt in seiner dem Augenblicke der Beobachtungen entsprechenden Lage, während die Beobachtungen der Fixsterne und der übrigen unserem Sonnensystem nicht angehörenden oder doch durch die Sonne in ihrer Bewegung nicht bestimmten Körper bezogen werden auf den durch die Sonne eingenommenen Brennpunkt der Bahn der Erde. Man nennt nun allgemein die Abweichung des beobachteten Ortes eines Gestirnes von dem wahren aus dem Bewegungsmittelpunkte gesehenen Orte die Parallaxe des Gestirnes und unterscheidet die »tägliche Parallaxe«, welche durch den Standpunkt des Beobachters auf der Erdoberfläche erzeugt wird, und die »jährliche Parallaxe», hervorgerufen durch die Bewegung der Erde in ihrer Bahn.

Streng genommen stehen die Fixsterne unter dem doppelten Einflusse der täglichen wie der jährlichen Parallaxe. Bei ihrer ungeheuren Entfernung ist aber die verschiedene Stellung der Erde in ihrer Bahn nur eben hinreichend, um in besonders günstigen Fällen eine mit unseren Instrumenten messbare Aenderung des Ortes des Sternes hervorzurufen, während der Durchmesser des Erdkörpers so verschwindend klein ist, dass es schlechterdings unmöglich ist, den Einfluss der verschiedenen Stellung des Beobachters auf der Erdoberfläche im scheinbaren Orte der Fixsterne zu erkennen. Wenn wir daher von der Parallaxe der Fixsterne sprechen, so verstehen wir darunter einfach die jährliche Parallaxe. Andererseits stehen die Körper unseres Sonnensystemes nur unter dem Einflusse der täglichen Parallaxe, und hier verstehen wir daher unter der Parallaxe die Abweichung des scheinbaren Ortes des Gestirns vom geocentrischen Orte.

Wir suchen zunächst die Formeln zur Berechnung der täglichen Parallaxe auf. Ist E der Mittelpunkt des sphäroidischen Erdkörpers, O der Ort des Beobachters auf der Erdoberfläche und S der Ort des Gestirns, so zielt der Erdradius EO, den wir mit ρ bezeichnen, verlängert auf das geocentrische Zenith Z' des Beobachtungsortes; der Winkel $Z'OS = z'$ ist die scheinbare Distanz des Gestirns vom geocentrischen Zenith, der Winkel $Z'ES = z$ die wahre Distanz vom geocentrischen Zenith. Nennen wir noch die Entfernung ES des Gestirns

vom Erdmittelpunkt Δ, so ist der Abstand des scheinbaren Ortes des Gestirns vom geocentrischen Orte, d. i. der Winkel $OSE = p$ bestimmt durch

$$\sin p = \frac{\rho}{\Delta} \sin z'.$$

Der scheinbare Ort liegt auf der Verlängerung des das geocentrische Zenith mit dem geocentrischen Orte des Gestirnes verbindenden Bogens grössten Kreises. Der Maximalwerth

$$\sin p_0 = \frac{\rho}{\Delta}$$

heisst die Horizontalparallaxe. Durch Entwickelung nach der MACLAURIN'schen Reihe erhalten wir

(A. 870.)

$$p = p_0 \sin z' - \tfrac{1}{6} p_0^3 \sin z' \cos^2 z' \;.\;.\;.\;.\;.$$

Das zweite Glied der rechten Seite wird ein Maximum für $\sin z' = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}$; es macht dann aber selbst beim Monde, für welchen $p_0 = 62'$ werden kann, nur $0''\!\cdot\!078$ aus und kann auch in diesem Falle vernachlässigt werden, weil uns die Parallaxe des Mondes selbst zur Zeit nicht mit entsprechender Genauigkeit bekannt ist.

Nennen wir den Radius des Erdäquators a und die geocentrische Breite des Punktes O φ, ferner die Abplattung des Erdsphäroides α, so ist

$$\rho = a\left[1 - \alpha \sin^2\varphi + \frac{5}{2}\alpha^2(\sin^2\varphi - \sin^4\varphi) \;.\;.\;.\;.\right]$$

und daher

$$\sin p_0 = \frac{a}{\Delta}\left[1 - \alpha \sin^2\varphi + \frac{5}{2}\alpha^2(\sin^2\varphi - \sin^4\varphi) \;.\;.\;.\;.\right].$$

Der Maximalwerth von p_0 ist also gegeben durch

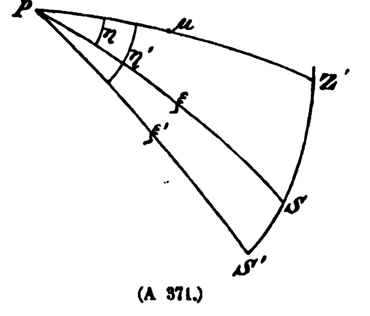
$$\sin \pi = \frac{a}{\Delta}.$$

Er wird bezeichnet als die Aequatoreal-Horizontalparallaxe.

Der Maximalwerth des von α^2 abhängigen Gliedes tritt ein für $\sin\varphi = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; dasselbe nimmt in diesem Falle für den Mond den Betrag $0''\!\cdot\!026$ an. Da der Unterschied zwischen p_0 und π nur bis auf $12''$ steigen kann, begehen wir durch die Vertauschung des Sinus mit dem Bogen nur einen völlig unmerklichen Fehler und erhalten also schliesslich zur Berechnung von p für alle Fälle der Anwendung genügend genau

$$p = \pi(1 - \alpha \sin^2\varphi) \sin z'.$$

Es sei nun wieder Z' das geocentrische Zenith des Beobachtungsortes an der Sphäre und S der geocentrische Ort des Gestirns; der scheinbare Ort liegt dann also auf der Verlängerung von $Z'S$ etwa in S' und der Bogen $Z'S' = z'$ ist die scheinbare geocentrische Zenithdistanz. Der Punkt P sei der Zielpunkt der Z-Achse desjenigen Coordinatensystems, in welchem wir die Parallaxe berechnen wollen. Der Abstand PZ' sei μ. Die Polabstände PS und PS' seien ξ und ξ', die Winkel zwischen PS bezw. PS' und PZ' seien η und η'.



(A 371.)

Da $SS' = p$ also

$$\sin SS' = \sin p_0 \sin z' = \rho \sin \pi \sin z'$$

ist, finden wir zunächst

$$\sin(\eta' - \eta) = \rho \sin \pi \frac{\sin z'}{\sin \xi} \sin PS'S$$

oder wegen

$$\sin PS'S \sin z' = \sin \eta' \sin \mu$$

$$\sin(\eta' - \eta) = \rho \sin \pi \frac{\sin \mu}{\sin \xi} \sin \eta'.$$

Setzen wir für η' ein $\eta + (\eta' - \eta)$ und entwickeln, so wird

$$\sin(\eta' - \eta)\left(1 - \rho \sin \pi \frac{\sin \mu}{\sin \xi} \cos \eta\right) = \rho \sin \pi \frac{\sin \mu}{\sin \xi} \cos(\eta' - \eta) \sin \eta$$

folglich

$$\operatorname{tang}(\eta' - \eta) = \frac{\rho \sin \pi \sin \mu \operatorname{cosec} \xi \sin \eta}{1 - \rho \sin \pi \sin \mu \operatorname{cosec} \xi \cos \eta}. \tag{a}$$

Aus den beiden Ausdrücken

$$\cos \xi = \cos z \cos \mu + \sin z \sin \mu \cos PZ'S$$
$$\cos \xi' = \cos z' \cos \mu + \sin z' \sin \mu \cos PZ'S$$

ergiebt sich

$$\sin z' \cos \xi - \sin z \cos \xi' = \cos \mu \sin(z' - z) = \cos \mu \rho \sin \pi \sin z'.$$

Substituiren wir $\sin z$ aus der Gleichung

$$\sin z : \sin z' = \sin \xi \sin \eta : \sin \xi' \sin \eta',$$

so wird

$$\cos \xi = \rho \sin \pi \cos \mu + \cos \xi' \frac{\sin \xi}{\sin \xi'} \frac{\sin \eta}{\sin \eta'}.$$

Hiermit erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\sin(\xi' - \xi) = \rho \sin \pi \cos \mu \sin \xi' + \sin \xi \cos \xi' \left(\frac{\sin \eta}{\sin \eta'} - 1\right)$$
$$= \rho \sin \pi \cos \mu \sin \xi' + \sin \xi \cos \xi' \operatorname{cosec} \eta' \, 2 \sin \frac{\eta - \eta'}{2} \cos \frac{\eta + \eta'}{2}$$

oder nach dem vorher gefundenen Ausdrucke für $\sin(\eta' - \eta)$

$$\sin(\xi' - \xi) = \rho \sin \pi \left[\cos \mu \sin \xi' - \sin \mu \cos \xi' \frac{\cos \frac{\eta + \eta'}{2}}{\cos \frac{\eta - \eta'}{2}}\right].$$

Setzen wir nun

$$\cos \gamma = m \sin \mu \qquad \sin \gamma = m \cos \mu \frac{\cos \frac{\eta - \eta'}{2}}{\cos \frac{\eta + \eta'}{2}}, \tag{b}$$

so ergiebt sich

$$\sin(\xi' - \xi) = -\rho \sin \pi \cos \mu \frac{\cos(\xi' + \gamma)}{\sin \gamma}$$

und wenn wir rechts wieder ξ' ersetzen durch $\xi + (\xi' - \xi)$

$$\operatorname{tang}(\xi' - \xi) = \frac{-\rho \sin \pi \cos \mu \operatorname{cosec} \gamma \cos(\xi + \gamma)}{1 - \rho \sin \pi \cos \mu \operatorname{cosec} \gamma \sin(\xi + \gamma)}. \tag{c}$$

Ist s der lineare Halbmesser des Gestirns Δ, Δ' seine Entfernung vom Erdmittelpunkt bezw. vom Beobachtungsorte, so ist der Winkel, unter welchem das Gestirn vom Erdmittelpunkte aus erscheint, d. i. der **geocentrische Radius** bestimmt durch

$$\sin R = \frac{s}{\Delta},$$

während wir den **scheinbaren Radius** erhalten durch

$$\sin R' = \frac{s}{\Delta'}.$$

Um also R' aus R zu berechnen, haben wir

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\Delta}{\Delta'}$$

oder nach Fig. 370

$$= \frac{\sin z'}{\sin z}.$$

Nennen wir im Dreieck $PZ'S'$ den Winkel bei Z' für einen Augenblick q, so ist

$$\sin z \cos q = \cos\xi \sin\mu - \sin\xi \cos\mu \cos\eta$$
$$\sin z' \cos q = \cos\xi' \sin\mu - \sin\xi' \cos\mu \cos\eta'.$$

Die Einführungsgleichungen für den Winkel γ können wir schreiben, wenn wir $\frac{\eta - \eta'}{2} = \eta - \frac{\eta + \eta'}{2}$ oder $= \frac{\eta + \eta'}{2} - \eta'$ setzen,

$$\cos\gamma = m \sin\mu \qquad \sin\gamma = m \cos\mu \left(\cos\eta + \sin\eta \tan\frac{\eta + \eta'}{2}\right)$$
$$= m \cos\mu \left(\cos\eta' + \sin\eta' \tan\frac{\eta + \eta'}{2}\right)$$

und erhalten so

$$m \sin z \cos q = \cos\xi \cos\gamma - \sin\xi \sin\gamma + m \cos\mu \sin\xi \sin\eta \tan\frac{\eta + \eta'}{2}$$

$$m \sin z' \cos q = \cos\xi' \cos\gamma - \sin\xi' \sin\gamma + m \cos\mu \sin\xi' \sin\eta' \tan\frac{\eta + \eta'}{2}$$

oder da

$$\sin\xi \sin\eta = \sin z \sin q \qquad \sin\xi' \sin\eta' = \sin z' \sin q$$

ist,

$$m \sin z \left(\cos q - \cos\mu \sin q \tan\frac{\eta + \eta'}{2}\right) = \cos(\xi + \gamma)$$
$$m \sin z' \left(\cos q - \cos\mu \sin q \tan\frac{\eta + \eta'}{2}\right) = \cos(\xi' + \gamma).$$

Es wird also

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\cos(\xi' + \gamma)}{\cos(\xi + \gamma)} \tag{d}$$

Wir haben nun die Formeln (a) bis (d) auf die verschiedenen Coordinatensysteme zu übertragen. Lassen wir den Punkt P zusammen fallen mit dem Zenith des Beobachtungsortes, so sind ξ und ξ' die scheinbare bezw. wahre Zenithdistanz für den Beobachtungsort, sie mögen mit ζ und ζ' bezeichnet werden; η und η' sind das scheinbare bezw. wahre Azimuth $= a$ bezw. a'; endlich wird $\mu = \varphi - \varphi'$. Die Formeln werden also:

$$\tan(a' - a) = \frac{\rho \sin\pi \sin(\varphi - \varphi') \operatorname{cosec}\zeta \sin a}{1 - \rho \sin\pi \sin(\varphi - \varphi') \operatorname{cosec}\zeta \cos a}$$

$$\operatorname{cotang}\gamma = \tan(\varphi - \varphi') \frac{\cos\frac{a + a'}{2}}{\cos\frac{a' - a}{2}}$$

$$\tan(\zeta' - \zeta) = \frac{-\rho \sin\pi \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{cosec}\gamma \cos(\zeta + \gamma)}{1 - \rho \sin\pi \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{cosec}\gamma \sin(\zeta + \gamma)}$$

$$\sin R' = \sin R \frac{\cos(\zeta' + \gamma)}{\cos(\zeta + \gamma)}.$$

Betrachten wir P als Pol des Aequators, so ist, wenn α und α' wahre und scheinbare Rectascension, δ und δ' wahre und scheinbare Deklination des Gestirnes bedeuten, und Θ die Sternzeit der Beobachtung ist,

$$\xi = 90^\circ - \delta, \quad \xi' = 90^\circ - \delta', \quad \eta = \Theta - \alpha, \quad \eta' = \Theta - \alpha', \quad \mu = 90^\circ - \varphi'$$

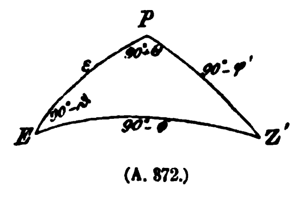
$$tang\,(\alpha' - \alpha) = - \frac{\rho \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta \sin(\Theta - \alpha)}{1 - \rho \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta \cos(\Theta - \alpha)}$$

$$tang\,\gamma = tang\,\varphi' \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos\left(\Theta - \frac{\alpha + \alpha'}{2}\right)}$$

$$tang\,(\delta' - \delta) = \frac{\rho \sin\pi \sin\varphi' \operatorname{cosec}\gamma \sin(\delta - \gamma)}{1 - \rho \sin\pi \sin\varphi' \operatorname{cosec}\gamma \cos(\delta - \gamma)}$$

$$\sin R' = \sin R \frac{\sin(\delta' - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma)}.$$

Lassen wir drittens den Punkt P den Pol der Ekliptik bedeuten und bezeichnen durch λ, β, λ', β' die wahre bezw. scheinbare Länge und Breite des Gestirnes, durch ϑ, Φ aber die Länge und Breite des geocentrischen Zeniths des Beobachtungsortes, so haben wir zunächst ϑ und Φ zu bestimmen aus dem Dreieck zwischen dem Pol der Ekliptik E, dem Pol des Aequators P und dem geocentrischen Zenith Z'. Da dem Punkte P die Länge 90°, dem Punkte E die Rectascension 270° zugehört, erhalten wir, wenn ε die Schiefe der Ekliptik ist,



(A. 872.)

$$\sin\Phi = \cos\varepsilon \sin\varphi' - \sin\varepsilon \cos\varphi' \sin\Theta$$
$$\cos\Phi \cos\vartheta = \cos\varphi' \cos\Theta$$
$$\cos\Phi \sin\vartheta = \sin\varphi' \sin\varepsilon + \cos\varphi' \cos\varepsilon \sin\Theta$$

$$tang\,(\lambda' - \lambda) = - \frac{\rho \sin\pi \cos\Phi \sec\beta \sin(\vartheta - \lambda)}{1 - \rho \sin\pi \cos\Phi \sec\beta \cos(\vartheta - \lambda)}$$

$$tang\,\gamma = tang\,\Phi \frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}{\cos\left(\vartheta - \frac{\lambda + \lambda'}{2}\right)}$$

$$tang\,(\beta' - \beta) = \frac{\rho \sin\pi \sin\Phi \operatorname{cosec}\gamma \sin(\beta - \gamma)}{1 - \rho \sin\pi \sin\Phi \operatorname{cosec}\gamma \cos(\beta - \gamma)}$$

$$\sin R' = \sin R \frac{\sin(\beta' - \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)}.$$

Der Einfluss der Parallaxe auf die Coordinaten ist also in allen Fällen bestimmt durch Ausdrücke von der Form $tang\,x = \frac{A \sin y}{1 - A \cos y}$. Um diese zu berechnen, wendet man eine bekannte Reihenentwickelung an und erhält

$$x = A \sin y + \tfrac{1}{2}A^2 \sin 2y + \tfrac{1}{3}A^3 \sin 3y \ldots$$

Weil nun A abhängig ist von $\sin\pi$, also eine Grösse von der Ordnung der Parallaxe selbst ist, braucht man in allen Fällen der Anwendung mit alleiniger Ausnahme des Mondes nur das erste Glied der Reihe zu berücksichtigen. Um strenge und zugleich bequeme Formeln für den Mond zu erhalten, setzen wir $A \cos y = \sin M$. Dann ist

$$tang\,x = \frac{\sin M\, tang\,y}{1 - \sin M} = tang\,M \frac{1 + \sin M}{\cos M} tang\,y = tang\,M\, tang\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}M)\, tang\,y.$$

Die zur Anwendung gelangenden Formeln für das System der Rectascension und Deklination lauten also folgendermaassen:

Näherungsformeln: $\alpha' - \alpha = -\pi\rho \cos\varphi' \sec\delta \sin(\theta - \alpha)$

$$\tan\gamma = \tan\varphi' \sec(\theta - \alpha) \qquad \delta' - \delta = \pi\rho \sin\varphi' \operatorname{cosec}\gamma \sin(\delta - \gamma).$$

Strenge Formeln:

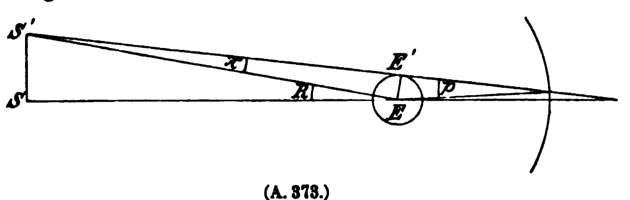
$$\begin{aligned}\sin M &= \rho \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta \cos(\theta - \alpha) \\ \sin M' &= \rho \sin\pi \sin\varphi' \operatorname{cosec}\gamma \cos(\delta - \gamma)\end{aligned} \quad \tan\gamma = \tan\varphi' \cos\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \sec\left(\theta - \frac{\alpha + \alpha'}{2}\right)$$

$$\tan(\alpha' - \alpha) = -\tan M \tan(45° + \tfrac{1}{2} M) \tan(\theta - \alpha)$$

$$\tan(\delta' - \delta) = \tan M' \tan(45° + \tfrac{1}{2} M') \tan(\delta - \gamma).$$

Die Aufgabe der **Bestimmung der Horizontalparallaxe** eines Gestirnes kann in doppelter Weise gelöst werden. Entweder stellen sich zwei Beobachter auf der Erdoberfläche an verschiedenen Punkten auf und bestimmen gleichzeitig den Ort des Gestirnes; die beiden Bestimmungen müssen um den Unterschied der Parallaxe verschieden sein. Oder zweitens ein einzelner Beobachter verfolgt das Gestirn während seiner täglichen Bewegung und leitet aus dem sich mit der Lage des Gestirnes gegen den Beobachter ändernden Einflusse der Parallaxe diese selbst her. Während jenes Verfahren unter allen Umständen auch bei Körpern anwendbar ist, über deren Natur und Bewegung noch nichts bekannt ist, setzt dieses voraus, dass wir im Besitze einer hinreichend genauen Ephemeride des Gestirnes sind, um den Einfluss der eigenen Ortsveränderung eliminiren zu können. Dagegen verlangt das andere Verfahren die genaue Kenntniss der gegenseitigen Lage der beiden Beobachtungspunkte, die nur mit grossen Schwierigkeiten zu erlangen ist. Eine Erleichterung tritt ein, wenn die Orte so gewählt werden, dass ihre Entfernung im wesentlichen aus der Differenz der Polhöhen sich ergiebt, was der Fall ist, wenn beide Orte unter demselben Meridian liegen. Aus diesen Gesichtspunkten resultiren die verschiedenen Methoden der Bestimmung der täglichen Parallaxe der Gestirne. Sie werden angewandt zur Bestimmung der Parallaxe des Mondes und der Sonne, denn da durch das dritte KEPLERsche Gesetz alle Entfernungen im Sonnensystem aus den mit grosser Genauigkeit bekannten oder leicht zu bestimmenden Umlaufszeiten folgen, sobald eine der Entfernungen gegeben ist, brauchen wir nur eine Parallaxe im Sonnensystem zu bestimmen. Wegen der grossen Verschiedenheit im Werthe der Parallaxe und in der Bewegung zwischen dem Monde und den Planeten sind nun aber die Methoden dem speciellen Falle, dem sie dienen sollen, besonders anzupassen.

Die erste Bestimmung der **Mondparallaxe** rührt her von HIPPARCH. Seine Methode ist folgende. Bewegt der Mond sich während einer centralen Mondfinsterniss durch den von der Sonne erzeugten Schattenkegel des Erdkörpers und bezeichnen wir den halben vom Mondmittelpunkte durchlaufenen Bogen durch s, ferner durch p und π die Parallaxen des Mondes bezw. der Sonne und durch R den angularen Sonnenradius, so entnimmt man der Figur leicht die Beziehung



(A. 378.)

$$R + s = \pi + p.$$

Andererseits hatte schon ARISTARCH die Bestimmung des Verhältnisses $p:\pi$ aus der Beobachtung der Winkel im Dreiecke Sonne, Erde, Mond zur Zeit des Viertelmondes, wo das Dreieck am Mondmittelpunkte rechtwinklig ist, gelehrt,

Es ergiebt sich so, wenn wir den Winkel am Sonnenmittelpunkt durch S, den am Erdmittelpunkte durch E bezeichnen,

$$\sin S : \sin E = \frac{1}{p} : \frac{1}{\pi}.$$

Nach ARISTARCH's Messungen, die den Winkel E zu 87° ergaben, nahm HIPPARCH $\pi : p = 1 : 19$ an und fand dann für p Werthe, nach denen er die grösste Entfernung des Mondes zu 72·5—83 Erdhalbmessern, die kleinste auf 62—72 Erdhalbmesser schätzte. Trotz der grossen in der unvermeidlichen Unsicherheit der erforderlichen Beobachtungen begründeten Mängel der Methode ist sie auch später noch wiederholt angewandt, zuletzt auf KEPLER's Veranlassung durch VENDELIN, der auf Majorka beobachtete und $\pi : p = 1 : 229$ und damit $\pi = 14''$ fand.

Durch direkte Beobachtung der Höhe des Mondes bestimmte zuerst PTOLEMÄUS die Mondparallaxe nach einer nach ihm benannten Methode. Die Bahn des Mondes ist gegen die Ekliptik unter einem Winkel von 5° 8′ geneigt, und es bewegt sich der Knoten der Mondbahn in der Ekliptik rückläufig so, dass er in nahe 19 Jahren einen Umlauf vollführt. Tritt nun der Fall ein, dass der Knoten der Mondbahn mit dem Frühlingspunkte zusammenfällt, so erreicht der Mond während eines Umlaufs eine grösste nördliche Deklination von 23° 28′ + 5° 8′ = 28° 36′ und eine grösste südliche Deklination von gleichfalls 28° 36′. Es unterscheiden sich also die Zenithdistanzen des Mondes im Augenblicke der Culmination in diesen beiden Stellungen für einen Beobachter auf der Erdoberfläche um 57° 12′, und es sind daher die parallactischen Faktoren bei beiden Beobachtungen sehr verschieden. Nach den früher gegebenen strengen Formeln ergiebt sich für den Fall $\theta - \alpha = 0$, also für Deklinationsbeobachtungen im Meridian $\alpha' - \alpha = 0$, $\tang \gamma = \tang \varphi'$ also $\gamma = \varphi'$ und

$$\tang(\delta' - \delta) = \frac{\rho \sin \pi \sin(\delta - \varphi')}{1 - \rho \sin \pi \cos(\delta - \varphi')}$$

oder wenn wir die beobachtete Zenithdistanz $\zeta = \varphi - \delta'$ einführen

$$\sin(\delta - \delta') = \rho \sin \pi \sin(\varphi' - \delta') = \rho \sin \pi \sin[\zeta - (\varphi - \varphi')].$$

Durch Differentiation ergiebt sich wegen der Kleinheit von π und $\delta - \delta'$ hinreichend genau

$$d(\delta - \delta') = \rho \sin[\zeta - (\varphi - \varphi')] d\pi.$$

Reduciren wir also die beobachtete Deklination δ' mit einem angenommenen Werthe der Parallaxe auf den Erdmittelpunkt und bezeichnen die so erhaltene genäherte geocentrische Deklination durch δ_0', so liefert jede Beobachtung eine Gleichung der Form

$$\delta_0 = \delta_0' + \rho \sin[\zeta - (\varphi - \varphi')] d\pi,$$

worin δ_0 die den Tafeln entnommene Deklination des Mondes ist. Diese Deklination ist nun noch behaftet mit den Fehlern der angenommenen Elemente der Mondbahn. Es kommen hier nur die die Lage der Bahn bestimmenden Elemente Neigung und Knotenlänge in Betracht. Nennen wir diese Grössen bezogen auf den Aequator und Frühlingspunkt i und Ω, ferner u die vom Knoten gerechnete Länge des Mondes in seiner Bahn, so ist

$$\sin \delta = \sin i \sin u \qquad \tang(\alpha - \Omega) = \tang u \cos i.$$

Durch Differentiation dieser Ausdrücke und Elimination des du entsteht die Differentialgleichung

$$\cos \delta \, d\delta = \frac{\sin i \cos u}{\cos i} \cos^2 \delta \, d(\alpha - \Omega) + \frac{\sin u}{\cos i} \cos^2 \delta \, di,$$

die sich noch wegen

$$tang\, i = \frac{sin\, \delta}{cos\, \delta\, sin(\alpha - \Omega)} \qquad sin\, u = \frac{sin\, \delta}{sin\, i}$$

vereinfacht in

$$d\delta = \tfrac{1}{2} sin\, 2\delta\, cotang(\alpha - \Omega) d(\alpha - \Omega) + \frac{sin\, 2\delta}{sin\, 2i} di.$$

Aus jeder Beobachtung erhalten wir also eine Gleichung:

$$\delta_0 + \tfrac{1}{2} sin\, 2\delta\, cotang(\alpha - \Omega)\, d(\alpha - \Omega) + \frac{sin\, 2\delta}{sin\, 2i} di = \delta_0' + \rho\, sin[\zeta - (\varphi - \varphi')] d\pi.$$

Wollen wir die Unbekannten aus einer längeren Beobachtungsreihe bestimmen, so wäre $d\pi$ die Correction der dem Augenblicke der Beobachtung entsprechenden Parallaxe π; diese ist mit der Correction des angenommenen Näherungswerthes der mittleren Parallaxe π_0 verbunden durch $d\pi = \frac{\pi}{\pi_0} d\pi_0$, und wir hätten also die Gleichung aufzustellen

$$\delta_0' - \delta_0 = \tfrac{1}{2} sin\, 2\delta\, cotang(\alpha - \Omega) d(\alpha - \Omega) + \frac{sin\, 2\delta}{sin\, 2i} di - \rho \frac{\pi}{\pi_0} sin[\zeta - (\varphi - \varphi')] d\pi_0$$

und aus einer grösseren Anzahl solcher Gleichungen die Correctionen $d\Omega$, di $d\pi_0$ zu bestimmen. Beobachten wir den Mond zur Zeit des Zusammenfallens des aufsteigenden Knotens seiner Bahn mit dem Frühlingspunkte in seiner grössten nördlichen bezw. südlichen Deklination, so ist $(\alpha - \Omega) = 90°$ bezw. $270°$ und $\delta = \pm i$ und es wird einfach

$$\delta_0' - \delta_0 = \pm di - \rho \frac{\pi}{\pi_0} sin[\zeta - (\varphi - \varphi')] d\pi_0.$$

In dieser vereinfachten Gestalt wurde die Gleichung von Ptolemäus und später von Tycho, Kepler und anderen benutzt. Ptolemäus fand die mittlere Parallaxe des Mondes = 58′ 42″. Airy dagegen hat bei einer Bearbeitung der Greenwicher Mondbeobachtungen von 1730 bis 1850 nach diesen Gesichtspunkten den Werth 57′ 3″·89 erhalten. Der grosse Mangel der Methode, der auch das fehlerhafte Resultat des Ptolemäus erklärt, ist der, dass sie eine genaue Kenntniss der Refraction fordert; ein Fehler in ihrer Bestimmung geht mit seinem ganzen Betrage in das Resultat über. Dies ist auch der Grund, warum im Copernicanischen Zeitalter eine andere Methode angewandt wurde. Die Instrumente der damaligen Zeit dienten zur Bestimmung der Länge und Breite der Gestirne. Man verfuhr nun folgendermaassen. Man beobachtete den Mond im Augenblicke, in dem seine Länge gleich der des geocentrischen Zeniths des Beobachtungsortes war. Man erhielt dann aus der Beobachtung direkt die geocentrische Länge des Mondes, die man (Kepler) benutzte, um für einen beliebigen anderen Augenblick mit der gegebenen Bewegung die geocentrische Länge zu berechnen. Die Differenz der wirklich beobachteten scheinbaren und der so berechneten geocentrischen Länge ergab die Parallaxe. Tycho dagegen entnahm mit der beobachteten geocentrischen Länge den Mondtafeln die zugehörige geocentrische Breite und verglich diese mit der gleichzeitig beobachteten scheinbaren.

Als das sicherste Mittel zur Bestimmung der Parallaxe des Mondes durch Beobachtungen von einem einzigen Punkte der Erdoberfläche aus muss wohl die Beobachtung der Bedeckungen der Fixsterne durch den Mond bezeichnet werden. Die in der Theorie der Finsternisse — vergl. I. Band, pag. 810 — abgeleiteten Bedingungsgleichungen ermöglichen die Ermittelung der Correction der Coordinaten des Mondes, seiner Entfernung und seines Durchmessers. Dienen aber nur Beobachtungen eines einzelnen Ortes zur Aufstellung der betreffenden Gleichungen, so ist nothwendiger Weise die Voraussetzung zu machen, dass die

Correctionen der Tafelwerthe, also besonders der Coordinaten des Mondes, während des ganzen Zeitraumes, über welchen die Beobachtungen sich erstrecken, constant seien oder in einem bekannten Zusammenhange mit der Zeit stehen. In dieser Weise ist die Methode in neuester Zeit von BATTERMANN angewandt[1]). Will man sich von diesen Annahmen frei machen und zugleich auch die Gestalt des Erdkörpers, deren fehlerhafte Annahme natürlich aus Beobachtungen eines Ortes nicht zu ermitteln ist, in die Discussion einführen, so muss man gleichzeitige Beobachtungen von Sternbedeckungen von verschiedenen Stationen benutzen. Besonders geeignet sind hierzu die Durchgänge des Mondes durch die Gruppe der Plejaden, und in der That hat man versucht, die Beobachtungen dieser Erscheinung zur Bestimmung der Parallaxe des Mondes anzuwenden. Die betreffende Untersuchung von KÜSTNER[2]), ebenso wie die neueren Arbeiten von L. STRUVE[3]), welche letzteren auf der Verwendung der während totaler Mondfinsternisse beobachteten Sternbedeckungen beruhen, haben zwar nicht zu zuverlässigen Werthen der Parallaxe geführt, was aber nur als eine Folge des Umstandes angesehen werden kann, dass die Beobachtungsorte auf der Erdoberfläche nicht weit genug auseinander lagen.

So lange man nur Beobachtungen von einem einzelnen Erdorte zur Ermittelung der Parallaxe des Mondes anwandte, war das erlangte Resultat in hohem Grade abhängig von den Fehlern der Mondtheorie. Man wurde dadurch schon frühzeitig zu der Erkenntniss geführt, dass für die Sicherheit der Bestimmung es von wesentlichem Vortheil sein würde, wenn man gleichzeitige Beobachtungen verschiedener Stationen, die möglichst verschiedene Wirkungen der Parallaxe darböten, benutzen könnte. Natürlich setzte dieses eine genügende Kenntniss der Dimensionen und der Gestalt des Erdkörpers sowohl als auch genügend sichere Hilfsmittel zur Bestimmung der gegenseitigen Lage verschiedener Punkte der Erdoberfläche voraus, um die die beiden Stationen verbindende Sehne des Erdkörpers berechnen zu können. Diese Ueberlegungen führten schon zu einer Modification der vorhin erwähnten KEPLER'schen Methode, darin bestehend, dass man die erforderlichen beiden Bestimmungen der Länge des Mondes, von denen die eine frei von der Wirkung der Parallaxe sein und zur Elimination des Fehlers der den Tafeln entnommenen Länge des Mondes dienen musste, an zwei verschiedenen unter derselben Breite liegenden Stationen gleichzeitig ausführte. Aber zur vollen Geltung kam der so zu erzielende Vortheil erst, als man sich nach WAGNER's (1681—1745, Berlin) Vorschlage seiner bei der Messung der Zenithdistanzen bediente. Die Methode, die zu den das grösste Vertrauen geniessenden Bestimmungen gedient hat, besteht in folgendem. Es werden zwei möglichst genau auf demselben Meridian liegende Stationen ausgewählt, für welche also die absoluten Zeiten des Meridiandurchganges des Mondes wenig verschieden sind; die eine Station liegt auf der Nord- die andere auf der Südhalbkugel. Die Sicherheit der Bestimmung wächst mit der Grösse des zwischen beiden Punkten liegenden Bogens des Meridians, so dass es wünschenswerth ist, die geographische Breite der Orte so gross zu nehmen, als es ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit der Beobachtung statthaft ist. Der Mond culminirt dann südlich vom Zenith der nördlichen Station und nördlich

[1]) H. BATTERMANN: Beiträge zur Bestimmung der Mondbewegung und der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen von Sternbedeckungen.

[2]) Nova acta der Kais. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher XLI.

[3]) Astronomische Nachrichten, No. 3266.

vom Zenith der südlichen. Auf beiden Stationen wird im Augenblicke der Culmination die scheinbare Zenithdistanz eines der Mondränder gemessen und zwar auf der einen Station die des oberen auf der anderen die des unteren Randes oder umgekehrt, damit die Beobachtungen sich auf denselben Punkt der Peripherie der Mondscheibe beziehen. Um weiter die etwa vorhandenen constanten Fehler der Refractionstafeln zu eliminiren, wird auf beiden Stationen auch ein und derselbe Fixstern oder besser noch mehrere symmetrisch zum Monde und mit ihm nahe auf demselben Parallelkreis liegende beobachtet. Bringt man dann an das Mittel der angenommenen Deklinationen dieser Sterne den auf beiden Stationen beobachteten Deklinationsunterschied gegen den Mondrand an, so erhält man die Deklination dieses Randes, nur behaftet mit dem Einflusse der Parallaxe. Es seien nun δ und δ' die geocentrische und die beobachtete scheinbare Deklination des Mondrandes, D die geocentrische Deklination des Mondcentrums, R und R' seien der wahre und der scheinbare Mondradius, π die Aequatorealhorizontalparallaxe zur Zeit der Beobachtung. Es ist dann

$$D = \delta \mp R, \text{ wenn der } \frac{\text{nördliche}}{\text{südliche}} \text{ Rand beobachtet ist}$$

$$\sin(D - \delta') = \sin(\delta - \delta')\cos R \mp \cos(\delta - \delta')\sin R = \sin(\delta - \delta') \mp \sin R + \\ - 2\sin(\delta - \delta')\sin^2 \tfrac{1}{2} R \pm 2 \sin R \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta - \delta').$$

Für die Maximalwerthe $R = 16'$, $\delta - \delta' = 1° \, 4'$ ist der Betrag des dritten Gliedes $0''{\cdot}04$, der des vierten $0''{\cdot}16$; jenes kann mit Näherungswerthen von R und π scharf berechnet werden, während dieses eliminirt wird dadurch, dass man abwechselnd den Nord- und Südrand beobachtet. Für die weitere Entwickelung scheiden also diese beiden Correctionen aus. Führen wir ein $\sin(\delta - \delta') = \rho \sin \pi \sin[\zeta - (\varphi - \varphi')]$, wo ζ die beobachtete scheinbare Zenithdistanz des Mondrandes ist, und bezeichnen durch k das Verhältniss des linearen Mondradius s und des äquatorealen Erdradius a, so dass, da

$$\sin \pi = \frac{a}{\Delta} \qquad \sin r = \frac{s}{\Delta} \qquad (\Delta = \text{Entfernung des Mondes von der Erde}),$$
$$\sin R = k \sin \pi$$

wird, so erhalten wir

$$\sin(D - \delta') = \sin \pi \left\{\rho \sin[\zeta - (\varphi - \varphi')] \mp k\right\}.$$

Dieser Ausdruck gilt für die nördliche Station. Auf der südlichen wirkt die Parallaxe in entgegengesetzter Richtung, während die Differenz der geocentrischen Deklination des Randes und des Mittelpunktes die gleiche ist. Nennen wir also φ_1 die südliche Breite der zweiten Station, die also gleichfalls als positive Grösse zu behandeln ist, so haben wir für die correspondirende Beobachtung

$$\sin(D_1 - \delta_1') = -\sin \pi_1 \left\{\rho_1 \sin[\zeta_1 - (\varphi_1 - \varphi_1')] \pm k\right\}.$$

Um den Einfluss der Abplattung des Erdkörpers explicite zu erhalten, führen wir unter der nach dem früher gesagten statthaften Beschränkung auf die erste Potenz dieser Grösse ein

$$\rho = 1 - \alpha \sin^2 \varphi \qquad \varphi - \varphi' = \alpha \sin 2\varphi$$

und haben

$$\rho \sin[\zeta - (\varphi - \varphi')] = (1 - \alpha \sin^2 \varphi) \sin(\zeta - \alpha \sin 2\varphi) = \sin \zeta - \alpha(\sin^2 \varphi \sin \zeta + \sin 2\varphi \cos \zeta),$$

da $\cos(\varphi - \varphi')$ von der Einheit nur um ein Glied von der Ordnung von α^2 verschieden ist. Dadurch wird nun

$$D = \delta' + (\sin\zeta \mp k)\frac{\sin\pi}{\sin 1''} - \alpha\frac{\sin\pi}{\sin 1''}(\sin^2\varphi\sin\zeta + \sin 2\varphi\cos\zeta) + (\sin\zeta \mp k)^3\frac{\sin^3\pi}{6\cdot\sin 1''}$$

$$D_1 = \delta_1' - (\sin\zeta_1 \pm k)\frac{\sin\pi_1}{\sin 1''} + \alpha\frac{\sin\pi_1}{\sin 1''}(\sin^2\varphi_1\sin\zeta_1 + \sin 2\varphi_1\cos\zeta_1) - (\sin\zeta_1 \pm k)^3\frac{\sin^3\pi_1}{6\cdot\sin 1''}.$$

Sei nun t die Zeit der Beobachtung bezogen auf den Meridian des Ephemeridenortes und für einen naheliegenden Zeitpunkt T seien der Ephemeride entnommen: die stündliche Aenderung $\frac{dD}{dt}$ der Deklination des Mondes, die Parallaxe P und ihre stündliche Aenderung $\frac{dP}{dt}$. Bei der Genauigkeit der Tafeln können wir annehmen, dass die stündlichen Aenderungen $\frac{dD}{dt}$ und $\frac{dP}{dt}$ fehlerfrei sind und dass auch das Verhältniss der dem Augenblicke der Beobachtung entsprechenden Parallaxe zur mittleren Parallaxe genau bekannt ist, so dass wir setzen können $\pi = \frac{p}{p_0}\pi_0$, wo p_0 die den Tafeln zu Grunde liegende, π_0 aber die wirkliche mittlere Parallaxe des Mondes und p die aus den Tafeln für die Zeit der Beobachtung entnommene Parallaxe ist. Wir haben dann zu setzen

$$D = D_0 + (t - T)\frac{dD}{dt}$$

$$\sin\pi = \sin\left\{\frac{P}{p_0}\pi_0 + (t - T)\frac{dP}{dt}\right\} = \sin\frac{P}{p_0}\pi_0 + \cos\frac{P}{p_0}\pi_0\,(t - T)\frac{dP}{dt},$$

oder wenn wir $\frac{P}{p_0} = \mu$ setzen

$$= \mu\sin\pi_0 + \cos P(t - T)\frac{dP}{dt}.$$

Die Beobachtung führt also zu folgender Bedingungsgleichung:

$$D_0 + (t - T)\frac{dD}{dt} = \delta' + (\sin\zeta \mp k)\mu\sin\pi_0 + (\sin\zeta \mp k)\cos P(t - T)\frac{dP}{dt} +$$
$$- \alpha\frac{\mu\sin\pi_0}{\sin 1''}(\sin^2\varphi\sin\zeta + \sin 2\varphi\cos\zeta) + (\sin\zeta \mp k)^3\frac{\sin^3 P}{6\cdot\sin 1''}$$

oder wenn wir setzen

$$\Delta' = \delta' + (T - t)\frac{dD}{dt} - (\sin\zeta \mp k)\cos P(T - t)\frac{dP}{dt} + (\sin\zeta \mp k)^3\frac{\sin^3 P}{6\cdot\sin 1''}$$

$$D_0 = \Delta' + \mu\sin\pi_0(\sin\zeta \mp k) - \alpha\frac{\mu\sin\pi_0}{\sin 1''}(\sin^2\varphi\sin\zeta + \sin 2\varphi\cos\zeta).$$

In dieser Gleichung können wir Δ' als eine uns durch die Beobachtung und die Ephemeride genau gegebene Grösse betrachten und aus einer Reihe solcher Gleichungen können wir also π_0 bestimmen. Die südliche Station ergiebt die Gleichung

$$D_0 + (t_1 - T)\frac{dD}{dt} = \delta_1' - (\sin\zeta_1 \pm k)\mu\sin\pi_0 - (\sin\zeta_1 \pm k)\cos P(t_1 - T)\frac{dP}{dt} +$$
$$+ \alpha\frac{\mu\sin\pi_0}{\sin 1''}(\sin^2\varphi_1\sin\zeta_1 + \sin 2\varphi_1\cos\zeta_1) - (\sin\zeta_1 \pm k)^3\frac{\sin^3 P}{6\cdot\sin 1''}$$

$$\Delta_1' = \delta_1' + (T - t_1)\frac{dD}{dt} + (\sin\zeta_1 \pm k)\cos P(T - t_1)\frac{dP}{dt} - (\sin\zeta_1 \pm k)^3\frac{\sin^3 P}{6\cdot\sin 1''},$$

$$D_0 = \Delta_1' - \mu\sin\pi_0(\sin\zeta_1 \pm k) + \alpha\frac{\mu\sin\pi_0}{\sin 1''}(\sin^2\varphi_1\sin\zeta_1 + \sin 2\varphi_1\cos\zeta_1).$$

Durch Subtraction der beiden Bedingungsgleichungen wird schliesslich

$$\Delta_1' - \Delta' = \mu \sin \pi_0 \left\{ (\sin \zeta + \sin \zeta_1) - \frac{\alpha}{\sin 1''} \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi \sin \zeta + \sin 2\varphi \cos \zeta \\ + \sin^2 \varphi_1 \sin \zeta_1 + \sin 2\varphi_1 \cos \zeta_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Durch die Verbindung je zweier zusammengehöriger Beobachtungen erhalten wir also eine Reihe von Gleichungen von der Form $n = \sin \pi_0 (a - \alpha b)$, aus deren Gesammtheit wir π_0 und α zu bestimmen hätten. In der That sind aber die Werthe, die der Coëfficient b annehmen kann, von einander zu wenig verschieden. Die Sternwarten der nördlichen Halbkugel liegen unter zu wenig verschiedener Breite und auf der südlichen Halbkugel giebt es nur wenige Sternwarten unter wieder ähnlicher Breite. Es ist daher nicht möglich α selbst zu bestimmen, und muss man sich begnügen, π_0 als Function von α darzustellen. Erst durch Einführung einer dritten Station in der Nähe des Aequators würde man eine genügende Verschiedenheit der Coëfficienten herbeizuführen vermögen. Nach dem ersten im Jahre 1705 durch WAGNER in Berlin und KOLB am Cap der guten Hoffnung unternommenen Versuch einer Anwendung dieser Methode, der durch KOLB's Verschulden nicht zum Ziele führte, wurden in den Jahren 1751—53 durch LACAILLE am Cap der guten Hoffnung Beobachtungen des Mondes angestellt, die in Verbindung mit correspondirenden Beobachtungen zu Greenwich, Paris, Berlin und Bologna zu einer guten Bestimmung der Parallaxe führten. Diese Beobachtungen sind von Verschiedenen bearbeitet; OLUFSEN[1]) hat nach den vorhin gegebenen Formeln aus denselben für die mittlere Parallaxe des Mondes den Werth $57' \, 2''{\cdot}95$ (nach Einführung des BESSEL'schen Werthes der Abplattung des Erdkörpers) abgeleitet, der durch die neueren Beobachtungen nur unwesentlich verbessert ist.

In der Praxis wird auch jetzt noch meistens der in den HANSEN'schen Mondtafeln abgeleitete Werth der Parallaxe angewandt, der nicht aus direkten Beobachtungen des Mondes, sondern aus der Mondtheorie selbst hervorgegangen ist. Die Grundlagen desselben sind folgende: Nennen wir r die halbe grosse Axe der Mondbahn, T die Umlaufszeit des Mondes, m seine Masse, M die Masse der Erde und k die GAUSS'sche Constante der Anziehungskraft, so ist nach dem 3. KEPLER'schen Gesetze

$$T^2 = \frac{4 \, \pi^2 \, r^3}{k^2 (M + m)} \qquad \pi = 3{\cdot}14159$$

Wir erhalten also die der Entfernung r entsprechende Parallaxe, wenn wieder a der aequatoreale Erdradius ist, durch

$$\sin \pi = \frac{a}{r} = a \left(\frac{4 \, \pi^2}{T^2 k^2 (M + m)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

In diesem Ausdrucke ist a durch die geodätischen Messungen, T^2 durch die Mondbeobachtungen gegeben. k^2 ist zu ermitteln durch die Beobachtungen der Länge des einfachen Secundenpendels. Nennen wir dieselbe l und g die Schwerkraft an der Erdoberfläche, so ist $l = g \dfrac{1}{\pi^2}$. Die Schwerkraft setzt sich zusammen aus der Anziehungskraft g_0 des Erdkörpers und aus der in die Richtung der Schwere fallenden Componente der Centrifugalkraft $\dfrac{4 \pi^2 \rho \cos^2 \varphi^1}{\tau^2}$ (ρ, φ^1 Erdradius und geocentrische Breite, τ Umdrehungszeit der Erde). Nach

[1]) Astronomische Nachrichten Bd. XIV, pag. 226.

der Potentialtheorie ist für das Sphäroid $g_0 = k^2 \frac{M}{\rho^2}$, wenn wir für ρ denjenigen Werth substituiren, welcher der Bedingung $\sin \varphi' = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ genügt. Bezeichnen wir die dieser Bedingung genügenden Werthe durch (ρ) und (φ'), so ist also

$$g = k^2 \frac{M}{(\rho)^2} - \frac{4 \, \textcircled{\pi}^2 (\rho) \cos^2 (\varphi')}{\tau^2}$$

$$\frac{k^2}{\textcircled{\pi}^2} = \frac{1}{M} (\rho)^2 \left(l + \frac{4 (\rho) \cos^2 (\varphi')}{\tau^2} \right) = a^2 \frac{l'}{M}$$

wobei

$$l' = l \left[1 - \alpha \sin^2 \varphi + \tfrac{5}{2} \alpha^2 (\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) \right]^2 \left(1 + \frac{4 (\rho) \cos^2 (\varphi')}{l \tau^2} \right)$$

ist. Folglich wird

$$\sin \pi = \left[\frac{M}{M+m} \cdot \frac{a}{l'} \cdot \frac{4}{T^2} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Um zur mittleren Parallaxe überzugehen, ist es nun noch nothwendig, diesen Werth von $\sin \pi$ zu multipliciren mit dem Verhältniss der halben grossen Axe der Mondbahn zur mittleren Entfernung des Mondes, d. i. in der Mondtheorie die von den periodischen Gliedern des Ausdrucks des Radius vector und der Störungen befreite Entfernung. Der Werth dieses Verhältnisses ist der Mondtheorie zu entlehnen; HANSEN giebt ihn = 1·006537 und damit wird dann

$$\sin \pi_0 = 1{\cdot}006537 \left[\frac{M}{M+m} \cdot \frac{a}{l'} \cdot \frac{4}{T^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

HANSEN fand auf diesem Wege $\pi_0 = 57' \, 2''{\cdot}27$, ein Werth, der mit dem aus den direkten Mondbeobachtungen abgeleiteten innerhalb der zulässigen Fehler übereinstimmt. Mit Benutzung der aus den besten Beobachtungen der neuesten Zeit bestimmten Werthe für die verschiedenen Constanten berechnet NEWCOMB in seinem Werke: »The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy. Washington 1895« auf diesem Wege $\pi_0 = 57' \, 2''{\cdot}71$ und dies ist wohl derjenige Werth, der nach unserer jetzigen Kenntniss der Wahrheit am nächsten kommt. Der Ausdruck $\frac{\sin \pi_0}{\sin 1''}$ ausgedrückt in Bogenmaass, wird bezeichnet als die Constante der Mondparallaxe. Sie ist nach NEWCOMB = $3422''{\cdot}55$.

Die Sonnenparallaxe, d. i. der Winkel, unter welchem in der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne der äquatoreale Erdradius erscheint, wurde von PTOLEMÄUS nach der früher erwähnten HIPPARCH'schen Methode zu 2′ 50″ bestimmt, und obwohl dieser Werth 20fach zu gross ist, dauerte es doch 1800 Jahre bis man die Richtigkeit dieser Bestimmung zu bezweifeln begann. Aber erst KEPLER's drittes Gesetz eröffnete die Möglichkeit einer sicheren Bestimmung dieser fundamentalen Constante für alle Entfernungen im Weltall. Indem es den Zusammenhang der mittleren Entfernungen der Planeten enthüllte, setzte es uns in den Stand, alle Entfernungen im Sonnensystem auszudrücken durch die als Einheit angenommene mittlere Entfernung der Erde von der Sonne und so aus jeder beobachteten Entfernung der Erde von einem Planeten unsere Einheit ableiten zu können. Man hat daher seit KEPLER's Zeiten auch nicht mehr versucht, durch direkte Beobachtungen der Sonne ihre Parallaxe zu bestimmen, sondern stets den indirekten Weg gewählt unter Benutzung der sich darbietenden günstigsten Verhältnisse. Die Bestimmung der Parallaxe wird um so leichter, der Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf das schliess-

liche Resultat — die Sonnenparallaxe — um so kleiner, je grösser die durch die Beobachtung zu bestimmende Parallaxe ist, d. h. je näher der zu beobachtende Planet der Erde steht. Es kommen nun aber nur Mercur, Venus, Mars und einzelne der kleinen Planeten zu der Erde in Entfernungen, die kleiner sind als die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, und nur diese können also für die Lösung der Aufgabe in Betracht kommen. Die kleinste Entfernung des Mercur von der Erde ist 0·517 ausgedrückt in Einheiten der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne. Seine Parallaxe ist dann also das 1·93fache der Sonnenparallaxe. Direkte Beobachtungen des Mercur sind nun aber nicht nur schwer zu erlangen, sondern auch meistens recht unsicher, wegen der Nähe zur Sonne. Nur wenn er zur Zeit der Conjunction, in welche ja auch die Zeit der grössten Erdnähe fällt, so steht, dass er sich auf die Sonnenscheibe projicirt, ist eine sicherere relative Messung der gegenseitigen Stellung möglich. Diese steht dann aber nur unter der Wirkung der Differenz der Parallaxen, gestattet also nur die Bestimmung des 0·93fachen Betrages der Sonnenparallaxe. Da sich nun auch in der relativen Ortsbestimmung eine sehr grosse Genauigkeit in diesem Falle nicht erzielen lässt, so bietet der Mercur kein geeignetes Mittel zur Lösung der Aufgabe. Die mittlere Entfernung der Venus von der Erde zur Zeit der Conjunction ist = 0·277, die Parallaxe der Venus also gleich dem 3·61fachen der Sonnenparallaxe. Findet gleichzeitig ein Vorübergang vor der Sonnenscheibe statt, so tritt in den Beobachtungen der 2·61fache Betrag der Sonnenparallaxe zu Tage. Diese Erscheinungen müssen daher für die Bestimmung von grösster Wichtigkeit sein, wie zuerst HALLEY zeigte. Sie ereignen sich aber nur in Intervallen von abwechselnd 130 oder 113 Jahren, treten dann aber stets paarweise im Abstande von 8 Jahren ein. Mars nähert sich zur Zeit der Opposition der Erde im günstigsten Falle bis auf 0·365 Erdbahnradien, er bietet also, da auch die Beobachtungsverhältnisse günstige sind, gleichfalls ein sehr geeignetes Mittel. Die Entfernung der kleinen Planeten kann bei einzelnen bis auf 0·8 herabgehen. Da ihre Beobachtung die denkbar grösste Genauigkeit zu erzielen gestattet, ist es möglich, auch sie mit Vortheil zu verwenden. Des erst im August dieses Jahres entdeckten Planeten 1898 DQ, der der Erde noch näher kommt als Mars und für die Aufgabe der Bestimmung der Sonnenparallaxe ganz neue Gesichtspunkte eröffnet, kann hier nur kurz gedacht werden.

Die Bestimmung der Parallaxe eines Gestirns durch einen einzelnen Beobachter erfordert die mikrometrische Messung des parallactischen Ortes des Gestirnes gegen einen oder mehrere Fixsterne zu zwei möglichst verschiedenen Werthen des parallactischen Faktors entsprechenden Zeitpunkten. Die Beobachtung bezieht sich auf die Rectascensionsdifferenz oder auf die Deklinationsdifferenz oder auf Positionswinkel und Distanz.

Für die Anwendung der beiden ersteren Methoden hat man zwei Sterne auszusuchen, die den Planeten möglichst symmetrisch umschliessen und ihm so nahe stehen, dass man alle drei Objecte ohne eine Verstellung des Fernrohres beim Passiren des Gesichtsfeldes beobachten kann. Wählt man die Rectascension zum Gegenstande der Beobachtung, so liefert jeder Durchgang drei Gleichungen in folgender Art

für den ersten Stern $\alpha_1 = t_1 + s + \varphi(\delta_1, s)$
„ „ Planeten $\alpha = t + s + \varphi(\delta, s) - p_\alpha \cdot \pi$
„ „ zweiten Stern $\alpha_2 = t_2 + s + \varphi(\delta_2, s)$,

worin α die Rectascension, t die Durchgangszeit, s den Stundenwinkel des Fernrohres, p_α den parallactischen Coëfficienten bedeutet und φ eine vom Stunden-

winkel und der Deklination abhängige Function ist, welche den Einfluss der Aufstellungsfehler des Instrumentes und der Refraction auf den Stundenwinkel angiebt. Wenn wir unter α_0, t_0 das Mittel der Rectascensionen, bezw. der Durchgangszeiten der beiden Sterne verstehen, so erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$\alpha - \alpha_0 = t - t_0 - \tfrac{1}{2}[\varphi(\delta_1, s) + \varphi(\delta_2, s)] + \varphi(\delta, s) - p_\alpha \pi.$$

Die wegen der Aufstellungsfehler und Refraction anzubringende Correction lässt sich darstellen als eine Function der Deklinationsdifferenz $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) - \delta$. Man hat sie zu berechnen nach den in dem Artikel »Mikrometermessungen« gegebenen Vorschriften, kann aber auch ihre Abhängigkeit vom Stundenwinkel aus den erhaltenen Gleichungen selbst ableiten; der Betrag dieser Correction sei Δ. Hat man nun zwei Beobachtungen in verschiedenen Stundenwinkeln angestellt und bezeichnet die der zweiten Beobachtung angehörigen Grössen durch einen hinzugefügten Strich, so setzt man

$$\alpha' - \alpha = (t' - t)\frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{2}(t' - t)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \ldots\ldots,$$

wo

$$\frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d^2\alpha}{dt^2}\ \ldots$$

die Differentialquotienten der Rectascension sind. Die Aenderung der scheinbaren Rectascension des Sternes sei noch $d\alpha^*$, dann wird

$$(t' - t)\frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{2}(t' - t)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} - d\alpha^* = (t' - t_0') - (t - t_0) + (\Delta - \Delta') + (p_\alpha - p_\alpha')\pi.$$

In dieser Gleichung sind alle Grössen durch die Beobachtung oder die Ephemeride bekannt, sie kann also zur Bestimmung von π dienen.

In ganz analoger Weise wären die Beobachtungen der Deklinationsdifferenzen zu behandeln, nur dass man hier auf die Aufstellungsfehler keine Rücksicht zu nehmen hat, weil dieselben die Messung der Deklinationsdifferenzen nicht entstellen, wenn sie so klein sind, dass ihre Quadrate und Produkte zu vernachlässigen sind.

Die Ausdrücke der parallactischen Coëfficienten sind nach pag. 319

$$p_\alpha = -\rho \cos\varphi' \sec\delta \sin(\Theta - \alpha) \qquad p_\delta = \rho\cos\varphi' \sin\delta\cos(\Theta - \alpha) - \rho\sin\varphi'\cos\delta.$$

Da der zweite Theil des Ausdrucks von p_δ constant ist, so sehen wir, dass es für eine vortheilhafte Anwendung beider Methoden nothwendig ist, dass φ' klein, der Beobachtungsort also in der Nähe des Aequators liege. Da δ natürlicher Weise stets verhältnissmässig klein ist, so wird p_α zwischen Grenzen schwanken, die nahe bei $+1$ und -1 liegen; p_δ dagegen schwankt wegen der Kleinheit von $\sin\delta$ immer nur zwischen engen Grenzen, so dass sich Deklinationsdifferenzen bei Beobachtung an einem einzigen Ort nicht zur Ermittelung der Parallaxe eignen.

Für die Anwendung der Methode der Rectascensionsdifferenzen ist es vor allem nothwendig, dass man im Besitze einer guten Uhr ist und dass man über eine etwa vorhandene tägliche Periode im Gange derselben unterrichtet ist, weil diese die zu ganz verschiedenen Tageszeiten, Morgens und Abends, gemessenen Rectascensionsdifferenzen in verschiedener Weise beeinflussen müsste und aus dem Resultate nicht zu eliminiren ist. Die erste Anwendung der Methode führte CASSINI aus am Mars; er erhielt ein für damalige Zeit recht befriedigendes Resultat. In unserer Zeit ist die Methode besonders wieder durch

AIRY empfohlen und im Jahre 1878 hat MAXWELL HALL[1]) sie von neuem auf den Mars angewandt.

Benutzt man zur Bestimmung des relativen Ortes des Planeten die Messung durch Positionswinkel und Distanz, so empfiehlt sich der Gebrauch eines Heliometers, einmal der grösseren Genauigkeit wegen, dann aber auch wegen der Möglichkeit, grössere Entfernungen sicher zu messen, wodurch die Anzahl der Vergleichsterne sich wesentlich reducirt. Als Resultat der Messung können wir in dem sphärischen Dreieck zwischen dem Pol, dem Stern und dem Planeten betrachten die Länge Δ der Seite Stern-Planet und das Mittel der beiden dieser Seite anliegenden Winkel p_0. Nennen wir A, D die Coordinaten des Planeten, α, δ diejenigen des Sternes, so bestehen zwischen den scheinbaren aus der Ephemeride mit der angenommenen Parallaxe berechneten Grössen die Relationen

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta' \cos p_0' = \cos\tfrac{1}{2}(A' - \alpha) \sin\tfrac{1}{2}(D' - \delta) = \mu'$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta' \sin p_0' = \sin\tfrac{1}{2}(A' - \alpha) \cos\tfrac{1}{2}(D' + \delta) = \nu'.$$

Durch Differentiation und Trennung der Differentiale erhalten wir daraus, wenn wir zunächst A und D als fehlerfrei annehmen

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta'\, dp_0' = -\sin p_0'\, d\mu' + \cos p_0'\, d\nu'$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta'\, d\frac{\Delta'}{2} = \cos p_0'\, d\mu' + \sin p_0'\, d\nu'.$$

Führen wir nun die geocentrischen Grössen ein, so haben wir

$$\mu' = \cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(D-\delta) - \sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(D-\delta)\frac{dA}{2} + \cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(D-\delta)\frac{dD}{2}.$$

Auf der rechten Seite ist der erste Ausdruck der Werth, den μ' im Erdmittelpunkte annimmt $= \mu$, die beiden anderen geben den Einfluss der parallactischen Aenderung der Coordinaten auf μ an, oder wenn wir annehmen, dass wir nicht die volle Parallaxe, sondern nur eine Correction eines angenommenen nahe richtigen Werthes derselben suchen, den Einfluss dieser Correction. Wir schreiben also

$$\mu' = \mu + f(A, D)\pi,$$

und können nun wegen der Kleinheit von $d\pi$ $f(A, D)$ als von $d\pi$ unabhängig ansehen und erhalten

$$d\mu' = f(A, D)\,d\pi = \frac{\mu' - \mu}{\pi}\,d\pi$$

ebenso

$$d\nu' = \frac{\nu' - \nu}{\pi}\,d\pi$$

und damit

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta'\, dp_0' = \left\{-\sin p_0'(\mu' - \mu) + \cos p_0'(\nu' - \nu)\right\}\frac{d\pi}{\pi}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta'\, d\Delta' = 2\left\{\cos p_0'(\mu' - \mu) + \sin p_0'(\nu' - \nu)\right\}\frac{d\pi}{\pi}.$$

Zur Ermittelung der Abhängigkeit der Grössen Δ' und p_0' von den Correctionen dA und dD der geocentrischen Coordinaten des Planeten benutzen wir die Näherungswerthe

$$\Delta' \cos p_0' = D' - \delta \qquad \Delta' \sin p_0' = (A' - \alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta + D'),$$

welche, wenn Δ', wie wir voraussetzen, nicht grösser als etwa 2° ist, und die gesuchten Correctionen dA dD klein genug sind, um die Berechnung der Coëffi-

[1]) Memoirs of the roy. astr. Soc. Vol. XXXXIV.

cienten 4 stellig ausführen zu dürfen, mit den strengen völlig übereinstimmende Werthe geben. Wir erhalten dann

$$-\Delta' \sin p'\, dp + \cos p'\, d\Delta = dD$$

$$\Delta' \cos p'\, dp + \sin p'\, d\Delta = \cos \frac{\delta + D'}{2}\, dA - \sin \frac{\delta + D'}{2} \frac{A' - \alpha}{2}\, dD$$

$$\Delta' dp' = -\sin p' \left(1 + \frac{\Delta'}{2} \operatorname{tang} \frac{\delta + D'}{2} \cos p'\right) dD + \cos p' \cos \frac{\delta + D'}{2}\, dA$$

$$d\Delta = \cos p' \left(1 - \frac{\Delta'}{2} \operatorname{tang} \frac{\delta + D'}{2} \sin p' \operatorname{tang} p'\right) dD + \sin p' \cos \frac{d + D'}{2}\, dA.$$

Die vollständigen Bedingungsgleichungen lauten also:

$$\Delta = \Delta' + 2 \frac{\cos p'(\mu' - \mu) + \sin p'(\nu' - \nu)}{\cos \frac{1}{2} \Delta'} \frac{d\pi}{\pi} + \sin p' \cos \frac{\delta + D'}{2}\, dA +$$

$$+ \cos p' \left[1 - \frac{\Delta'}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta + D') \sin p' \operatorname{tang} p'\right] dD$$

$$p_0 = p_0' - \frac{\sin p'(\mu' - \mu) - \cos p'(\nu' - \nu)}{\sin \frac{1}{2} \Delta'} \frac{d\pi}{\pi} + \cos p' \cos \frac{\delta + D'}{2} \frac{dA}{\Delta'} +$$

$$- \sin p' \left[1 + \frac{\Delta'}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta + D') \cos p'\right] \frac{dD}{\Delta'}.$$

Unter dA und dD sind hier streng genommen die Correctionen $d(A - \alpha)$ $d(D - \delta)$ zu verstehen. Die Trennung der beiden Correctionen ist aber nur durchführbar, wenn die Vergleichung mit mehreren Sternen ausgeführt ist und wenn man annehmen kann, dass die $d\alpha$, $d\delta$ von Stern zu Stern wechseln und keinen systematischen Charakter haben. Führen wir weiter eine Reihe von Vergleichungen des Planeten mit einem Sterne aus und stellen die Bedingungsgleichungen auf, so müssen wir bei der Auflösung annehmen, dass dA und dD — die Correctionen der Ephemeride des Planeten — constant sind; anderenfalls müssten wir für diese Grössen einen die Zeit enthaltenden Ausdruck $dA + (t - t_0)d^2A + \ldots$ einführen.

Angewandt ist diese Methode zuerst im Jahre 1874; damals schlossen die deutschen Astronomen die Venus an nahestehende Fixsterne an, während Gill auf Mauritius sie an Juno versuchte. Im Jahre 1877 beobachtete Gill nach derselben Methode den Mars auf Ascension, und das erhaltene Resultat zählt zu den sichersten, die durch Beobachtungen erlangt sind (vergl. Memoirs of the Royal astronomical Society, Vol. XLVI).

Für die Anwendung der besprochenen Methoden eignet sich die Venus nicht, weil wegen der Schnelligkeit ihrer Bewegung die Zahl der Sterne zu gross sein müsste und die Voraussetzung der Constanz der Tafelfehler jedenfalls nicht erlaubt wäre. Man müsste also durch sonstige Beobachtungen die Ephemeride controlliren. Auch die die Beobachtungen erschwerende und unsicher machende Nähe der Venus zur Sonne ist hinderlich. Nur in einem Falle treten diese Uebelstände verhältnissmässig zurück. Wenn nämlich die Venus in die Nähe der Umkehrpunkte in ihrem scheinbaren Laufe kommt, wo ihre mittlere Entfernung = 0·34, ihre Parallaxe also das dreifache der Sonnenparallaxe ist, lässt sich die Correction der Ephemeride leichter aus Meridianbeobachtungen entnehmen. Die Verhältnisse sind um so günstiger, je näher die Stillstände in den beiden Coordinaten an einander liegen. Ein Versuch, auf diesem Wege die Sonnenparallaxe zu ermitteln, ist in den Jahren 1847—50 durch eine unter Gilliss Leitung stehende Expedition nach Chili ausgeführt. Der Erfolg entsprach aber nicht den Erwartungen.

Zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen an verschiedenen Stationen kann man die bisher besprochenen Methoden gleichfalls verwenden. Wegen der Schwierigkeit der Bestimmung genauer Längendifferenzen hat man sich aber bisher darauf beschränkt, die Stationen in einer zur Bewegungsrichtung des Planeten senkrechten Zone auszuwählen, so dass im wesentlichen nur die Parallaxe in der Richtung der Deklination zur Geltung kam. Von der Methode der Rectascensionsdifferenzen, welche 2 Stationen unter nahe gleicher Polhöhe erfordert, deren eine den Planeten in grossem westlichen, die andere in grossem östlichen Stundenwinkel gleichzeitig sieht, ist bisher eine Anwendung noch nicht gemacht. Die Methode der Deklinationsdifferenzen ist dagegen, seit GALLE ihre grossen Vorzüge und die zu erwartende Sicherheit des Resultates bei ihrer Anwendung auf die kleinen Planeten hervorgehoben, verschiedentlich angewandt[1]) und erscheint durchaus geeignet, zu sicheren Resultaten zu führen. Auf GILL's Anregung ist in der letzten Zeit auch die Methode der heliometrischen Bestimmung der Parallaxe durch Anschluss kleiner Planeten an benachbarte Sterne häufiger angewandt. Es haben sich nach den von GILL ausgearbeiteten Programmen an der Messung die Sternwarte am Cap und mehrere der mit Heliometern ausgerüsteten nördlichen Sternwarten betheiligt, nämlich die Sternwarten am Yale College, in Göttingen, Bamberg und Leipzig.

Die Resultate der in den Jahren 1888 und 1889 ausgeführten Beobachtungen liegen zur Zeit noch nicht in definitiver Form vor[2]), doch ist über dieselben im Bulletin astronomique XIII, pag. 319 ein Bericht gegeben, aus dem die Ueberlegenheit der Methode über alle anderen rein trigonometrischen aus der vorzüglichen inneren Uebereinstimmung der Beobachtungsergebnisse und der Kleinheit des wahrscheinlichen Fehlers des Endresultates überzeugend hervorgeht. Aus den drei bei den Beobachtungen benutzten Planeten folgten die Einzelwerthe der Sonnenparallaxe:

Aus Beobachtungen der Victoria	$\pi = 8''\cdot8013$	*w. F.*	$\pm 0''\cdot0061$
„ „ „ Sappho	$8''\cdot7981$		$\pm 0''\cdot0114$
„ „ „ Iris	$8''\cdot8120$		$\pm 0''\cdot0090$

und aus der Zusammenfassung aller Beobachtungen

$$\pi = 8''\cdot8036 \quad w.\ F.\ \pm 0''\cdot0046.$$

Als Beweis, dass bei richtiger Anordnung der Beobachtungen das Resultat frei ist von systematischen Fehlern sowohl instrumenteller als auch persönlicher Natur, können die folgenden Thatsachen dienen. Die Beobachtungen der Victoria am Cap ergeben für sich allein behandelt nach der pag. 329 auseinander gesetzten Methode $\pi = 8''\cdot8014$ *w. F.* $\pm 0''\cdot0108$, also einen mit dem aus der Gesammtheit aller Beobachtungen an den 5 Stationen vollkommen identischen Werth. Die Sappho-Beobachtungen sind zur Ableitung der folgenden 4 Einzelwerthe combinirt:

Aus Beobachtungen am Cap und am Yale College	$\pi = 8''\cdot797$	*w. F.*	$\pm 0''\cdot020$
„ „ „ „ „ in Leipzig	$8''\cdot798$		$\pm 0''\cdot027$
„ „ „ „ „ „ Göttingen	$8''\cdot834$		$\pm 0''\cdot031$
„ „ „ „ „ „ Bamberg	$8''\cdot725$		$\pm 0''\cdot056$

[1]) J. G. GALLE: Ueber eine Bestimmung der Sonnenparallaxe aus correspondirenden Beobachtungen des Planeten Flora. Breslau 1875.

[2]) Während des Druckes dieses Bandes ist die Veröffentlichung der definitiven Resultate in den Annals of the Cape Observatory erfolgt.

Es entsprechen also offenbar die berechneten *w. F.* vollkommen den der Methode innewohnenden Unsicherheiten. Als einzige aus den Beobachtungen nicht eliminirte und auch nicht zu eliminirende Fehlerquelle betrachtet GILL einen möglichen Unterschied in der Brechbarkeit des Lichtes des Planeten und des Sternes, welcher bei einer verschiedenen Färbung der beiden Objekte eintreten würde. Auf diese Fehlerquelle hatte GILL zuerst aufmerksam gemacht bei der Diskussion der oben erwähnten Marsbeobachtungen (Mem. of the R. A. Soc. XLVI, pag. 161), und gezeigt, dass, weil das rothe Licht des Mars eine geringere Brechbarkeit besitzt als das der Sterne und weil bei der nahen Gleichheit der Coëfficienten der Refraction und der Parallaxe eine Elimination dieses Einflusses nicht möglich ist, ein zu grosser Werth der Parallaxe folgen müsse. Im vorliegenden Falle liegt nur bezüglich der Iris ein schwacher Verdacht einer ähnlichen Störung vor. NEWCOMB findet (Fundamental constants of Astronomy, pag. 165), dass die Refraction für Lichtstrahlen der Wellenlänge *D* (gelb) und *E* (grün) bei 45° Höhe um 0''·11 verschieden ist und schliesst daraus, dass ein systematischer Fehler von 0''·02 bis 0''·03 in der durch die Vergleichung kleiner Planeten mit Sternen berechneten Parallaxe durch vollkommen zulässige Färbung des Lichtes des Planeten entstehen könne. Die Abweichung der aus den Iris-Beobachtungen berechneten Sonnenparallaxe von den übrigen Werthen derselben Grösse liegt aber noch ganz innerhalb des zulässigen, aus den zufälligen Beobachtungsfehlern allein hervorgehenden wahrscheinlichen Fehlers, so dass aus diesen Beobachtungen noch nicht entschieden werden kann, ob die erwähnte Fehlerquelle sich merklich macht.

Da die Parallaxe in Deklination ihr Maximum erreicht im Augenblicke des Meridiandurchganges der Gestirne, so ersetzt man bei der Methode der Deklinationsdifferenzen an mehreren Stationen zweckmässig das Aequatoreal durch den Meridiankreis. Man erlangt dadurch den Vortheil, dass man in der Wahl der Vergleichsterne weniger gebunden ist, da man zwischen den Durchgängen der einzelnen Objecte das Fernrohr innerhalb engerer Grenzen verstellen und die Drehung am Kreise ablesen kann. Man wird frei von den Fehlern der Distorsion des Gesichtsfeldes und ist sicher, dass die Fehler der Aufstellung des Instrumentes, die Biegung, die Refraction etc. alle in der einfachsten Form das Resultat beeinflussen, was für die Elimination von grösster Wichtigkeit ist. Man benutzt in der Regel 4 Anhaltsterne, von denen 2 dem Planeten vorangehen, 2 ihm folgen. Sind t und t_1 die Zeiten des Meridiandurchganges für 2 Beobachtungsorte bezogen auf den Meridian der Ephemeride, $\Delta\delta$ und $\Delta\delta_1$ die beobachteten Deklinationsdifferenzen gegen das Mittel δ der Deklinationen der Anhaltsterne, und sind $\frac{dD}{dt}, \frac{d^2D}{dt^2}$ die für das Mittel der Beobachtungszeiten geltenden Werthe der Differentialquotienten der Deklination, so ist die Bedingungsgleichung

$$(t-t_1)\frac{dD}{dt}+\frac{1}{2}(t-t_1)^2\frac{d^2D}{dt^2}-(\Delta\delta-\Delta\delta_1)=\pi[\rho\, sin(\varphi'-\delta-\Delta\delta)-\rho_1 sin(\varphi_1'-\delta-\Delta\delta_1)].$$

Nach dieser Methode beobachtete schon 1672 RICHER in Cajenne die Marsopposition; in der neuesten Zeit ist sie auf WINNECKE's Vorschlag bei mehreren Marsoppositionen wieder angewandt und die letzte im Jahre 1892 beobachtete Opposition, bei der man die grösste Sorgfalt anwandte und vor allem durch Benutzung eines Ocularprismas die constanten persönlichen Fehler der Einstellung zu eliminiren suchte, scheint in der That ein recht befriedigendes Resultat ergeben zu haben; doch steht eine zusammenfassende Publication zur Zeit noch

aus. Ueber frühere Anwendungen der Methode hat NEWCOMB in den Washington astronomical observations 1865 ausführlich berichtet.

Wir gehen nun über zur Besprechung derjenigen Methode der Bestimmung der Sonnenparallaxe, die lange Zeit als die vornehmste galt und die Astronomen, seit HALLEY zuerst in den Phil. Transactions 1691 ihre Vorzüge dargethan hatte, mit solch' grossen Hoffnungen erfüllte, dass sie bis in die neueste Zeit die anderen Methoden ganz und gar vernachlässigten. Es ist dies die auf die Beobachtung der Vorübergänge der Venus vor der Sonnenscheibe gegründete Methode. Als Resultat der Beobachtungen erhalten wir entweder die Zeiten der 4 Berührungen der Venus- und der Sonnenscheibe oder die Distanz der Mittelpunkte beider Scheiben, die entweder auf photographischem Wege oder durch Heliometer-Messungen gefunden wird. Zur Ermöglichung der Beobachtungen hat man sich vorher eine Ephemeride zu berechnen, aus der man den scheinbaren Positionswinkel der Verbindungslinie der Mittelpunkte für die genäherte muthmaassliche Zeit der Einstellung entnimmt. In dieser Richtung misst man dann die Entfernung der Ränder der beiden Scheiben. Nennen wir Δ' die Entfernung der Mittelpunkte, R' den Sonnen-, r' den Venusradius, so ergiebt also die Beobachtung die Grösse $R' \pm r' \pm \Delta'$. $R' + \Delta' \pm r'$ bezeichnet man als grosse Distanz, $R' - \Delta' \pm r'$ als kleine Distanz.

Im sphärischen Dreieck SVP zwischen den geocentrischen Oertern des Sonnenmittelpunktes, des Venusmittelpunktes und dem Pol des Aequators sei P der Positionswinkel der Distanz Δ im Sonnenmittelpunkte, A, D seien die Coordinaten des Sonnenmittelpunktes, a, d diejenigen des Venusmittelpunktes. Zwischen den geocentrischen Werthen dieser Grössen bestehen die Beziehungen

$$\mu = \sin\Delta \sin P = \cos d \sin (a - A)$$
$$\nu = \sin\Delta \cos P = \sin d \cos D - \cos d \sin D \cos (a - A).$$

(A. 374.)

Da Δ nie grösser werden kann als $18'$, begehen wir, wenn wir $\sin\Delta$ vertauschen mit $\Delta \sin 1''$, einen Fehler, der höchstens $0''\cdot005$ ausmachen kann und vernachlässigt werden darf. Sind $\Delta\mu$ und $\Delta\nu$ die Aenderungen, welche die Parallaxe auf die Werthe μ und ν ausübt, so ist also

$$\Delta' \sin P' - \Delta \sin P = \Delta\mu \qquad \Delta' \cos P' - \Delta \cos P = \Delta\nu$$

und wir erhalten

$$\Delta' \sin(P' - P) = \Delta\mu \cos P - \Delta\nu \sin P \quad \Delta' \cos(P' - P) - \Delta = \Delta\mu \sin P + \Delta\nu \cos P.$$

Setzen wir

$$(P' - P)_0 = \frac{\Delta\mu \cos P - \Delta\nu \sin P}{\Delta \sin 1''} \qquad (\Delta' - \Delta)_0 = \Delta\mu \sin P + \Delta\nu \cos P,$$

so ergiebt die Division der beiden Gleichungen und Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatz

$$P' - P = (P' - P)_0 - \frac{1}{\Delta} (P' - P)_0 (\Delta' - \Delta)_0,$$

während aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\Delta' - \Delta = (\Delta' - \Delta)_0 + \frac{\Delta}{2} (P' - P)^2 \sin^2 1''.$$

Die Differentiation der Ausdrücke für μ und ν und die Anwendung der im Dreieck PVS bestehenden Beziehungen führt auf folgende Werthe:

$$\Delta\cdot(P'-P)_0 = \cos d \cos p\, dA + \cos\Delta \sin P\, dD$$
$$- \cos d \cos p\, da - \sin p\, dd$$
$$\sec\Delta(\Delta'-\Delta)_0 = -\cos D \sin P\, dA - \cos P\, dD$$
$$+ \cos d \sin p\, da - \cos p\, dd.$$

Durch Anwendung der Formeln auf pag. 319 erhalten wir für die parallactischen Aenderungen der Coordinaten, wenn wir durch $\pi_\odot$ die Aequatorealhorizontalparallaxe der Sonne durch π diejenige der Venus bezeichnen, die Werthe

$$dA = \pi_\odot \rho \cos\varphi' \sec D \sin(A-\theta)$$
$$dD = \pi_\odot \rho \cos\varphi' \sin D \cos(A-\theta) - \pi_\odot \rho \sin\varphi' \cos D$$
$$da = \pi\rho \cos\varphi' \sec d \sin(a-\theta)$$
$$dd = \pi\rho \cos\varphi' \sin d \cos(a-\theta) - \pi\rho \sin\varphi' \cos d.$$

Führen wir in die Werthe von da und dd an Stelle von $a-\theta$ ein $(A-\theta)+(a-A)$, so erhalten wir für $(P'-P)_0$ und $(\Delta'-\Delta)_0$ Ausdrücke die sich mit Hilfe der Beziehungen zwischen den Stücken des Dreiecks PSV auf die Form bringen lassen:

$$\Delta(P'-P)_0 = -\rho\cos\varphi' \cos(A-\theta) \sin D \sin P(\pi - \pi_\odot \cos\Delta)$$
$$+ \rho\cos\varphi' \sin(A-\theta)\{\cos P(\pi - \pi_\odot\cos\Delta) + \operatorname{tang} D\,\pi_\odot \sin\Delta\}$$
$$+ \rho \sin\varphi' \cos D \sin P(\pi - \pi_\odot \cos\Delta)$$
$$\sec\Delta(\Delta'-\Delta)_0 = +\rho\cos\varphi' \cos(A-\theta)\{\sin D \cos P(\pi\cos\Delta - \pi_\odot) + \pi \cos D \sin\Delta\}$$
$$+ \rho\cos\varphi' \sin(A-\theta) \sin P(\pi\cos\Delta - \pi_\odot)$$
$$+ \rho\sin\varphi'\{-\cos D \cos P(\pi\cos\Delta - \pi_\odot) + \pi \sin\Delta \sin D\}.$$

In diese Gleichungen führen wir noch mit Hilfe der auf pag. 766 Bd. I gegebenen Beziehungen $(1-\alpha)\sin\varphi_1 = \rho\sin\varphi'$, $\cos\varphi_1 = \rho\cos\varphi'$ die excentrische Polhöhe ein. Sei weiter θ_0 die der Ortssternzeit θ entsprechende Sternzeit des Ephemeridenortes und $\Delta\lambda$ die östliche Länge des Beobachtungsortes, so haben wir nach Einführung von Hilfsgrössen folgendes Formelsystem:

$$\Delta \sin P = (a-A)\cos d$$
$$\Delta \cos P = (d-D) + \tfrac{1}{2}\cos d \sin D (a-A)^2 \sin 1''$$
$$v\sin(V-\theta_0+A) = \frac{1}{\Delta}[\cos P(\pi - \pi_\odot\cos\Delta) + \pi_\odot \operatorname{tang} D \sin\Delta]$$
$$v\cos(V-\theta_0+A) = -\frac{1}{\Delta}\sin D \sin P(\pi - \pi_\odot\cos\Delta)$$
$$w = \frac{1}{\Delta}(1-\alpha)\cos D \sin P(\pi - \pi_\odot \cos\Delta)$$
$$g\sin G = \cos P(\pi\cos\Delta - \pi_\odot) \qquad g\cos G = \pi\sin\Delta$$
$$v'\sin(V'-\theta_0+A) = \cos\Delta \sin P(\pi\cos\Delta - \pi_\odot)$$
$$v'\cos(V'-\theta_0+A) = \cos\Delta\, g\cos(D-G)$$
$$w' = \cos\Delta(1-\alpha) g \sin(D-G)$$
$$P'-P = [w\sin\varphi_1 + v\cos\varphi_1 \cos(V+\Delta\lambda)]\left[1 - \frac{w'}{\Delta}\sin\varphi_1 - \frac{v'}{\Delta}\cos\varphi_1\cos(V'+\Delta\lambda)\right]$$
$$\Delta'-\Delta = w'\sin\varphi_1 + v'\cos\varphi_1\cos(V'+\Delta\lambda) + \frac{\Delta}{2}(P'-P)^2\sin^2 1''.$$

Nach diesen von v. OPPOLZER »Ueber den Venusdurchgang des Jahres 1874. Wien 1873« gegebenen Ausdrücken berechnet man Tafeln, die mit dem Argument θ_0 die Grössen Δ, P, v, w, V, v', w', V' ergeben und mit deren Hilfe man für einen beliebigen, durch seine excentrische Breite φ_1 und seine östliche Länge $\Delta\lambda$ gegebenen Ort die parallactischen Werthe Δ' und P' findet.

Die parallactische Aenderung der Radien ist schon auf pag. 830 Bd. I abgeleitet; um sie auf die gleiche Form zu bringen, sei

$$C = R\pi_{\odot} \sin 1'' \sin D(1-\alpha) \qquad c = r\pi \sin 1'' \sin d(1-\alpha)$$
$$C_1 = R\pi_{\odot} \sin 1'' \cos D \qquad c_1 = r\pi \sin 1'' \cos d$$
$$C_2 = \theta_0 - A \qquad c_2 = \theta_0 - a.$$

Dann ist

$$R' = R + C \sin\varphi_1 + C_1 \cos\varphi_1 \cos(C_2 + \Delta\lambda)$$
$$r' = r + c \sin\varphi_1 + c_1 \cos\varphi_1 \cos(c_2 + \Delta\lambda).$$

Aus der Ephemeride der Werthe Δ findet man durch Interpolation leicht die Zeiten T_0 der geocentrischen Berührungen, für welche $\Delta = R \pm r$ sein muss. Entnimmt man der Ephemeride ferner die der Zeiteinheit entsprechende Aenderung der Distanz $d\Delta$, so hat man für einen T_0 nahe liegenden Zeitpunkt T': $\Delta = (R \pm r) + (T' - T_0)d\Delta$. Soll nun T' die Zeit der parallactischen Berührung für einen gegebenen Beobachtungsort sein, so muss $\Delta' = R' \pm r'$ werden, und wir erhalten zur Bestimmung von T' die Gleichung

$$(T' - T_0)\,d\Delta + (\Delta' - \Delta) = (R' - R) \pm (r' - r).$$

Ist also

$$p = \frac{1}{d\Delta}(w' - C \mp c)$$
$$q \cos Q = \frac{1}{d\Delta}(v' \cos V' - C_1 \cos C_2 \mp c_1 \cos c_2)$$
$$q \sin Q = \frac{1}{d\Delta}(v' \sin V' - C_1 \sin C_2 \mp c_1 \sin c_2),$$

so wird

$$T' = T_0 - p \sin\varphi_1 - q \cos\varphi_1 \cos(Q + \Delta\lambda) - \frac{\Delta}{2}\frac{\sin^2 1''}{d\Delta}[w \sin\varphi_1 + v \cos\varphi_1 \cos(V + \Delta\lambda)]^2.$$

Im Artikel »Finsternisse«, Bd. I, pag. 828 ff., ist ein anderes Verfahren auseinandergesetzt zur Berechnung der Berührungszeiten, dessen man sich bedient, wenn man nur diese Zeiten beobachten oder zur Bestimmung der Parallaxe benutzen will, so dass man die Ephemeride der Δ nicht nöthig hat. Die dort gegebenen Formeln führen uns am einfachsten auf die Bedingungsgleichung zur Berechnung der Parallaxe. Nach dem LAGRANGE'schen Theorem ist

$$\Delta' = \Delta + (\pi_{\odot} - \pi)\rho \cos z_0$$
$$\cos z_0 = \sin\delta^* \sin\varphi' + \cos\delta^* \cos\varphi' \cos(\alpha^* - \theta),$$

wobei α^*, δ^* die Coordinaten des Punktes W sind, der die betreffende geocentrische Distanz Δ zuletzt sieht und nach den Formeln (4), pag. 829 und (6), pag. 830 berechnet werden.

Diese Gleichungen benutzen wir zur Ermittelung des Einflusses einer Correction der Sonnenparallaxe auf die parallactische Aenderung der Distanz. Da z_0 constant ist als Zenithdistanz des Punktes W im Augenblick der geocentrischen Phase Δ, so ist

$$d(\Delta' - \Delta) = \rho \cos z_0\, d(\pi_{\odot} - \pi).$$

Setzen wir nun im Ausdruck von $\cos z_0$ für $\sin\delta^*$ und $\cos(\alpha^* - \theta) = \cos(\alpha^* - A)\cos(A - \theta) - \sin(\alpha^* - A)\sin(A - \theta)$ ihre Werthe ein, so ist

$$\cos z_0 = \left[\cos\left(G + \frac{\Delta}{2}\right)\sin D + \sin\left(G + \frac{\Delta}{2}\right)\cos D \cos P\right]\sin\varphi' +$$
$$+ \cos\varphi' \cos(A - \theta)\left[\cos\left(G + \frac{\Delta}{2}\right)\cos D - \sin\left(G + \frac{\Delta}{2}\right)\sin D \cos P\right]$$
$$- \cos\varphi' \sin(A - \theta)\sin\left(G + \frac{\Delta}{2}\right)\sin P.$$

Weil nun $G+\frac{\Delta}{2}$ sich von 90° nur um ein Glied von der Ordnung Δ unterscheidet, können wir im Faktor von $d(\pi_{\odot}-\pi)$ setzen

$$cos\left(G+\frac{\Delta}{2}\right)=0 \text{ und } sin\left(G+\frac{\Delta}{2}\right)=1;$$

dann wird

$$d(\Delta'-\Delta)=\rho\{[sin\,\varphi' cos\,D-cos\,\varphi' sin\,D\,cos(A-\theta)]\,cos\,P-cos\,\varphi' sin(A-\theta)\,sin\,P\}\,d(\pi_{\odot}-\pi).$$

Wir haben nun noch die Correction der Coordinaten einzuführen. Die Gleichungen

$$sin\,\Delta\,sin\,P=cos\,d\,sin\,(a-A)$$
$$sin\,\Delta\,cos\,P=sin\,d\,cos\,D-cos\,d\,sin\,D\,cos\,(a-A),$$

deren zweite wir, weil $(a-A)$ nie grösser als 16′ sein kann, schreiben können

$$sin\,\Delta\,cos\,P=sin\,(d-D),$$

ergeben durch Differentiation und Elimination des dP

$$cos\,\Delta\,d\Delta=cos\,d\,sin\,P\,d(a-A)+cos\,P\,d(d-D).$$

Wollen wir eine Correction der Länge des Beobachtungsortes berücksichtigen und bezeichnen durch $\frac{d(a-A)}{d\theta}$ bezw. $\frac{d(d-D)}{d\theta}$ die stündlichen Aenderungen der relativen Coordinaten, so haben wir für die Correctionen die Substitutionen zu machen

$$d(a-A)+d\lambda\frac{d(a-A)}{d\theta} \qquad d(d-D)+d\lambda\frac{d(d-D)}{d\theta}.$$

Da die Ephemeride nach mittlerer Zeit als Argument gerechnet ist, θ aber Sternzeit bedeutet, müssen wir noch hierauf Rücksicht nehmen. Setzen wir λ in Zeitsecunden ausgedrückt voraus, so sei

$$w\,sin\,W=\frac{1}{3609{\cdot}9}\,cos\,d\,\frac{d(a-A)}{d\theta} \qquad w\,cos\,W=\frac{1}{3609{\cdot}9}\,\frac{d(d-D)}{d\theta}.$$

Es wird dann, wenn wir $cos\,\Delta=1$ setzen:

$$d\Delta=sin\,P\,cos\,d\,d(a-A)+cos\,P\,d(d-D)+d\lambda\,w\,cos\,(W-P).$$

Fügen wir nun noch den oben bestimmten Einfluss eines Fehlers der Parallaxe hinzu unter Einführung des parallactischen Winkels η und der Zenithdistanz Z im Sonnenmittelpunkte:

$$d(\Delta'-\Delta)=\rho\,(sin\,Z\,cos\,\eta\,cos\,P+sin\,Z\,sin\,\eta\,sin\,P)\,d(\pi_{\odot}-\pi)=\rho\,sin\,Z\,cos\,(P-\eta)\,d(\pi_{\odot}-\pi),$$

so haben wir den vollständigen Ausdruck des Fehlers der Distanz. Neben diesem Fehler treten in den beobachteten Werthen $R'\pm r'\pm\Delta'$ nun noch die Fehler der Radien auf. Diese berücksichtigen wir, indem wir setzen $dR'=\frac{R'}{R_1}dR_1$ bezw. $dr'=\frac{r'}{r_1}dr_1$, wo R_1 und r_1 die der mittleren Entfernung entsprechenden Werthe der Radien sind; ebenso setzen wir $d(\pi_{\odot}-\pi)=\frac{\pi_{\odot}-\pi}{\pi_0}d\pi_0$, wobei π_0 die angenommene mittlere Sonnenparallaxe bedeutet und können nun die vollständigen Bedingungsgleichungen aufschreiben:

Grosse Distanz:

$$s=(R'\pm r'+\Delta')+\frac{R'}{R_1}dR_1\pm\frac{r'}{r_1}dr_1+cos\,d\,sin\,P\,d\,(a-A)+cos\,P\,d\,(d-D)+$$
$$+w\,cos\,(W-P)\,d\lambda-\rho\,sin\,Z\,cos\,(P-\eta)\frac{\pi-\pi_{\odot}}{\pi_0}d\pi_0$$

Kleine Distanz:

$$s = (R' \pm r' - \Delta') + \frac{R'}{R_1} dR_1 \pm \frac{r'}{r_1} dr_1 - \cos d \sin P d(a - A) - \cos P d(d - D) +$$
$$- w \cos(W - P)\, d\lambda + \rho \sin Z \cos(P - \eta) \frac{\pi - \pi_\odot}{\pi_0} d\pi_0.$$

Da man am Heliometer die Messung nur genähert in der Richtung der Verbindungslinie der beiden Centren ausführen kann, weil man den Positionskreis vorher einstellen muss, so hat man vor der Vergleichung der Beobachtung mit der Rechnung die betreffende Correction anzubringen. Es sei S der Mittelpunkt der Sonnenscheibe, V der Mittelpunkt der Venusscheibe. Die Messung der grossen Distanz erfolge statt in der Richtung VA in der Richtung $V'B$ und der Winkel zwischen beiden sei Δp, die gemessene Distanz $V'B = s$, die wahre Distanz der Mittelpunkte $SV = \Delta$. Es ist

$$R^2 = s^2 + (\Delta \pm r)^2 - 2s(\Delta \pm r)\cos\Delta p$$
$$= [s - (\Delta \pm r)]^2 + 4s(\Delta \pm r)\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta p.$$

Nach dem binomischen Lehrsatz wird also

$$R = [s - (\Delta \pm r)] + \frac{2s(\Delta \pm r)\sin^2 \frac{1}{2}\Delta p}{s - (\Delta \pm r)} \cdots\cdot$$

(A. 375.)

$R + (\Delta \pm r)$ ist $= AV' = s_0$, im zweiten Glied setzen wir für den Nenner seinen Näherungswerth R und erhalten die gesuchte Correction

$$s_0 - s = \tfrac{1}{2}\frac{s}{R}(\Delta \pm r)\sin^2\Delta p \quad \text{für die grosse Distanz.}$$

Ebenso wird

$$s_0 - s = -\tfrac{1}{2}\frac{s}{R}(\Delta \pm r)\sin^2\Delta p \quad \text{für die kleine Distanz.}$$

Die Beobachtungen der Berührung der beiden Scheiben können wir auffassen, als eine Messung der grossen Distanz. Im Augenblicke der beobachteten Berührung ist der Abstand der Ränder $= 2(R' + dR') \pm 2(r' + dr')$. Setzen wir dieses als »beobachtete Distanz« in die frühere Bedingungsgleichung ein, so nimmt sie die Gestalt an

$$(R' \pm r') + \frac{R'}{R_1} dR_1 \pm \frac{r'}{r_1} dr_1 = \Delta' + \cos d \sin P d(a - A) + \cos P d(d - D) +$$
$$+ w \cos(W - P)\, d\lambda - \rho \sin Z \cos(P - \eta) \frac{\pi - \pi_\odot}{\pi_0} d\pi_0.$$

Δ' ist die mit den angenommenen Werthen der Radien, der Coordinaten und der Parallaxe berechnete Distanz der Mittelpunkte. Wären die Annahmen fehlerfrei, so müsste im Augenblick der Berührung $\Delta' = (R' \pm r')$ sein, also ist $(R' \pm r') - \Delta'$ der Fehler der berechneten Distanz. $w \cos(W - P)$ ist die Aenderung der Distanz in einer Zeitsecunde. Folglich erhalten wir durch $\frac{(R' \pm r') - \Delta'}{w \cos(W - P)}$ die in Zeitsecunden ausgedrückte Zeit, die nöthig ist, damit die berechnete Distanz übergehe in die beobachtete Distanz zur Zeit der Ränderberührung. Ist also wieder T die Zeit der Berührung nach der Ephemeride, T' die beobachtete Zeit, so lautet die Bedingungsgleichung

$$T' - T = \frac{\sin P}{w\cos(W-P)}\cos d\, d(a-A) + \frac{\cos P}{w\cos(W-P)} d(d-D) + \frac{1}{w\cos(W-P)}\left(\frac{R'}{R_1}dR_1 + \right.$$
$$\left. \pm \frac{r'}{r_1}dr_1\right) + \rho \sin Z \frac{\cos(P - \eta)}{w\cos(W - P)} \frac{\pi - \pi_\odot}{\pi_0} d\pi_0 + d\lambda.$$

Mit dem Fehler $d\lambda$ vermischt sich in der Gleichung der in der Beobachtung der Berührung begangene Fehler. Es geht daraus hervor, dass es für die Anwendung dieser Methode durchaus nothwendig ist, die Länge auf direktem Wege mit möglichst grosser Genauigkeit zu bestimmen. Sind aber auf einer Station beide Berührungen beobachtet, so erhalten wir durch Subtraktion der beiden Bedingungsgleichungen eine neue Gleichung, die nun die Correction der Länge nicht mehr enthält. Dies letztere Verfahren entspricht der von HALLEY vorgeschlagenen Methode. Da nun die Venus einen dem Sonnendurchmesser gleichen Bogen in etwa 8 Stunden zur Zeit der Conjunction beschreibt, die beiden Berührungen also in der Regel noch weniger auseinander liegen werden, so kann die Zenithdistanz der Sonne, die im Faktor von $d\pi_0$ vorkommt, nur innerhalb bestimmter Grenzen liegen und es ist nicht möglich, für Stationen in mässigen Breiten für Ein- und Austritt günstige Werthe des Coëfficienten zu erzielen. Nur wenn man sich in höhere Breiten begiebt, kann man es erreichen, dass Z bei beiden Berührungen gross ist. Der Vortheil wird aber dadurch illusorisch gemacht, dass an den hiernach günstig gelegenen Orten, an denen also der Tagebogen der Sonne höchstens $= 8^h$ sein wird, nothwendiger Weise die schlechteste Jahreszeit ist, so dass man Gefahr läuft nichts zu bekommen. Nach DELISLE's Vorschlag beobachten deshalb zwei Gruppen von Beobachtern, die eine den Eintritt, die andere den Austritt jedesmal bei tiefem Sonnenstande. Man kann dann die Stationen in den günstigeren Theilen der Erdoberfläche aufsuchen.

Was nun die bisherigen Anwendungen der Beobachtungen der Venusdurchgänge betrifft, so sind deren 5 vorhanden. Der erste im Jahre 1639 wurde nur von einem Beobachter, HORROX zu Hool bei Liverpool, gesehen, und es liegen keine zuverlässigen Messungen vor. Bei den beiden Durchgängen von 1761 und 1769 wurde eine grosse Zahl von Beobachtungen der Berührungen gesammelt; aus diesen leitete ENCKE den bis vor wenig Jahrzehnten als der Wahrheit sehr nahe liegend angesehenen Werth $\pi_0 = 8''\cdot57$ ab. Die Durchgänge der Jahre 1874 und 1882 sind noch weit sorgfältiger nach beiden Methoden beobachtet. Das Resultat aus den Ränderberührungen ist nach NEWCOMB (l. c. pag. 145) $\pi_0 = 8''\cdot80$. Die Distanzmessungen ergeben den grösseren Werth $8''\cdot86$; sie sind mit dem kleineren Werthe, um den alle übrigen Bestimmungen sich gut gruppiren, nicht vereinbar, und NEWCOMB vermuthet daher, dass hier noch ein nicht berücksichtigter systematischer Fehler einwirke.

Ebenso wie man die Bedeckungen der Fixsterne durch den Mond verwendet zur Bestimmung der Mondparallaxe, kann man die analogen Beobachtungen an den Planeten benutzen zur Ermittelung der Sonnenparallaxe. Es ist dieses zuerst von WINNECKE vorgeschlagen, der im Jahre 1881 eine Erscheinung dieser Art, eine Bedeckung eines Sternes durch die Venus, beobachtete. Leider ist es aber bei der grossen Seltenheit solcher Erscheinungen jedenfalls sehr schwer, das nöthige Beobachtungsmaterial zu sammeln, und es kann zur Zeit dieser Methode, die wir zu den besten zählen müssen, eine praktische Bedeutung nicht beigelegt werden.

Neben den bisher besprochenen Methoden der Bestimmung der Sonnenparallaxe durch direkte Beobachtungen giebt es nun noch eine ganze Reihe anderer Methoden, diese wichtige Constante zu berechnen. Zunächst ist hier diejenige Methode zu erwähnen, die HANSEN zur Berechnung der Mondparallaxe anwandte. Zwischen der Sonnenparallaxe π_0, dem äquatorealen Erdradius a, einer aus der Länge des einfachen Secundenpendels berechneten Grösse l' (vergl. pag. 326), den Massen S und E von Sonne und Erde und der Umlaufszeit T der

Erde, besteht ganz analog der auf pag. 326 für den Mond abgeleiteten Gleichung die Beziehung

$$sin^3 \pi_0 = \frac{S}{S+E} \cdot \frac{a}{l'} \frac{4}{T^2}$$

oder wenn wir $\frac{S}{E} = \mu$ setzen

$$\pi_0^3 (1+\mu) = \frac{a}{l'} \frac{4}{T^2} \frac{1}{sin^3 1''}.$$

Alle Grössen rechts werden uns durch Beobachtungen auf der Erdoberfläche bekannt. Setzen wir ihre bekannten Werthe ein, so wird

$$\pi_0^3 (1+\mu) = N \log 8{\cdot}35493.$$

Wenn wir also die Erdmasse entnehmen aus der Planetentheorie, so finden wir durch diese Relation direkt π_0. Newcomb leitet auf diesem Wege (l. c. pag. 123) ab $\pi_0 = 8''{\cdot}76$.

Ein weiteres Mittel zur Bestimmung der Sonnenparallaxe bietet uns der Mond. Die störende Wirkung der Sonne in seiner Bewegung hängt ab von der Stellung der 3 Körper und wird daher entwickelt nach Potenzen des Verhältnisses der halben grossen Axen der Bahnen oder auch der Parallaxen von Sonne und Mond; die betreffenden Glieder haben die Form: $w \frac{a}{a'} sin\, x$, wo w ein von der Gestalt und Lage der Bahnen abhängiger Coëfficient, a die mittlere Entfernung des Mondes, a' diejenige der Sonne von der Erde und x das aus den mittleren Längen der Gestirne, der Knotenlänge der Mondbahn und den vielfachen dieser Winkel zusammengesetzte Argument ist. Man kann nun entweder, dies ist der Hansen'sche Weg, unter Zugrundelegung eines bestimmten Werthes von $\frac{a}{a'}$ alle diese Störungsglieder numerisch berechnen und addiren. Vergleicht man dann die Beobachtungen mit der so entstandenen Mondtafel und findet einen Unterschied, der diesen Gliedern zur Last zu legen ist, so kann derselbe nur dadurch entstanden sein, dass der angenommene Werth $\frac{a}{a'}$, der gemeinsamer Faktor ist, nicht richtig war. Das Verhältniss der beobachteten Störung zum berechneten Werthe ist dann also auch das Verhältniss des wahren Werthes von $\frac{a}{a'}$ zum angenommenen. In der Mondtheorie von Plana und Damoiseau und am vollständigsten in der Delaunay'schen Theorie ist die analytische Entwickelung der Störungsglieder ganz durchgeführt, so dass wir nur die Werthe der Constanten einzuführen haben, um die numerischen Werthe der einzelnen Glieder zu erhalten. Das grösste der hier in Betracht kommenden Glieder, die sogen. parallactische Gleichung, hat bei Delaunay den Ausdruck:

$$-\frac{1}{sin\, 1''} F \frac{a}{a'} sin \text{ (Mittlere Distanz Mond — Sonne)}.$$

Hierin ist F eine nach Potenzen des Verhältnisses m der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond fortschreitende Reihe, deren Coëfficienten Functionen der Excentricitäten der Mond- und Erdbahn und einer von der Neigung der Mondbahn abhängigen kleinen Grösse γ, die sich mit grosser Genauigkeit aus den Breitenstörungen bestimmt, sind. Den numerischen Werth von F dürfen wir als völlig bekannt ansehen; nach Delaunay's Theorie ist $F = 0{\cdot}24123$. In dem obigen Ausdruck bedeutet ferner a' die mittlere Ent-

fernung der Erde von der Sonne $= \frac{1}{\sin \pi_0}$, während a mit der mittleren Entfernung des Mondes von der Erde zusammenhängt; ist nämlich P die Constante der Mondparallaxe, e' die Excentricität der Erdbahn, so ist

$$\sin P = \frac{1}{a}\left[1 + \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4} e'^2\right) m^2 - \tfrac{179}{288} m^4 - \tfrac{97}{48} m^5\right] = \frac{1}{a}\, 1{\cdot}0009087.$$

Nach einem von Hansen aufgestellten und bewiesenen Satze haben wir nun, um Rücksicht zu nehmen auf die vom Monde in der Bewegung der Erde hervorgerufenen Störungen, noch den Faktor $\frac{1-\mu}{1+\mu}$ hinzuzufügen, wenn μ das Verhältniss der Mond- zur Erdmasse $= \frac{1}{81{\cdot}5}$ ist. Der vollständige Coëfficient ist also

$$-\,0{\cdot}24123 \times 1{\cdot}0009087 \,\frac{\pi_0}{\sin P} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} = 14{\cdot}198\, \pi_0 .$$

Wenn wir nun den Beobachtungen den wahren Werth dieses Coëfficienten entnehmen, nach Newcomb 124''·66, so erhalten wir für π_0 den Werth

$$\pi_0 = \frac{124''{\cdot}66}{14{\cdot}198} = 8''{\cdot}780.$$

Ein Fehler von 0''·1 in der den Beobachtungen zu entnehmenden Grösse erzeugt im Resultat nur einen Fehler von 0''·007. Hieraus erkennt man sofort den grossen Werth dieser Methode. Die Bestimmung des Coëfficienten durch die Beobachtungen hat nun allerdings ihre Schwierigkeiten. Das Maximum der Störung tritt ein, wenn der Mond 90° von der Sonne absteht, also zur Zeit des Viertelmondes. Dann erfolgen die Culminationen in der Dämmerung und sind systematischen Fehlern in hohem Grade ausgesetzt. Zur Vermeidung solcher Fehler ist in neuester Zeit statt der Beobachtung des Mondrandes die eines kleinen Kraters auf der Mondoberfläche oder die Verwendung von Sternbedeckungen vorgeschlagen.

Auch in der Bewegung der Erde giebt es natürlicher Weise Störungsglieder, welche vom Verhältniss $\frac{a}{a'}$ abhängen und zur Bestimmung der Sonnenparallaxe dienen können. Der Ausdruck des betreffenden Gliedes für die Länge der Sonne ist

$$d\lambda_\odot = \frac{\mu}{1+\mu}\,\frac{\sin \pi(\odot)}{\sin \pi(☾)}\, \cos \beta_☾ \sin(\lambda_☾ - \lambda_\odot).$$

Führen wir für die Coordinaten des Mondes die Reihenentwickelungen der Mondtheorie ein, so erhalten wir für $d\lambda_\odot$ einen Ausdruck, dessen Hauptglied ist 6''·533 × *sin* (mittlere Distanz Sonne — Mond). Der Coëfficient dieser Ungleichheit ist also nur $\frac{3}{4}$ so gross, als der gesuchte Werth der Sonnenparallaxe. Dagegen ist einerseits die Sonnentheorie ihrer grösseren Einfachheit wegen sicherer ausgebildet, als die Mondtheorie, und andererseits wohnt auch den Sonnenbeobachtungen eine grössere Sicherheit gegen systematische Fehler inne, als den Mondbeobachtungen. Man kann auch, wie Gill[1]) versucht hat, die hier zur Frage kommende Störung der Coordinaten der Erde statt aus Sonnenbeobachtungen ableiten aus Beobachtungen irgend eines anderen Körpers unseres Sonnensystems, in dessen geocentrischen Coordinaten sie sich ja offenbaren müssen. Newcomb leitet aus dieser Ungleichheit als Werth der Sonnenparallaxe $\pi_0 = 8''{\cdot}825$ ab.

---

[1]) Montlhy Notices of the roy. astr. Soc. Vol. LIV, pag. 350.

Eine letzte Möglichkeit zur Bestimmung der Entfernung der Sonne ist uns gegeben durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, die wir durch die verschiedenen in neuerer Zeit angewandten Methoden recht genau kennen. Mit ihrer Hilfe berechnen wir aus der Lichtzeit direkt die gesuchte Entfernung oder finden aus der Aberrationsconstante die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, die uns wieder mit Hilfe der bekannten Umlaufszeit zur Kenntniss der Dimensionen der Erdbahn führt. Die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn werden wir in der Zukunft vielleicht auch aus den beobachteten Bewegungen der Sterne im Visionsradius, die sich ja aus den eigenthümlichen Bewegungen des betreffenden Sternes und der Erdbewegung zusammensetzen, ableiten können.

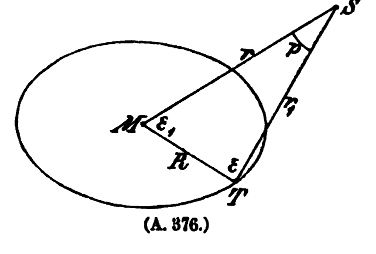
Der Werth der Sonnenparallaxe wurde in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts nach ENCKE's Discussion der Beobachtungen der Venusdurchgänge zu 8''·57 angenommen. 1867 wurde sie von NEWCOMB (Washington astr. observ. 1865 App. II) durch eine Zusammenfassung aller bekannten guten Bestimmungen = 8''·848 gefunden. In der neuesten Bearbeitung desselben Forschers in »The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy. Wash. 1895« leitet er $\pi_0 = 8''\cdot80$ als wahrscheinlichsten Werth ab. Dieser Werth ist auch von der internationalen Conferenz in Paris im Jahre 1896 für den Gebrauch in den astronomischen Ephemeriden von 1900 ab adoptirt.

Wenden wir uns jetzt der Betrachtung der jährlichen Parallaxe der Fixsterne zu. So lange man festhielt an der Vorstellung einer ruhenden Erde, war man jedes Mittels beraubt zur Bestimmung der Entfernung der Fixsterne, da man schon sehr früh erkannte, dass ein Beobachter, der nur die Möglichkeit hat, sich auf der Erdoberfläche zu bewegen, nicht im Stande sein würde, Ortsveränderungen der Fixsterne in Folge ihrer endlichen Entfernung zu bewirken, die zur Bestimmung dieser Entfernung dienen könnten. Diese Versuche konnten daher erst beginnen, seit COPERNICUS die Lehre von der Bewegung der Körper unseres Sonnensystems aufstellte, und der Zweck der Versuche war auch in erster Linie der, die Bewegung der Erde im Raume und damit die Richtigkeit der COPERNICANI'schen Theorie zu beweisen. Es sei M der Sonnenmittelpunkt, die Erde befinde sich in dem beliebigen Punkte T ihrer Bahn und S sei ein Fixstern. Dann ist der Winkel $MST = p$ die Parallaxe des Sterns. Die Entfernung des Sternes von der Sonne sei r, die von der Erde r_1, der Radiusvector der Erde R. Der Winkel $MTS = \varepsilon$ heisst die Elongation des Sternes von der Sonne, der Winkel $SMT = \varepsilon_1$ endlich die heliocentrische Elongation. Es ist nun

$$r_1 \sin p = R \sin \varepsilon_1 \qquad r_1 \cos p = r - R \cos \varepsilon_1,$$

folglich

$$\tan p = \frac{R \sin \varepsilon_1}{r - R \cos \varepsilon_1}.$$



(A. 376.)

Die Entfernung r ist als constant zu betrachten, da wir nur für eine ganz geringe Anzahl von Sternen die Bewegung im Raume kennen und für die fortschreitende Bewegung der Sonne selbst eine völlig zuverlässige Annahme auch noch nicht machen können. Ueberdies sind die diesen Ursachen entspringenden Aenderungen des r jedenfalls völlig verschwindend gegenüber der ungeheuren Grösse des r selbst. Vorläufig betrachten wir auch R als constant, also die Erdbahn als kreisförmig. Die Excentricität derselben im Betrage von $\frac{1}{60}$ verursacht auch bei der grössten uns bekannten Parallaxe, die noch nicht 1'' erreicht, nur verschwindend kleine Aenderungen. Hiernach hängt also der Werth

von p ab nur von der Elongation. Durch Differentiation und Elimination des dr_1 erhalten wir $r_1 dp = R \cos(\varepsilon_1 + p) d\varepsilon_1 = - R \cos \varepsilon d\varepsilon_1$; es verschwindet also dp und es wird damit p ein Maximum, wenn $\cos \varepsilon = 0$, also $\varepsilon = 90°$ ist. Sind λ, β Länge und Breite des Sternes, $\odot$ die Länge der Sonne, deren nicht $1''$ erreichende Breite nicht in Frage kommt, so ist

$$\cos \varepsilon = \cos \beta \cos (\lambda - \odot).$$

Es tritt also das Maximum der Parallaxe ein, wenn die Länge der Sonne um 90° verschieden ist von der Länge des Sternes. Nur an den Polen der Ekliptik ist $\cos \varepsilon$ stets $= 0$, also p unveränderlich. Diesen Maximalwerth der Parallaxe wollen wir π_0 nennen, er ist in Folge der Gleichung $r \sin p = R \sin \varepsilon$ bestimmt durch

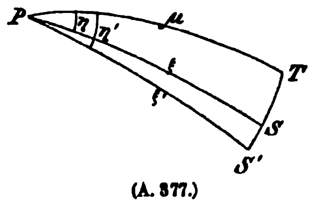
$$\sin \pi_0 = \frac{R}{r}.$$

Das Minimum von p tritt ein, wenn $\sin \varepsilon$ ein Minimum, also $\cos \varepsilon$ ein Maximum ist. Es ist bestimmt durch $\cos \varepsilon = \cos \beta$ $\varepsilon = \pm \beta$ und wird

$$\sin (\pi) = \frac{R}{r} \sin \beta = \sin \pi_0 \sin \beta.$$

Es schwankt also die Parallaxe zwischen den Grenzen $\pi_0 \sin \beta$ und π_0. Für Sterne in der Ekliptik verschwindet die Parallaxe in dem Augenblick, wenn $\lambda = \odot$ oder $= 180° + \odot$ ist.

MT zielt verlängert auf den heliocentrischen Ort der Erde an der Sphäre, *MS* zielt auf den heliocentrischen Ort, *TS* auf den geocentrischen Ort, diese drei Punkte liegen also auf demselben grössten Kreise, und es besteht daher die Wirkung der jährlichen Parallaxe in einer Verschiebung des Sternortes auf dem durch den heliocentrischen Erd- und Sternort gehenden grössten Kreise vom Sternort fort. Die Grösse dieser Verschiebung ist bestimmt durch $p = \pi_0 \sin \varepsilon$. Die Wirkung der Verschiebung auf die Coordinaten des Sternes können wir hiernach ebenso behandeln, wie die Wirkung der täglichen Parallaxe, wenn wir nur für das geocentrische Zenith des Beobachtungsortes den heliocentrischen Ort der Erde einführen. In der folgenden, der Fig. 371 analog gebildeten Figur ist also T der heliocentrische Erdort, S der heliocentrische, S' der geocentrische Sternort und P der Zielpunkt der Z-Axe des Coordinatensystems; ξ, η seien die Polarcoordinaten des heliocentrischen, ξ', η' die des geocentrischen Ortes; endlich sei der Bogen PT, der Abstand des Erdortes vom Pole P, μ. Bei der Kleinheit der Wirkung der jährlichen Parallaxe können wir uns für die Berechnung stets auf die ersten Glieder der Reihenentwickelung beschränken, die wir für die strengen Gleichungen a) und c) pag. 316 fanden, und können auch bei der Berechnung des Hilfswinkels γ von dem Unterschiede zwischen η und η' absehen. Dieser Hilfswinkel ist jetzt also definirt durch



(A. 377.)

$$\cos \gamma = m \sin \mu \qquad \sin \gamma = m \cos \mu \sec \eta.$$

Wir erhalten demnach die Ausdrücke

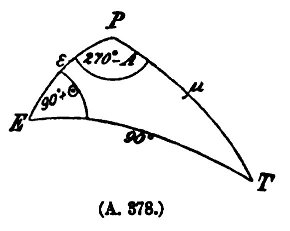
$$\eta' - \eta = R \pi \frac{\sin \mu}{\sin \xi} \sin \eta \qquad \xi' - \xi = - R\pi \cos \mu (\cos \xi \operatorname{cotang} \gamma - \sin \xi)$$
$$= R \pi \cos \mu \sin \xi - R\pi \sin \mu \cos \xi \cos \eta.$$

Hierin ist π definirt durch $\sin \pi = \frac{1}{r}$ und R bedeutet den in Einheiten der mittleren Entfernung ausgedrückten Radiusvector der Erde.

Wenden wir diese Formeln zunächst an auf das Coordinatensystem der Längen und Breiten, so dass also P der Pol der Ekliptik ist, so wird, da T in der Ekliptik selbst liegt und die Länge von $T = 180° + \odot$ ist, $\mu = 90°$ und $\eta = \lambda - \odot - 180°$. Also

$$\lambda' - \lambda = R\pi \sec\beta \sin(\odot - \lambda) \qquad \beta' - \beta = - R\pi \sin\beta \cos(\odot - \lambda).$$

Gehen wir nun über zum Coordinatensystem der Rectascension und Deklination, so ist μ der Abstand des Erdortes vom Pol des Aequators, η ist die Differenz der Rectascensionen des Sterns und des Erdortes, ξ die Poldistanz des Sterns. Bezeichnen wir Rectascension und Deklination des Sterns durch α, δ und nennen A die Rectascension des Erdortes, ε die Schiefe der Ekliptik und betrachten das Dreieck zwischen dem Erdorte T, dem Pol des Aequators P, dem der Ekliptik E, dessen Seiten μ, ε und $ET = 90°$ sind. Der Winkel bei P ist die Differenz der Rectascensionen des Pols der Ekliptik und des Erdortes $= 270° - A$; der Winkel bei E ist die Differenz der Länge der Erde und des Pols des Aequators $= 180° + \odot - 90° = 90° + \odot$. Die Auflösung des Dreiecks giebt uns die Relationen



(A. 378.)

$$\cos\mu = - \sin\varepsilon \sin\odot$$
$$- \sin\mu \cos A = \cos\odot$$
$$- \sin\mu \sin A = \cos\varepsilon \sin\odot.$$

Damit erhalten wir

$$\sin\mu \sin(\alpha - A) = + \cos\varepsilon \sin\odot \cos\alpha - \cos\odot \sin\alpha$$
$$\cos\mu \sin\xi = - \sin\varepsilon \sin\odot \cos\delta$$
$$\sin\mu \cos\xi \cos(\alpha - A) = - \cos\odot \cos\alpha \sin\delta - \cos\varepsilon \sin\odot \sin\alpha \sin\delta.$$

Setzen wir daher

$$v \sin V = - \cos\varepsilon \cos\alpha \qquad w \sin W = \cos\varepsilon \sin\alpha \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta$$
$$v \cos V = - \sin\alpha \qquad w \cos W = - \cos\alpha \sin\delta,$$

so erhalten wir

$$\alpha' - \alpha = R\pi \sec\delta\, v \cos(V + \odot)$$
$$\delta' - \delta = R\pi\, w \cos(W + \odot).$$

Denken wir uns die Coordinaten des geocentrischen Ortes des Sterns bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im heliocentrischen Sternort liegt, dessen X-Axe in die Richtung des Parallelkreises, dessen Y-Axe in die Richtung des Längenkreises fällt, so ist $x = (\lambda' - \lambda) \cos\beta$ $y = \beta' - \beta$. Nach den für $\lambda' - \lambda$ und $\beta' - \beta$ gefundenen Werthen wird aber:

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^2 \sin^2\beta} = R^2.$$

Sehen wir also ab von der Veränderlichkeit des R, so erkennen wir, dass der geocentrische Ort des Sterns liegt auf einer um den heliocentrischen Ort als Mittelpunkt beschriebenen Ellipse mit den Halbaxen π und $\pi \sin\beta$. Wegen der Veränderlichkeit des R im Betrage von $\frac{1}{60} R$ erhält die Curve eine von der Ellipse abweichende Gestalt, doch ist es unnöthig, darauf Rücksicht zu nehmen, da die grösste uns bekannte Parallaxe nur 0''·75 (α Centauri) beträgt. Die Wirkung der Parallaxe vermischt sich nun mit der Wirkung der Aberration, wodurch ihre Wahrnehmung ganz erheblich erschwert wird. Der Einfluss der Aberration ist nach Bd. I, pag. 172 (13), wenn wir von den höheren Gliedern und dem constanten Theile absehen:

$$\Delta\lambda = -k \sec\beta \cos(\lambda - \odot) \qquad \Delta\beta = +k \sin\beta \sin(\lambda - \odot),$$

beziehungsweise nach Bd. I, pag. 170 (7)

$$\Delta\alpha = kv \sin(\odot + V) \sec\delta \qquad \Delta\beta = kw \sin(\odot + W).$$

In Folge der Wirkung der Aberration beschreibt also der scheinbare Ort des Sterns um den mittleren Ort ebenfalls eine Ellipse, deren halbe Axen die Länge k bezw. $k \sin\beta$ haben. Da nun k etwa 20″ ist, während π immer nur Bruchtheile einer Secunde ausmacht, ist die Aberrationsellipse weit grösser, und es offenbart sich die Wirkung der Parallaxe nur in einer Aenderung der Gestalt dieser Ellipse. Die Coordinaten des Sterns in dem oben eingeführten Coordinatensystem sind jetzt

$$x = -\pi \sin(\lambda - \odot) - k \cos(\lambda - \odot)$$
$$y = -\pi \sin\beta \cos(\lambda - \odot) + k \sin\beta \sin(\lambda - \odot)$$

und es wird jetzt

$$x^2 + \frac{y^2}{\sin^2\beta} = \pi^2 + k^2.$$

Der scheinbare Ort des Sterns liegt also auf einer um den mittleren Ort beschriebenen Ellipse, deren Axen sind

$$\sqrt{\pi^2 + k^2} \quad \text{und} \quad \sin\beta \sqrt{\pi^2 + k^2}.$$

Durch die Parallaxe sind also die Axen der Aberrationsellipse nur im Verhältniss $\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{k^2}} : 1$ oder, wenn $\pi = 1''$ wäre und $k = 20''$ gesetzt wird, im Verhältniss 801 : 800, also um 0″·025 vergrössert.

Um diese so geringfügige Wirkung durch die Beobachtung festzustellen, ist es nothwendig, die günstigsten Bedingungen aufzusuchen.

Aus den Ausdrücken für die parallactische Aenderung der Länge und Breite geht hervor, dass die Grösse der Wirkung unabhängig ist von der Länge der Sterne. Die geringste Wirkung tritt ein in der Ekliptik, wo $\Delta\lambda = -\pi R \sin(\lambda - \odot)$ $\Delta\beta = 0$ ist. Es variirt hier also nur die Länge zwischen den Grenzen λ und $\lambda \pm \pi$. Entfernen wir uns von der Ekliptik, so wächst die Wirkung in beiden Coordinaten. Sie wird ein Maximum im Pol der Ekliptik. Hier reicht aber die Näherungsformel zur Berechnung des $\Delta\lambda$ nicht mehr aus. Die strenge Formel $\Delta\lambda = -\frac{R \sin\pi \sec\beta \sin(\lambda - \odot)}{1 + R \sin\pi \sec\beta \cos(\lambda - \odot)}$ giebt $\Delta\lambda = \frac{\infty}{\infty}$. Man sieht aber leicht, dass in diesem Falle $\Delta\lambda = 0$ oder $= 180°$ und $\Delta\beta = -\pi R$ sein muss.

Haben λ und β bestimmte Werthe, so tritt das Maximum von $\Delta\lambda$ ein, wenn der Stern in Quadratur mit der Sonne steht, das Maximum von $\Delta\beta$ zur Zeit der Conjunction und Opposition mit der Sonne.

Für die Rectascensionsparallaxe ergiebt sich die Abhängigkeit von der Deklination wieder in der einfachen Weise, dass sie am Aequator am kleinsten ist und mit der Deklination wächst. Abgesehen von der Deklination ist die Parallaxe bestimmt durch den Werth von $v \cos(V + \odot)$. Für einen gegebenen Stern erhalten wir die Maximal- bezw. Minimalwirkung der Parallaxe, wenn $\frac{d\Delta\alpha}{d\odot} = 0$ ist, sie tritt also ein, wenn

$$\sin\odot \sin\alpha + \cos\odot \cos\alpha \cos\varepsilon = 0$$

oder auch

$$\sin\odot \sin\alpha + \cos\odot \cos\alpha = 2 \sin^2\frac{\varepsilon}{2} \cos\alpha \cos\odot$$

ist. Wegen der Kleinheit von $\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$ können wir $\odot = \frac{90°}{270°} + \alpha$ als eine erste

Näherung betrachten. Wir erkennen dann, dass $2 \cos\alpha \cos\odot$ höchstens $= 1$ sein kann, und finden durch Einsetzen des Werthes von ε, dass der Fehler der Näherung höchstens 2° 35′ beträgt, die nicht in Betracht kommen, da $\odot$ selbst sich in ein paar Tagen um diesen Betrag ändert, während die Beobachtungen zur Bestimmung von Δa ja jedenfalls auf mehrere Tage zu erstrecken sind. Das durch diese Bedingung bestimmte Maximum bezw. Minimum ist

$$lim \Delta\alpha = \pm R.\pi \sec\delta \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \alpha\right)$$

Der Werth von $\Delta\alpha$ verschwindet, es tritt das absolute Minimum der Wirkung ein, wenn $\cos\odot \sin\alpha - \sin\odot \cos\alpha \cos\varepsilon = 0$, also wieder hinreichend genau $\odot - \alpha = 0°$ oder $= 180°$ ist. Die Maximalwirkung der Parallaxe auf den Stundenwinkel erfolgt also in jenem Deklinationskreise, der die Ekliptik in um 90° vom zugehörigen Sonnenorte abstehenden Punkten durchschneidet; die Wirkung ist Null im Deklinationskreise des Sonnenmittelpunktes.

Bezüglich der Deklination erhalten wir $\frac{d\Delta\delta}{d\odot} = -\pi R w \sin(\odot + W)$. Da w nicht allgemein $= 0$ sein kann, so tritt also die grösste Wirkung der Parallaxe ein, wenn $\odot = -W$ oder $= 180° - W$ ist. Hiernach erhalten wir zur Bestimmung der Zeit der Maximalwirkung

$$tang \odot = \frac{\cos\varepsilon \sin\alpha \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta}{\cos\alpha \sin\delta}.$$

Der Werth, den die parallactische Aenderung der Deklination erreicht, ist bestimmt durch $lim \Delta\delta = \pm \pi R w$. Es ist aber nach den Definitionsgleichungen für w und W $w^2 = 1 - (\sin\varepsilon \sin\delta \sin\alpha + \cos\varepsilon \cos\delta)^2$. Im sphärischen Dreieck zwischen dem Sternort, dem Pole des Aequators und dem der Ekliptik haben wir aber, wenn wir den parallactischen Winkel η nennen

$$\sin\varepsilon \sin\delta \sin\alpha + \cos\varepsilon \cos\delta = \cos\beta \cos\eta$$

und damit wird

$$lim \Delta\delta = \pm \pi R \sqrt{1 - \cos^2\beta \cos^2\eta}$$

Die Ausdrücke für $lim \Delta\alpha$ bezw. $lim \Delta\delta$ zeigen, dass die möglichst grosse Wirkung der Rectascensionsparallaxe eintritt, wenn $\cos\alpha = 0$ ist, also auf dem Solstitialcolur, während die Deklination durch die Parallaxe am meisten beeinflusst wird für die Sterne in der Nähe des Pols der Ekliptik oder für solche Sterne, für welche $\eta = 90°$ ist. Diese letztere Bedingung ist erfüllt längs einer Curve, die den Pol des Aequators mit dem der Ekliptik verbindet. Es giebt je eine Curve auf beiden Hemisphären.

Die gefundenen Maximalwerthe lassen sofort erkennen, dass eine Bestimmung der Parallaxe der Fixsterne aus ihrem direkten Einflusse auf die Coordinaten sehr schwierig sein muss. Bei der Rectascension wird nur dann der Einfluss ausserhalb der Grenze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen, wenn $\sec\delta$ einen grossen Werth annimmt. In der That ist ein Erfolg nur bei Beobachtungen von dem Pol nahen Sternen zu erwarten. Nachdem man die beobachteten scheinbaren Rectascensionen befreit hat vom Einflusse der Aberration, die man mit einem genäherten Werthe berechnet, hat man nur noch eine Correction Δk der Aberrationsconstante einzuführen, weil man den Werth von k hinreichend genau kennt, um die Glieder höherer Ordnung genau berechnen zu können. Das gleiche gilt auch bezüglich der Präcession und der Eigenbewegung. Nennen wir also da die Correction der Präcession in $AR = m + n \sin\alpha \, tang\delta$ und $d\Delta\alpha$ die Correction der angenommenen Eigenbewegung in Rectascension, ferner τ

die von einem beliebigen Zeitpunkte aus gezählte Zeit, so haben die Bedingungsgleichungen die Form

$$\alpha' = \alpha_0 + \pi R v \cos(\odot + V) \sec \delta + \Delta k v \sin(\odot + V) \sec \delta + \tau(da + d\Delta\alpha),$$

wobei also α' die mit den angenommenen Werthen berechnete mittlere Rectascension ist. In dieser Weise hat v. LINDENAU aus Greenwicher und Königsberger und PETERS aus Dorpater Beobachtungen des Polarsterns die Parallaxe desselben berechnet. Deklinationsbeobachtungen wären durch ganz ähnliche Formeln auszugleichen Die geeignetsten Sterne liegen nach dem früheren in der Nähe des Pols der Ekliptik und des Aequators. Der ersteren Bedingung entspricht der Stern γ Draconis, der aus diesem Grunde für die Astronomie von grosser Bedeutung geworden ist. Er eignet sich für unseren Zweck noch besonders aus dem Grunde, dass er ganz in der Nähe des Zeniths von Greenwich culminirt, wodurch viele der die Deklinationsbeobachtungen beeinflussenden Fehlerquellen beseitigt werden. BRADLEY, den die Beobachtungen dieses Sterns zur Entdeckung der Aberration und der Nutation führten, vermochte nur festzustellen, dass seine Parallaxe $< 0''\cdot5$ sein müsse. Seine Beobachtungen sind in unserer Zeit durch AUWERS neu reducirt und haben $\pi = 0''\cdot09$ ergeben. Die Beobachtungen des Polarsterns, der der zweiten Bedingung entspricht, bieten den Vortheil, dass wegen der langsamen Bewegung die Einstellungen bei jeder Culmination in grösserer Zahl erhalten werden können, sodass die zufälligen Fehler sehr vermindert werden, und dass durch die Verbindung der oberen und unteren Culmination auch die Fehler der Refraction und Biegung sich sehr verkleinern lassen. Diese Vortheile haben veranlasst, dass man sich schon seit TYCHO's Zeiten vielfach bemüht hat, auf diesem Wege die Parallaxe des Polarsternes zu finden. Aber bis in die neuere Zeit waren die Bemühungen erfolglos. Nach den Dorpater von LUNDAHL berechneten Beobachtungen ergiebt sich die Parallaxe zu $0''\cdot15$.

Die grösste uns bekannte Parallaxe, diejenige von α Centauri, ist von HENDERSON gleichfalls aus beobachteten Deklinationen dieses Sternes gefunden Der Erfolg erklärt sich hier aber durch den ausnahmsweise grossen Werth der Parallaxe.

Die Anwendbarkeit der bisher erörterten Methoden ist also eine sehr beschränkte. Man hat daher daran gedacht, durch die Combination der Beobachtungen zweier Sterne allgemeinere Methoden zu erlangen. RÖMER schlug vor zwei Sterne zu benützen, deren Rectascension um 12^h verschieden ist. Für zwei solche Sterne sind die Hülfswinkel V um 180° von einander verschieden; ist also $\pi_1 R \sec\delta_1 v \cos(\odot + V)$ die Parallaxe des einen, so ist $-\pi_2 R \sec\delta_2 \cos(\odot + V)$ die des anderen, und bilden wir demnach die Differenz der Durchgangszeiten, so erhalten wir Bedingungsgleichungen der Form

$$\alpha_1' - \alpha_2' = \alpha_1 - \alpha_2 + R v \cos(\odot + V)(\pi_1 \sec \delta_1 + \pi_2 \sec \delta_2)$$

und können diese Gleichungen benützen zur Bestimmung der Summe der Parallaxen beider Sterne. Der Erfolg ist aber, wie leicht ersichtlich, davon abhängig, ob wir im Stande sind den täglichen Aenderungen des Ganges der Uhr und den Bewegungen des Instrumentes gehörig Rechnung zu tragen. RÖMER's Beobachtungen führten, weil dies nicht möglich war, zu keinem Resultate. BESSEL hat dagegen nach dieser Methode aus BRADLEY's Beobachtungen befriedigende Resultate für die Summe der Parallaxen von α Lyrae und α Canis maj., sowie von α Canis min. und α Aquilae gefunden. Eine vollständige Elimination der erwähnten Fehlerquellen erreicht man aber, wie W. STRUVE zuerst gezeigt hat,

durch eine andere Auswahl der Sterne. Die STRUVE'sche Methode besteht in der Verbindung der Beobachtungen der oberen und unteren Culmination von Circumpolarsternen, die etwa 12^h von einander abstehen. Sind θ die beobachteten Durchgangszeiten, Δu die Uhrcorrectionen, m, n, c die Aufstellungsfehler des Instrumentes, so ergeben uns 4 aufeinander folgende Beobachtungen, da wir bei der nahen Gleichzeitigkeit zweier Culminationen für beide die gleichen Fehler annehmen können, die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} 1.\ \text{Stern in OC.} & & \alpha_1 = \theta_1 + \Delta u + m + n\ tang\,\delta + c\ sec\,\delta \\ 2.\ \ \ \text{,,}\ \ \text{in UC.} & 12^h + & \alpha_2 = \theta_2 + \Delta u + m - n\ tang\,\delta_1 - c\ sec\,\delta_1 \\ 1.\ \ \ \text{,,}\ \ \text{in UC.} & 12^h + & \alpha_1 = \theta_3 + \Delta u_1 + m_1 - n_1 tang\,\delta - c_1 sec\,\delta \\ 2.\ \ \ \text{,,}\ \ \text{in OC.} & & \alpha_2 = \theta_4 + \Delta u_1 + m_1 + n_1 tang\,\delta_1 + c_1 sec\,\delta_1. \end{array}$$

Daraus erhalten wir

$$\alpha_2 - \alpha_1 + 12^h = (\theta_2 - \theta_1) - n\ (tang\,\delta_1 + tang\,\delta) - c\ (sec\,\delta_1 + sec\,\delta)$$
$$\alpha_2 - \alpha_1 - 12^h = (\theta_4 - \theta_3) + n_1(tang\,\delta_1 + tang\,\delta) + c_1(sec\,\delta_1 + sec\,\delta)$$

also

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\theta_4 - \theta_3 + \theta_2 - \theta_1) + (n_1 - n)\tfrac{1}{2}(tang\,\delta_1 + tang\,\delta) + (c_1 - c)\tfrac{1}{2}(sec\,\delta_1 + sec\,\delta).$$

Wir finden also die Differenz der Rectascensionen entstellt nur durch die Aenderung der Aufstellungsfehler und zwar da c Aenderungen in der Regel nicht ausgesetzt ist, nur durch die Aenderung des n; kann man diese also controlliren, so muss es möglich sein, sehr genaue Werthe der Rectascensionsdifferenz zu erhalten, die dann wie vorhin zur Bestimmung der Summe der Parallaxen der beiden Sterne dienen. STRUVE hat nach dieser Methode eine ganze Reihe von Sternpaaren untersucht und ist dabei zu recht gut übereinstimmenden Resultaten gelangt. Wir müssen diese Methode als die beste der bisher besprochenen anerkennen. Sie ist aber wegen der Bedingungen, denen die Sterne genügen müssen, nur einer sehr beschränkten Anwendung fähig und wegen der Nothwendigkeit immer 4 auf einander folgende Culminationen beobachten zu müssen, wird es schwer sein, das Material zu einer Bestimmung in den günstigsten Zeiten des Maximums der Parallaxe zu erlangen.

Zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen bedient man sich am besten des folgenden von BESSEL in den »Fundamentis« entwickelten Verfahrens. Es seien α_1, δ_1, π_1 die Coordinaten und die jährliche Parallaxe des einen Sternes, λ_1 die Sonnenlänge im Augenblick seiner Beobachtung. Die Wirkung der Parallaxe wird dann ausgedrückt durch

$$\Delta\alpha_1 = -\pi_1\ (cos\,\lambda_1\ sin\,\alpha_1 - sin\,\lambda_1\ cos\,\alpha_1\ cos\,\varepsilon)\ sec\,\delta_1;$$

ebenso sei für den zweiten Stern

$$\Delta\alpha_2 = -\pi_2\ (cos\,\lambda_2\ sin\,\alpha_2 - sin\,\lambda_2\ cos\,\alpha_2\ cos\,\varepsilon)\ sec\,\delta_2.$$

Wir setzen nun

$$\begin{array}{lll} \pi_1\ sec\,\delta_1 + \pi_2\ sec\,\delta_2 = u & \tfrac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_1) = \lambda & \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) = \alpha \\ \pi_1\ sec\,\delta_1 - \pi_2\ sec\,\delta_2 = u' & \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda' & \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) = \alpha'. \end{array}$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1 = \tfrac{1}{2}u\,\{&cos\,(\lambda - \lambda')\ sin\,(\alpha - \alpha') - sin\,(\lambda - \lambda')\ cos\,(\alpha - \alpha')\ cos\,\varepsilon\ + \\ &- cos\,(\lambda + \lambda')\ sin\,(\alpha + \alpha') + sin\,(\lambda + \lambda')\ cos\,(\alpha + \alpha')\ cos\,\varepsilon\} \\ + \tfrac{1}{2}u'\,\{&cos\,(\lambda - \lambda')\ sin\,(\alpha - \alpha') - sin\,(\lambda - \lambda')\ cos\,(\alpha - \alpha')\ cos\,\varepsilon\ + \\ &+ cos\,(\lambda + \lambda')\ sin\,(\alpha + \alpha') - sin\,(\lambda + \lambda')\ cos\,(\alpha + \alpha')\ cos\,\varepsilon\} \end{aligned}$$

Setzen wir die Ausdrücke für die Funktionen der Summe und der Differenz der Winkel ein, so geht der erste Theil des Ausdrucks über in

$$\tfrac{1}{2}u\,(-\,2\cos\lambda\cos\lambda'\cos\alpha\sin\alpha' + 2\sin\lambda\sin\lambda'\sin\alpha\cos\alpha' +$$
$$-\,2\cos\varepsilon\sin\lambda\cos\lambda'\sin\alpha\sin\alpha' + 2\cos\varepsilon\cos\lambda\sin\lambda'\cos\alpha\cos\alpha')$$

$$= -\,u\left[\sin(\alpha'-\lambda')(\cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha\cos\varepsilon) + 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\lambda'\cos\alpha'\cos(\alpha+\lambda)\right].$$

Um den Faktor von u' zu erhalten, brauchen wir nur α und α' zu ersetzen durch $90° + \alpha$ bezw. $90° + \alpha'$. Der zweite Theil von $\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1$ ist also

$$+\,u'\left[\cos(\alpha'-\lambda')(\cos\lambda\sin\alpha - \sin\lambda\cos\alpha\cos\varepsilon) - 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\lambda'\sin\alpha'\sin(\alpha+\lambda)\right]$$

Die von $\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$ abhängenden Theile dieser Ausdrücke dürfen wir nun vernachlässigen. Denn selbst, wenn wir Beobachtungen verbinden, die 12^h aus einanderliegen, wird λ' erst $= 16'$, und wenn wir dann selbst $\sec\delta = 43$ wählen, also annehmen, es solle die Parallaxe des Polarsternes bestimmt werden, so müsste schon $\pi = 0''\cdot5$ sein, damit der Werth jener Glieder $0''\cdot01$ erreiche. Da dieses nun von vornherein unwahrscheinlich ist, berücksichtigen wir jene Glieder nicht. Sollten wir dann durch die Auflösung auf Werthe von π geführt werden, die eine Berücksichtigung des Correctionsgliedes verlangen, so können wir dasselbe mit den Näherungswerthen von π berechnen und die Auflösung wiederholen. Die Endgleichung lautet also

$$\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1 = -\,u\sin(\alpha'-\lambda')(\cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha\cos\varepsilon) +$$
$$+\,u'\cos(\alpha'-\lambda')(\cos\lambda\sin\alpha - \sin\lambda\cos\alpha\cos\varepsilon).$$

Diese Gleichung ist nun einer dreifachen Anwendung fähig. Da λ', die Differenz der Sonnenlängen bei den Beobachtungen der beiden Sterne, immer sehr klein sein muss, ist $\alpha' - \lambda'$ nahe $= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$, und die zu bestimmenden Grössen sind also $u\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$ und $u'\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$. Wollen wir also u und u' gleichzeitig bestimmen, so müssen $\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$ und $\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$ etwa gleich gross sein, d. h. $\alpha_2 - \alpha_1 = 90°$ sein. Die zu bestimmenden Grössen sind dann also $\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,u$ bezw. $\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,u'$. Neben dieser Verkleinerung der zu bestimmenden Grössen kommt noch der Umstand in Betracht, dass durch die Elimination zweier Unbekannten die Unsicherheit der Bestimmung jeder derselben grösser wird, als wenn sie allein bestimmt wird. Es wird daher nur bei grossen Werthen von π diese Anordnung Erfolg versprechen, und man wird in der Regel entweder nur u oder nur u' bestimmen. Im ersteren Falle hat man $\alpha' = 90°$ also $\alpha_2 - \alpha_1 = 180°$ zu machen und die Gleichung lautet, wenn man einen Hülfswinkel einsetzt:

$$\Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 = (\pi_1\sec\delta_1 + \pi_2\sec\delta_2)\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sec\mu\cos(\lambda-\mu),$$

wo

$$\tang\mu = \tang\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\cos\varepsilon.$$

Dies ist die Anordnung, die den bisher besprochenen Methoden zu Grunde lag. Wählen wir aber andererseits $\alpha' = 0$ also $\alpha_2 = \alpha_1$, d. h. beobachten wir Sterne in nahe gleicher Rectascension, so wird die Gleichung:

$$\Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 = (\pi_1\sec\delta_1 - \pi_2\sec\delta_2)\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\operatorname{cosec}\mu'\sin(\lambda-\mu')$$

wo

$$\tang\mu' = \tang\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\sec\varepsilon.$$

Diese zweite Anordnung führt also zur Bestimmung der Differenz der Parallaxen zweier Sterne in nahe gleicher Rectascension. Sie ist gleichfalls schon von BESSEL angewandt auf 61 Cygni und μ Cassiopejae. Sie bildet den Uebergang zu den rein differentiellen Methoden, zu denen wir nun übergehen.

Obwohl die Resultate der beiden zuletzt besprochenen Methoden zu nicht unbefriedigenden Resultaten führten, waren die wahrscheinlichen Fehler derselben immer noch so gross, dass man keine feste Ueberzeugung von dem Vorhandensein einer Parallaxe gewinnen konnte. Da war es ein von GALILEI zuerst und später unabhängig von W. HERSCHEL gefasster Gedanke, der auf den richtigen Weg führte. GALILEI sagte sich, dass an ein und demselben Orte des Himmels die Parallaxe um so grössere Wirkung herbeiführen müsse, je näher uns die Sterne sind, und HERSCHEL erkannte, dass man hierin ein vorzügliches Mittel zur Bestimmung der Parallaxen haben würde, wenn man bei zwei sehr nahen Sternen durch ihren Glanz oder andere äussere Eigenschaften zur Annahme einer erheblichen Verschiedenheit der Entfernungen gezwungen wäre. Dies war der Gedanke, der ihn zur Aufstellung seiner Cataloge der Doppelsterne veranlasste und zur Entdeckung der Doppelsternsysteme führte. Diese Entdeckung zeigte nun, dass die Mehrzahl der Sternpaare zur Parallaxenbestimmung ungeeignet sei, weil beide Componenten in physischer Verbindung stehen, und dass nur die geringere Zahl sogenannter optischer Doppelsterne übrig bleibe. Es kam also darauf an, ein Mittel zu finden, beide Arten von Doppelsternen zu unterscheiden. Dieses Mittel bot sich dar in der Eigenbewegung. Die beiden Componenten eines physischen Doppelsternes müssen die gleiche Eigenbewegung zeigen, während die Componenten eines optischen Doppelsternes wegen der ungleichen Entfernung von der Sonne und wegen der vorauszusetzenden Verschiedenheit der *motus peculiares* sich verschieden bewegen werden. Durch das Hinzutreten der *motus peculiares* wird nun eine grosse Zahl der optischen Doppelsterne wieder ungeeignet zur Parallaxenbestimmung, weil beide Componenten doch in nicht sehr verschiedener Entfernung sich befinden, und man muss daher neben der Bewegung bei der Auswahl der Sterne noch andere Merkmale einer ungleichen Entfernung, besonders die Helligkeit, zu Rathe ziehen. Da man durch die Beobachtung nur die Differenz der Parallaxen der Sterne findet, so vergleicht man einen zu untersuchenden Stern sogleich mit mehreren benachbarten, zeigt sich immer dieselbe Differenz der Parallaxen, so wird man annehmen dürfen, dass die Parallaxe der Vergleichsterne verschwindend sei und dass die beobachtete Wirkung von einer Parallaxe des Hauptsternes herrühre.

Der Einfluss der Parallaxe auf die relativen Coordinaten berechnet sich in derselben Weise, wie der auf die Coordinaten selbst. Bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen berücksichtigt man die Präcession, Nutation und Aberration aber in anderer Weise. Die Summe der Wirkungen dieser Correctionen wird dargestellt durch (vergl. pag. 313)

$$d\alpha = f + g \sin(G+\alpha) \tang\delta + h \sin(H+\alpha) \sec\delta$$
$$d\delta = i \cos\delta + g \cos(G+\alpha) + h \cos(H+\alpha) \sin\delta.$$

Nennen wir $\alpha_1 - \alpha$, $\delta_1 - \delta$ die Differenz der Coordinaten der beiden Sterne, die wir ihrer Kleinheit wegen als Differentiale behandeln können, so erhalten wir zur Reduction der beobachteten scheinbaren Differenzen auf mittlere die Formeln

$$\delta(\alpha_1 - \alpha) = [g \cos(G+\alpha) \tang\delta + h \cos(H+\alpha) \sec\delta](\alpha_1 - \alpha) \sin 1'' + \\ + [g \sin(G+\alpha) - h \sin(H+\alpha) \sin\delta] \sec^2\delta(\delta_1 - \delta) \sin 1''$$
$$\delta(\delta_1 - \delta) = -[g \sin(G+\alpha) + h \sin(H+\alpha) \sin\delta](\alpha_1 - \alpha) \sin 1'' + \\ - [i \sin\delta - h \cos(H+\alpha) \cos\delta](\delta_1 - \delta) \sin 1''.$$

Sind nun weiter $d\Delta\alpha$ bezw. $d\Delta\delta$ die Correctionen der angenommenen Eigenbewegungen nach den Coordinaten und ist τ die Zeit vom Jahresanfang aus gerechnet, so sind die vollständigen Bedingungsgleichungen:

$$\alpha_1 - \alpha = (\alpha_1 - \alpha)_0 + \delta(\alpha_1 - \alpha) + \pi R v \cos(\odot + V) \sec\delta + \Delta k v \sin(\odot + V) \sec\delta + \tau d\Delta\alpha$$
$$\delta_1 - \delta = (\delta_1 - \delta)_0 + \delta(\delta_1 - \delta) + \pi R w \cos(\odot + W) + \Delta k w \sin(\odot + W) + \tau d\Delta\delta.$$

Unter Δk ist hierbei nicht eine Correction der Aberrationsconstante verstanden, denn wir kennen diese Constante so genau, dass wir die $\delta(\alpha_1 - \alpha)$ und $\delta(\delta_1 - \delta)$ als völlig genau betrachten und also die Reduction der scheinbaren Differenzen auf mittlere als streng richtig betrachten dürfen. Dagegen ist es wohl möglich, dass die Aberrationsconstante für die beiden Sterne etwas verschieden sei. Senden nämlich die beiden Sterne Licht von verschiedener Wellenlänge aus, sind die Sterne also verschieden gefärbt und ist die Lichtgeschwindigkeit für verschiedene Farben eine verschiedene, so hätten wir verschiedene Constanten für beide Sterne anzuwenden, und hierauf nimmt die Correction Δk Rücksicht.

Von diesen Formeln ist in der neueren Zeit ein sehr häufiger Gebrauch gemacht. Man hielt namentlich die Messung der Deklinationsdifferenzen für hinreichend frei von systematischen Fehlern und solchen, die in Zusammenhang mit der Jahreszeit stehen, dass man glaubte, aus ihnen sichere Werthe der Parallaxe zu erhalten. Es scheint indess, dass diese Annahme nicht gestattet war, indem die von verschiedenen Beobachtern gefundenen Werthe nicht übereinstimmen oder die Resultate durch andere Methoden nicht bestätigt werden. Der Grund davon liegt wahrscheinlich darin, dass die Messungen noch systematische Fehler instrumenteller Art oder mit dem Stundenwinkel in Zusammenhang stehende Fehler enthalten, die nicht berücksichtigt sind. Volles Vertrauen scheinen aber die aus am Meridiankreise beobachteten Rectascensionsdifferenzen abgeleiteten Resultate zu verdienen; die grossen Vorzüge dieser Methode, die als eine der besten gelten muss, sind namentlich von KAPTEYN, der mittelst derselben die Parallaxe einer Reihe von Sternen bestimmt hat, hervorgehoben. Vermuthlich würde man gleich sichere Resultate aus Deklinationsdifferenzen erhalten können, wenn man die Beobachtungen gleichfalls so anordnete, dass die instrumentellen Fehler, die Biegung und die Refraction in gleich einfacher Weise wirkten.

Die grösste Genauigkeit in der Bestimmung des relativen Ortes der Gestirne erlangt man mit den Instrumenten der Jetztzeit durch die Messung von Positionswinkel und Distanz, besonders dann, wenn man zur Messung sich eines Heliometers bedient. In diesem Falle erlangt man noch den weiteren Vortheil, dass man ohne irgend eine Beeinträchtigung der Genauigkeit der Messungen die Abstände der Sterne bis 2° gross machen kann, so dass man in der Wahl der Vergleichsterne viel freier wird. Die Verwendung des Aequatoreals mit Fadenmikrometer, die gleichfalls versucht ist, hat weit weniger befriedigende Resultate ergeben, was ausser den der Messung an sich anhaftenden systematischen Fehlern, z. B. den von der Distorsion, von der Kopflage des Beobachters abhängenden, besonders wohl dem Umstande zur Last zu legen ist, dass man nicht in der Lage ist, die Helligkeit der mit einander verglichenen Objekte gleich zu machen, was für eine genaue Messung erforderlich ist.

In dem sphärischen Dreieck, zwischen dem Pol des Aequators, dem zu untersuchenden Stern mit den Coordinaten A, D und dem Vergleichstern α, δ bestehen die strengen Relationen

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos p = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - A)\sin\tfrac{1}{2}(\delta - D) = \mu$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\sin p = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - A)\cos\tfrac{1}{2}(D + \delta) = \nu,$$

wo p der Positionswinkel der Verbindungslinie Δ in ihrer Mitte ist. Betrachten wir den Stern A, D mit Parallaxe behaftet, deren Wirkung wir als Differentiale einführen können, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta dp = - \sin p d\mu + \cos p d\nu$$
$$\cos \tfrac{1}{2}\Delta d\frac{\Delta}{2} = \cos p d\mu + \sin p d\nu.$$

Bei der Kleinheit von $\sin(A - \alpha)$, $\sin(D - \delta)$ können wir die Produkte dieser Grössen in die Differentiale dA, dD vernachlässigen und ausserdem

$\cos \tfrac{1}{2}(A - \alpha)$ und $\cos \tfrac{1}{2}(D - \delta) = 1$, $\sin \tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\Delta}{2} \sin 1''$ setzen. Dann wird

$$\Delta dp = + \sin p dD - \cos p \cos \tfrac{1}{2}(D + \delta) dA$$
$$d\Delta = - \cos p dD - \sin p \cos \tfrac{1}{2}(D + \delta) dA.$$

Für dA haben wir nun die früher gefundenen Ausdrücke einzusetzen:

$$dA = - \pi R[\cos \odot \sin A - \sin \odot \cos A \cos \varepsilon] \sec D$$
$$dD = - \pi R[\sin \odot(\cos \varepsilon \sin D \sin A - \sin \varepsilon \cos D) + \cos \odot \sin D \cos A].$$

Wir führen nun folgende Hülfsgrössen ein:

$$f \sin F = \sin D \cos A \qquad g \sin G = \sin D \sin A \qquad h \sin H = g \sin(G + \varepsilon)$$
$$f \cos F = \sin A \frac{\cos \tfrac{1}{2}(D+\delta)}{\cos D} \qquad g \cos G = - \cos D \qquad h \cos H = - \cos A \cos \varepsilon \frac{\cos \tfrac{1}{2}(D+\delta)}{\cos D}$$

und setzen

$$m \sin M = h \sin(H + p) \qquad m' \sin M' = \frac{1}{\Delta} h \cos(H + p)$$
$$m \cos M = f \sin(F + p) \qquad m' \cos M' = \frac{1}{\Delta} f \cos(F + p).$$

Damit erhalten wir dann die einfachen Ausdrücke

$$d\Delta = \pi R m \cos(\odot - M) \qquad dp = \pi R m' \cos(\odot - M').$$

Die Hülfsgrössen sind in Folge der Präcession langsamen Aenderungen unterworfen; wegen der Kleinheit des π kann man in der Regel davon absehen, will man aber streng verfahren, so berechnet man die Hülfsgrössen für 2 Epochen und interpolirt zwischen denselben.

Zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen haben wir nun noch die verschiedenen anderen Correctionen zu berücksichtigen. Die Präcession und Nutation bewirkt nur eine Aenderung des Positionswinkels; an den beobachteten Positionswinkel ist zur Reduction auf den Jahresanfang, wie in den betreffenden Artikeln nachzusehen ist, die Reduction anzubringen

$$- An \sin A \sec D - B \cos A \sec D,$$

wo A, B die Bessel'schen Hülfsgrössen, n die Präcessionsconstante für die Deklination $= 20''{\cdot}05 \ldots$ bedeutet.

Zur Berücksichtigung der Wirkung der Aberration haben wir uns derselben Formeln zu bedienen, wie für die Parallaxe, nur ist $\odot$ zu vertauschen mit $\odot - 90°$, folglich ist an die beobachteten mit Aberration behafteten Werthe die Correction anzubringen

$$d\Delta = - km \sin(\odot - M) \qquad dp = - km' \sin(\odot - M')$$

und wenn der Vergleichstern die Aberrationsconstante $k + \Delta k$ verlangt, so hätten wir in den Beobachtungen noch die Wirkung

$$d\Delta = \Delta km \sin(\odot - M) \qquad dp = \Delta km' \sin(\odot - M').$$

Endlich ist noch die Eigenbewegung des zu untersuchenden Sternes zu berücksichtigen. Nennen wir dieselben $d\alpha$, $d\delta$, und τ die Zeit seit Jahresanfang, so bestehen für den Zeitpunkt der Beobachtung die Gleichungen:

$$\Delta \sin p = (A + \tau d\alpha - \alpha) \cos \tfrac{1}{2} (D + \delta) \qquad \Delta \cos p = (D + \tau d\delta - \delta),$$

während für den Jahresanfang

$$\Delta_0 \sin p_0 = (A - \alpha) \cos \tfrac{1}{2} (D + \delta) \qquad \Delta_0 \cos p_0 = (D - \delta)$$

wäre. Setzen wir daher

$$s \sin \varphi = d\alpha \cos \tfrac{1}{2} (D + \delta) \qquad s \cos \varphi = d\delta,$$

so dass s die Eigenbewegung im Bogen grössten Kreises, φ ihr Positionswinkel ist, so wird

$$\Delta \sin p - \Delta_0 \sin p_0 = \tau s \sin \varphi \qquad \Delta \cos p - \Delta_0 \cos p_0 = \tau s \cos \varphi.$$

Also wird

$$\Delta \sin (p - p_0) = \tau s \sin (\varphi - p_0) \quad \Delta \cos (p - p_0) = \Delta_0 + \tau s \cos (\varphi - p_0),$$

woraus folgt, da wir rechts p und p_0 vertauschen dürfen,

$$tang (p - p_0) = \frac{\tau \frac{s}{\Delta} \sin (\varphi - p)}{1 + \tau \frac{s}{\Delta} \cos (\varphi - p)} \qquad \Delta^2 = \Delta_0^2 + 2 \tau \Delta s \cos (\varphi - p) + \tau^2 s^2.$$

Entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatz, so ergiebt der Ausdruck für $tang (p - p_0)$

$$p_0 = p - \tau \frac{s}{\Delta} \frac{\sin (\varphi - p)}{\sin 1''} + \frac{\tau^2}{2} \frac{s^2}{\Delta^2} \frac{\sin 2 (\varphi - p)}{\sin 1''} \cdots$$

Der zweite Ausdruck giebt

$$\Delta_0 = \Delta \left(1 - 2\tau \frac{s}{\Delta} \cos (\varphi - p) - \tau^2 \frac{s^2}{\Delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Delta \left(1 - \tau \frac{s}{\Delta} \cos (\varphi - p) - \frac{\tau^2}{2} \frac{s^2}{\Delta^2} [1 - \cos^2 (\varphi - p)] + \cdots\right)$$

$$\Delta_0 = \Delta - \tau s \cos (\varphi - p) - \frac{\tau^2}{2} \frac{s^2}{\Delta} \sin^2 (\varphi - p).$$

Hiernach haben wir aus den beobachteten Werthen der Distanz und des Positionswinkels zunächst folgende auf den Jahresanfang und von Aberration befreite Werthe zu bilden:

$$\Delta_0' = \Delta - km \sin (\odot - M) - \tau s \cos (\varphi - p) - \frac{\tau^2}{2} \frac{s}{\Delta} s \sin^2 (\varphi - p)$$

$$p_0' = p - An \sin A \sec D - B \cos A \sec D - km' \sin (\odot - M') +$$
$$- \tau \frac{s}{\Delta} \frac{\sin (\varphi - p)}{\sin 1''} + \frac{\tau^2}{2} \frac{s^2}{\Delta^2} \frac{\sin 2 (\varphi - p)}{\sin 1''}$$

und haben dann zur Bestimmung der wahren Werthe von Δ und p, sowie der Parallaxe und des Unterschiedes der Aberrationsconstanten die Bedingungsgleichungen unter Berücksichtigung einer aus den Fehlern der Eigenbewegung hervorgehenden Correction:

$$\Delta'_0 = \Delta_0 + \tau d\Delta + \pi R m \cos (\odot - M) + \Delta k m \sin (\odot - M)$$
$$p'_0 = p_0 + \tau dp + \pi R m' \cos (\odot - M') + \Delta k m' \sin (\odot - M').$$

Dieses ist diejenige Methode, die, seit BESSEL mit ihrer Hülfe die erste, keinem Zweifel mehr unterworfene, Parallaxe, die von 61 Cygni bestimmte, in der Folge für die genauesten Bestimmungen angewandt ist. Sie hat uns durch die Beobachtungen auf der Sternwarte am Cap der guten Hoffnung und zu New-Haven durch GILL und ELKIN zu einer Reihe sehr gut verbürgter Parallaxen geführt.

Um noch die günstigsten Bedingungen für die Beobachtung zu ermitteln, gehen wir über zu dem sphärischen Dreieck zwischen dem Pol der Ekliptik und den beiden Sternen; in diesem bestehen, wenn wir mit q den auf den Breitenkreis bezogenen Positionswinkel und mit B das arithmetische Mittel der Breiten der beiden Sterne bezeichnen, die den früheren analogen Gleichungen

$$d\Delta = -\cos q\, d\beta - \sin q \cos B\, d\lambda$$
$$\Delta d q \sin 1'' = \sin q\, d\beta - \cos q \cos B\, d\lambda.$$

Führen wir nun ein

$$d\lambda = + R\pi \sec\beta \sin(\odot - \lambda) \qquad d\beta = - R\pi \sin\beta \cos(\odot - \lambda)$$

und setzen

$$-\cos B \sec\beta \sin q = v \sin V \qquad -\cos B \sec\beta \cos q = u \sin U$$
$$\sin\beta \cos q = v \cos V \qquad - \sin\beta \sin q = u \cos U,$$

so wird

$$d\Delta = \pi R v \cos(\odot - \lambda - V) \quad \Delta dq = \frac{1}{\sin 1''}\pi R u \cos(\odot - \lambda - U).$$

Es treten also die Maximalwirkungen ein in der Distanz, wenn $\odot = V + \lambda$ oder $= 180° + V + \lambda$ ist, im Positionswinkel dagegen, wenn $\odot = \lambda + U$ oder $= 180° + \lambda + U$ ist. Die Maximalwerthe sind $\pi R v$ bezw. $\pi R u$. Nun ist aber, wenn wir vom Unterschiede von $\cos B$ und $\cos\beta$ absehen, der hier stets sehr klein ist,

$$u^2 = 1 - \cos^2 B \sin^2 q \qquad v^2 = 1 - \cos^2 B \cos^2 q.$$

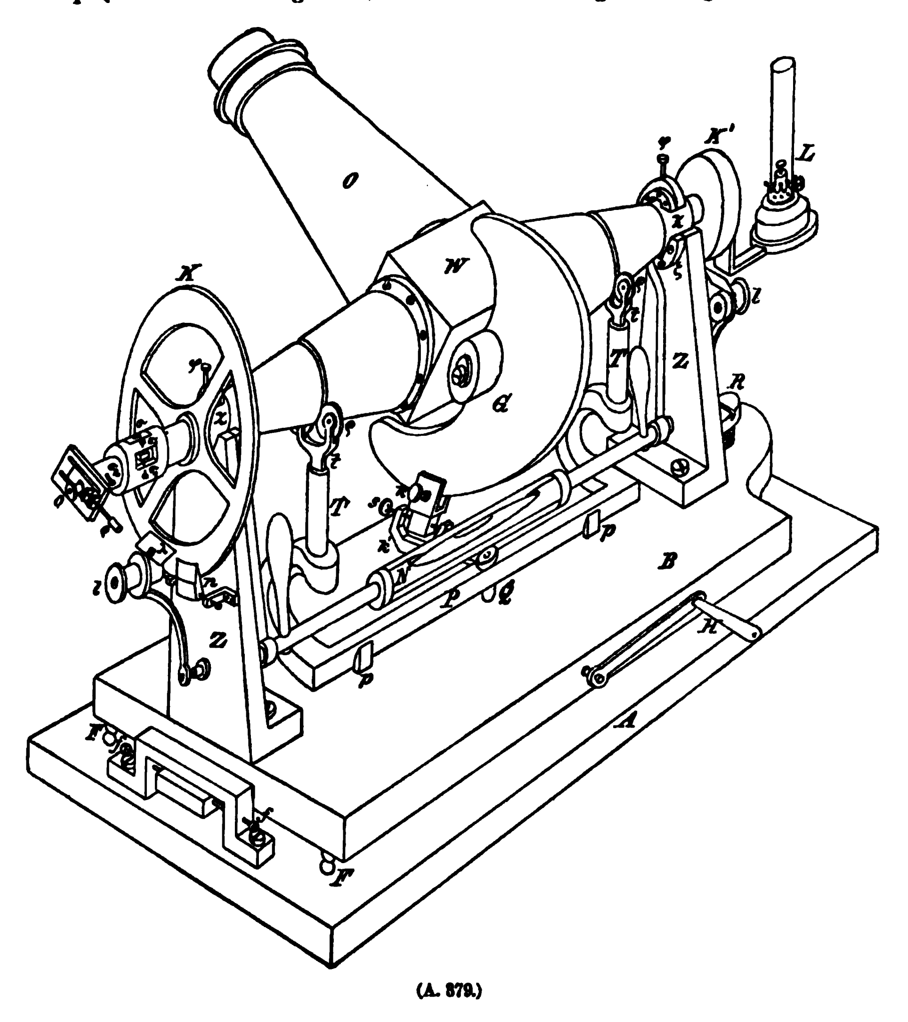
Es ist also die Wirkung der Parallaxe im Positionswinkel ein Maximum im Breitenkreise des Hauptsternes, für die Distanz dagegen für Sterne im Parallel zur Ekliptik, wie dies sich ja auch aus der Lage der Parallaxen-Ellipse ergiebt.

Es ist noch zu erwähnen, dass man in den letzten Jahren versucht hat, auch für die Bestimmung der Parallaxen sich der Photographie zu bedienen, indem man die Distanzen den zu verschiedenen Zeiten aufgenommenen Platten entnimmt und dann die oben abgeleitete Bedingungsgleichung auf sie anwendet. Die erlangten Resultate scheinen aber neben den sich hinreichend klein ergebenden, aus der Unsicherheit der Messungen hervorgehenden wahrscheinlichen Fehlern noch durch systematische, der Methode selbst anhaftende Fehler entstellt zu sein, so dass wenigstens die bisher bekannt gewordenen Resultate, namentlich die PRITCHARD'schen, kein Vertrauen verdienen. KOBOLD.

Passageninstrument. Der Vorzug einer stabilen Aufstellung ist für Zeitbestimmungen aus Sterndurchgängen durch den Meridian so augenfällig, dass man an Stelle des Universalinstrumentes besser den Meridiankreis, oder wo es sich um Messungen von Zenithdistanzen nicht handelt, ein Durchgangs- oder Passageninstrument wählt. Dasselbe hat mit dem Meridiankreise das gemeinsam, dass es ein um eine feste horizontale Achse drehbares Fernrohr besitzt, an welchem jedoch nur ein kleiner Einstellkreis angebracht ist.

Trotz der Mannigfaltigkeit der Einrichtungen, welche dem Instrumente von verschiedenen Mechanikern gegeben wird, ist im Grossen und Ganzen die Construction durch obige Bestimmungen bereits festgestellt. Fig. 379 zeigt ein Passageninstrument mit gebrochenem Fernrohr in halbschematischer Darstellung. O ist der Objectivstutzen; ein im Würfel w angebrachtes, total reflectirendes Prisma wirft die Lichtstrahlen in den in der hohlen Achse gelegenen Ocularstutzen, in welchen übrigens durch ein in der Mitte des grossen Prismas angebrachtes kleines Prisma die Lichtstrahlen von der Lampe L zur Beleuchtung des Feldes gebrochen durchgehen. G ist ein Gewicht zur Aequilibrirung des Objectivstutzens

und dient gleichzeitig zur Klemmung des Fernrohres mittels der Klemme *k*; zur Feinbewegung dient die Schraube *s*. Der Ocularauszug, welcher das Fadenkreuz enthält, kann durch die Schräubchen σ in der richtigen Entfernung vom Objectiv festgestellt werden; zur Berichtigung der Stellung der Fäden dienen die Schräubchen σ_1 (Senkrechtstellung der Fäden zur Richtung der täglichen Bewegung)



(A. 879.)

und σ_2 (Correction des Collimationsfehlers). Das Ocular *o* wird auf einem Schlitten durch die Schraube ρ über das ganze Gesichtsfeld geführt.

Die Stellung des Fernrohres wird von dem Kreise *K* mit Hilfe des Nonius *n* und der Lupe *l* abgelesen. Bei umgelegtem Instrumente treten Nonius und Lupe der anderen Seite in Function. Die an den Lupen angebrachten Plättchen λ dienen zur Beleuchtung der Kreistheilung. Kreis und Oculartheil sind durch die Lampe und das Gewicht *K'* äquilibrirt.

Die Zapfen *z* ruhen in den Zapfenlagern ζ, welche an den Ständern *Z* festgeschraubt sind, die auch die erwähnten Nonien und Lupen tragen. Das Gewicht des Instrumentes ruht jedoch zum grössten Theile mittels der Rollen ρ auf den Trägern *t*, die ihre Führung in den Säulen *T* haben, in denen sie auf starken Federn ruhen, die eben genügend stark sind, das Instrument zu tragen, so dass

es noch (sammt dem Niveau) mit einem geringen Uebergewichte in die Zapfenlager sicher einfällt, ohne diese stark abzunützen (die Zapfen sind gewöhnlich aus hartem, polirtem Stahl, das Lager aus Rothguss). Die Säulen *T* ruhen nicht fest auf der Bodenplatte *B*, auf welcher die Zapfenträger *Z* festgeschraubt sind, sondern sind behufs Umlegung des Instrumentes durch passende Bügel, welche dem Niveau hinreichend Raum geben, mit dem massiven horizontalen Arm *P* verbunden, der auch den Körper *k'* für die Klemme und Feinbewegung trägt, und auf der Säule *Q* ruht, welche mittels der Handhabe *H* durch ein Excenter gehoben und gesenkt werden kann. Die richtige Stellung von *P* wird durch vier niedrige Säulchen *p*, zwischen denen der Arm nach jeder Umlegung einfällt, gesichert. Durch Umlegen des Armes *H* auf die andere Seite wird das Instrument sammt Klemmvorrichtung und Niveau so weit gehoben, dass es bequem über den Lagern *Z*, ζ und den Säulchen *p* hinweggedreht werden kann. Das Senken des Instrumentes muss sehr langsam und mit der äussersten Vorsicht stattfinden, um einseitigen Druck auf die Zapfenlager zu vermeiden.

Die *V*-förmigen Lager des Niveaus *N* liegen in denselben Querschnitten wie die *V*-förmigen Lager von ζ; neben denselben ruht aber das Niveau auf kleinen Röllchen, welche in entsprechender Weise vereinigt durch einen Stift in dem Federgehäuse φ herabgedrückt werden. Die Stärke der Feder ist ausreichend, damit das Gewicht des Niveaus zum grössten Theile auf den Röllchen ruht, und nur ein kleines Uebergewicht für das sichere Einfallen auf den Zapfen resultirt[1]).

Die Bodenplatte *B* ruht auf einer Seite mit zwei Füsschen *F*, auf der anderen Seite mittels der Schraube *R* auf der auf einem Pfeiler festgegypsten Grundplatte *A*. Die Schraube *R* dient zur Correction der Neigung; behufs Correction im Azimute ist eine Nase der Bodenplatte *B* zwischen zwei Schrauben *f*, deren Muttern in einem auf der Grundplatte *A* festgeschraubten Bügel sind, beweglich.

Das Passageninstrument wird vorzugsweise in zwei Aufstellungen verwendet, als Passageninstrument im Meridian und im ersten Vertical.

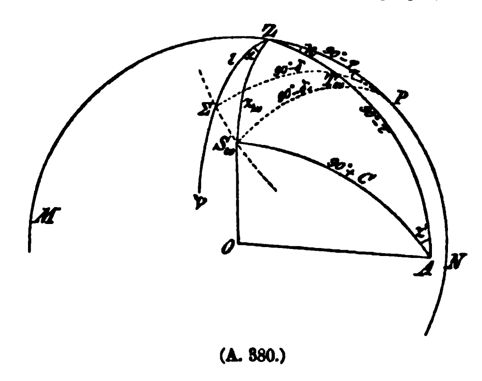
Die Benutzung des Passageninstrumentes im Meridian ist vollständig identisch derjenigen des Meridiankreises zu Sterndurchgängen und ist dem beim Meridiankreise in dieser Richtung bemerkten nichts weiter hinzuzufügen, da, um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, auf die bei dem Meridiankreise nicht übliche aber beim Passageninstrumente in überwiegender Mehrzahl verwendete Construction des gebrochenen Fernrohres auch bereits dort Rücksicht genommen wurde.

Das Passageninstrument im ersten Verticale wurde bereits von Olaus Römer vorgeschlagen, und von Horrebow empfohlen; aber erst nach den Untersuchungen von Bessel und Hansen gelangte dasselbe zu eingehender Würdigung. In dem Artikel »Polhöhenbestimmung« wird gezeigt, dass Durchgänge von Sternen im selben Höhenkreise auf der Ost- und Westseite für Polhöhenbestimmungen dann am günstigsten werden, wenn man als Höhenkreis den ersten Vertical wählt. Eine nahe Orientirung des Instrumentes ist leicht zu erzielen, wenn man sich, am besten mit einem Universalinstrument, die Richtung des Meridians und dann sofort die darauf senkrechte ermittelt. Eine genaue

[1]) Von manchen anderen Entlastungseinrichtungen mag noch diejenige erwähnt werden, bei welcher Verlängerungen des horizontalen Armes des Niveaus *N* in Nischen der Ständer *Z* auf Federn ruhen oder durch Gewichte am äusseren Arme eines zweiarmigen Hebels gehoben werden.

Orientirung geschieht nach der Bestimmung der Instrumentalfehler selbst, doch wird man stets wieder die Abweichungen des Instrumentes von seiner theoretisch geforderten Lage in Rechnung ziehen müssen.

Sei Z (Fig. 380) das Zenith, P der Pol, S ein in der Nähe des Westverticales in dem Stundenwinkel T beobachteter Stern; das zugehörige Azimuth wird, wenn ZV der erste Vertical, also $NZV = 90°$ ist, $NZS = 90° - a$ sein, wobei a der Annahme nach eine kleine Grösse ist. Ist das Instrument fehlerfrei aufgestellt, so wird die Achse OA desselben horizontal und genau nach Norden gerichtet sein, und die optische Achse OS des Instrumentes senkrecht auf der Achse OA stehen. Seien die als klein vorausgesetzten Instrumentalfehler: i die Neigung der Achse, positiv, wenn das nördliche Achsenende das höhere ist, k das Azimuth der Achse, positiv von Norden gegen Westen (bezw. von Süden gegen Osten) gezählt, C der Collimationsfehler des Fadens (also gleich dem Collimationsfehler des Mittelfadens, mehr dem Abstande des Seitenfadens vom Mittelfaden) positiv, wenn der Winkel $SOA > 90°$ ist, so ist $ZA = 90° - i$, $ZS = z$, $SA = 90° + C$, $NZA = k$.



(A. 380.)

Aus dem Dreiecke ZSA (bezw. dem analogen auf der Ostseite gelegenen) erhält man, wenn die auf den Westvertical bezüglichen Grössen mit dem Index w, die auf den Ostvertical bezüglichen mit dem Index o versehen werden:

$$\begin{aligned} \cos(90° + C) &= \cos z_w \sin i + \sin z_w \cos i \cos(90° - a - k) \\ -\sin C &= \sin i \cos z_w + \cos i \sin z_w \sin a_w \cos k + \cos i \sin z_w \cos a_w \sin k \\ -\sin C &= \sin i \cos z_o - \cos i \sin z_o \sin a_o \cos k - \cos i \sin z_o \cos a_o \sin k. \end{aligned} \qquad (1)$$

Nun hat man

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \\ \sin z \cos A &= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \\ \sin z \sin A &= \cos\delta \sin t, \end{aligned}$$

wenn A das von Süd über West gezählte Azimuth und t der von Süd über West gezählte Stundenwinkel ist. Nennt man T_w, T_o die absolut genommenen Stundenwinkel bei der West- bezw. Ostbeobachtung, also $t = T_w$, $360° - t = T_o$, und berücksichtigt, dass für den Westvertical $A = 90° + a_w$, für den Ostvertical $A = 270° + a_o$ ist, so folgt:

$$\begin{aligned} \sin z_w \sin a_w &= +\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos T_w \\ \sin z_w \cos a_w &= +\cos\delta \sin T_w \\ \sin z_o \sin a_o &= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos T_o \\ \sin z_o \cos a_o &= +\cos\delta \sin T_o, \end{aligned} \qquad (2)$$

wodurch die Gleichungen (1) in die folgenden übergehen:

$$-\sin C = \sin i \cos z_w + \cos i \cos k \sin z_w \sin a_w + \cos i \sin k \cos\delta \sin T_w$$

und ebenso die zweite, aus welchen

$$\begin{aligned} \sin z_w \sin a_w &= -\frac{\tang i}{\cos k} \cos z_w - \tang k \cos\delta \sin T_w - \frac{\sin C}{\cos i \cos k} \\ \sin z_o \sin a_o &= +\frac{\tang i}{\cos k} \cos z_o - \tang k \cos\delta \sin T_o + \frac{\sin C}{\cos i \cos k} \end{aligned} \qquad (3)$$

folgt. Die Gleichungen (3) geben den einem gewissen Sterne in einem gegebenen Stundenwinkel entsprechenden Werth von $\sin z \sin a$, auf den es hier wesentlich ankommt, ausgedrückt durch die Instrumentalfehler i, k, C. Die Gleichungen sind noch völlig strenge, d. h. giltig für jeden beliebigen Werth der Instrumentalfehler. a_w und a_o sind positiv, wenn (sowohl im Ost- wie im Westverticale) der Stern nach dem Durchgange durch den ersten Vertical beobachtet wird.

Substituirt man in die Gleichungen (3) für $\sin z \sin a$ den Werth aus (2), so erhält man

$$\sin\varphi\cos\delta\cos T - \cos\varphi\sin\delta = \frac{\tang i}{\cos k}\cos z \pm \tang k\cos\delta\sin T + \frac{\sin C}{\cos i\cos k} \tag{4}$$

wo das obere Zeichen für Stern West, das untere für Stern Ost gilt.

Für den Durchgang durch den ersten Vertical gelten die Gleichungen

$$\begin{array}{llll} \sin\delta = \sin\varphi\cos\zeta & \text{(a)} & \tang\varphi = \tang\delta\sec\tau & \text{(c)} \\ \sin\zeta = \cos\delta\sin\tau & \text{(b)} & \tang\zeta = \cos\varphi\tang\tau & \text{(d)} \\ \multicolumn{4}{c}{\cotang\varphi\sin\delta = \cotang\tau\sin\zeta, \quad \text{(e)}} \end{array} \tag{5}$$

wenn man mit ζ und τ Zenithdistanz und Stundenwinkel im ersten Verticale bezeichnet, beide Werthe ebenfalls ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Die Gleichung 5 c) ist identisch mit

$$0 = \sin\delta\cos\varphi - \cos\delta\sin\varphi\cos\tau.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der ersten Gleichung (2) und addirt sie zur dritten, so erhält man

$$\begin{gathered} (\cos\tau - \cos T_w)\cos\delta\sin\varphi = \sin z_w \sin a_w \\ (\cos T_o - \cos\tau)\cos\delta\sin\varphi = \sin z_o \sin a_o \\ 2\sin\tfrac{1}{2}(\tau + T_w)\sin\tfrac{1}{2}(T_w - \tau)\cos\delta\sin\varphi = \sin z_w \sin a_w \\ 2\sin\tfrac{1}{2}(\tau + T_o)\sin\tfrac{1}{2}(\tau - T_o)\cos\delta\sin\varphi = \sin z_o \sin a_o. \end{gathered} \tag{6}$$

Auch diese Gleichungen gelten noch für jede beliebige Abweichung des Instrumentes vom ersten Verticale. Im Folgenden soll nun aber das Instrument als sehr nahe im ersten Verticale orientirt angesehen werden; die Orientirungsfehler i, k sind dann stets nur wenige Bogensecunden, und nur bezüglich C, welches auch mehrere Bogenminuten werden kann, kann nicht dieselbe Voraussetzung gemacht werden. In allen Fällen aber wird es ausreichen, in den Entwickelungen die ersten Potenzen von i, k und die dritten Potenzen von C mitzunehmen, da für jene Fälle, wo die höheren Potenzen merklich werden, eine Rechnung nach geschlossenen Formeln vorzuziehen sein wird.

Sei also in den Gleichungen (6):

$$\begin{array}{ll} \sin z_w \sin a_w = y_w & \tfrac{1}{2}(T_w - \tau) = u_w \\ \sin z_o \sin a_o = y_o & \tfrac{1}{2}(\tau - T_o) = u_o, \end{array} \tag{7}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} 2\sin(\tau + u_w)\sin u_w\cos\delta\sin\varphi = y_w &= -i\cos z_w - k\cos\delta\sin T_w - \sin C \\ 2\sin(\tau - u_o)\sin u_o\cos\delta\sin\varphi = y_o &= +i\cos z_o - k\cos\delta\sin T_o + \sin C. \end{aligned} \tag{8}$$

Aus der Gleichung

$$\sin(M \pm \xi)\sin\xi = \sin M\cdot\eta$$

folgt aber für kleine Werthe von ξ und η, deren dritte Potenzen[1]) noch berücksichtigt werden:

$$\begin{gathered} \sin\xi\cos\xi \pm \cotang M\sin^2\xi = \xi \pm \xi^2\cotang M - \tfrac{2}{3}\xi^3 = \eta \\ \xi = \eta \mp \eta^2\cotang M + \tfrac{2}{3}\eta^3(1 + 3\cotang^2 M). \end{gathered}$$

---

[1]) η wird hier von der Ordnung $y\,\cosec\tau$, daher für zenithnahe Sterne wesentlich vergrössert.

Man erhält daher aus (8), indem $M = \tau$, $\eta = \frac{y}{2\cos\delta\sin\varphi\sin\tau} = \frac{y}{2\sin\varphi\sin\zeta}$ gesetzt wird:

$$u = \frac{y}{2\sin\varphi\sin\zeta} \mp \frac{y^2 \, cotang\,\tau}{4\sin^2\varphi\sin^2\zeta} + \frac{1}{12}\frac{y^3(1 + 3\,cotang^2\tau)}{\sin^3\varphi\sin^3\zeta}. \tag{9}$$

Sind Θ_w, Θ_o die Sternzeiten des Durchganges des Sternes durch den ersten Vertical, ϑ_w, ϑ_o die beobachteten Uhrzeiten, also $\vartheta_w + x$, $\vartheta_o + x'$ die zugehörigen Sternzeiten, wenn x, x' die wegen Uhrgang in der Zwischenzeit verschiedenen Uhrstände sind, so ist

$$u_w = \tfrac{1}{2}(T_w - \tau) = \tfrac{1}{2}(\vartheta_w + x - \Theta_w)$$
$$u_o = \tfrac{1}{2}(\tau - T_o) = \tfrac{1}{2}(\vartheta_o + x' - \Theta_o).$$

Substituirt man in diesen Gleichungen die Werthe für u und y, so hätte man in y^2 und y^3 noch die Produkte iC und kC mitzunehmen, da dieselben für zenithnahe Sterne noch wegen der kleinen Divisoren merkliche Werthe erhalten; setzt man jedoch für den Mittelfaden den Collimationsfehler c sehr klein voraus, und ist f_s die Distanz eines südlichen Fadens, f_n diejenige eines nördlichen Fadens, so wird man

$$y_w' = -i\cos z_w - k\cos\delta\sin T_w - c$$
$$y_o' = +i\cos z_o - k\cos\delta\sin T_o + c$$

als sehr kleine Grössen ansehen können, deren Quadrate man vernachlässigen kann, und es wird

$$y_w = y_w' - \sin f_s; \quad y_o = y_o' + \sin f_s; \quad y_w = y_w' + \sin f_n; \quad y_o = y_o' - \sin f_n,$$

und es werden die Produkte $y'\sin f$ noch beizubehalten sein, wenn $\sin\zeta$ oder $\sin\tau$ im Nenner auftritt. Dann wird:

$$\begin{aligned} \Theta_w &= \vartheta_w + R_s + x + \eta_w(1 + \Psi_s\,cotang\,\tau); \quad \Theta_w = \vartheta_w - R_n + x + \eta_w(1 - \Psi_n\,cotang\,\tau) \\ \Theta_o &= \vartheta_o - R_s + x' + \eta_o(1 + \Psi_s\,cotang\,\tau); \quad \Theta_o = \vartheta_o + R_n + x' + \eta_o(1 - \Psi_n\,cotang\,\tau) \end{aligned} \tag{10}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_s &= \Psi_s + \tfrac{1}{2}\Psi_s^2\,cotang\,\tau + \tfrac{1}{6}\Psi_s^3(1 + 3\,cotang^2\tau); \quad \eta_w = -\frac{y_w'}{\sin\varphi\sin\zeta}; \quad \Psi_s = \frac{\sin f_s}{\sin\varphi\sin\zeta} \\ R_n &= \Psi_n - \tfrac{1}{2}\Psi_n^2\,cotang\,\tau + \tfrac{1}{6}\Psi_n^3(1 + 3\,cotang^2\tau); \quad \eta_o = -\frac{y_o'}{\sin\varphi\sin\zeta}; \quad \Psi_n = \frac{\sin f_n}{\sin\varphi\sin\zeta} \end{aligned} \tag{10a}$$

ist. Die Werthe R_s, R_n sind die Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden; ist das Instrument nicht genau orientirt (i, k, c nicht gleich Null), so tritt noch ein von der Summe der Orientirungsfehler η abhängiges Glied hinzu; da man aber in dem Produkte $\eta\Psi$ einfach $\Psi_s = R_s$: $\Psi_n = R_n$ setzen kann, so folgt als Reduction auf den Mittelfaden

für Stern	West	südliche	Fäden	$+ R_s(1 + \eta_w\,cotang\,\tau)$;	
„	„	„ nördliche	„	$- R_n(1 + \eta_w\,cotang\,\tau)$;	(11a)
„	„ Ost	südliche	„	$- R_s(1 - \eta_o\,cotang\,\tau)$	
„	„	„ nördliche	„	$+ R_n(1 - \eta_o\,cotang\,\tau)$	

und dann wird, wenn ϑ bereits die auf den Mittelfaden reducirte Durchgangszeit ist:

$$\begin{aligned} &\text{für Stern West:} \quad \Theta_w = \vartheta_w + x + \eta_w \\ &\text{für Stern Ost:} \quad \Theta_o = \vartheta_o + x' + \eta_o. \end{aligned} \tag{11b}$$

Diese Gleichungen sind abgeleitet unter der Voraussetzung, dass der Winkel der Absehlinie mit dem nördlichen Axenende $90° + c$ ist. Setzt man also voraus, dass dies der Winkel zwischen der Absehlinie und dem Kreisende ist, so gelten diese Gleichungen für Kreis Nord; für Kreis Süd wird dann der Winkel

zwischen der optischen Achse und dem nördlichen Kreisende $90° - c$; man erhält daher die Gleichungen für Kreis Süd, indem man das Zeichen von c in den Endgleichungen umkehrt. Selbstverständlich werden dann aber die früher südlichen Fäden nördlich liegen; die Reductionen werden aber für jeden Faden in derselben Weise ausgedrückt werden, nur werden jetzt die Fadendistanzen gemäss der geänderten Fadenreihe andere. Man hat daher für:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Kreis Nord, Stern West: } \Theta_w = \vartheta_w + x + \frac{i_w}{\sin\varphi \tang\zeta} + \frac{k}{\sin\varphi} + \frac{c}{\sin\varphi\sin\zeta} \\
&\text{Kreis Nord, Stern Ost: } \Theta_o = \vartheta_o + x' - \frac{i_o}{\sin\varphi \tang\zeta} + \frac{k}{\sin\varphi} - \frac{c}{\sin\varphi\sin\zeta} \\
&\text{Kreis Süd, Stern West: } \Theta_w = \vartheta_w + x'' + \frac{i_w'}{\sin\varphi \tang\zeta} + \frac{k}{\sin\varphi} - \frac{c}{\sin\varphi\sin\zeta} \\
&\text{Kreis Süd, Stern Ost: } \Theta_o = \vartheta_o + x''' - \frac{i_o'}{\sin\varphi \tang\zeta} + \frac{k}{\sin\varphi} + \frac{c}{\sin\varphi\sin\zeta}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Die Reduktionen auf den Mittelfaden folgen nach

$$\Psi = \frac{f}{\sin\varphi\sin\zeta}; \quad R = \Psi \pm \frac{15\, arc\, 1''}{2}\Psi^2 \cot\tau \begin{cases}\text{südliche}\\ \text{nördliche}\end{cases} \text{Fäden}$$

$$\text{Reduktion} = \begin{cases} R\left(1 + \dfrac{i\cos z + k\cos\delta\sin T_w \pm c}{\sin\varphi\sin\zeta\tang\tau}\right) \text{ Stern West} \\ R\left(1 + \dfrac{i\cos z - k\cos\delta\sin T_o' \pm c}{\sin\varphi\sin\zeta\tang\tau}\right) \text{ Stern Ost.} \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Bei sehr zenithnahen Sternen wird die Reihe in (II) wegen ihrer schwachen Convergenz unbrauchbar, und es wird daher besser, andere Reductionsformeln anzuwenden. Um solche zu erhalten, seien ganz allgemein z, t Zenithdistanz und Stundenwinkel für ein gewisses Azimuth a, und z_0, t_0, a_0 dieselben Grössen für einen anderen Moment, so ist

$$\cos t \sin\varphi \cos\delta = \cos\varphi\sin\delta \mp \sin z \sin a \qquad \cos z \sin\varphi = \sin\delta \mp \cos\varphi \sin z \sin a$$
$$\cos t_0 \sin\varphi \cos\delta = \cos\varphi\sin\delta \mp \sin z_0 \sin a_0 \qquad \cos z_0 \sin\varphi = \sin\delta \mp \cos\varphi \sin z_0 \sin a_0,$$

wo die oberen Zeichen für Stern West, die unteren für Stern Ost gelten. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}(\cos t_0 - \cos t)\sin\varphi\cos\delta &= \mp(\sin z_0 \sin a_0 - \sin z \sin a)\\ (\cos z_0 - \cos z)\sin\varphi &= \mp(\sin z_0 \sin a_0 - \sin z\sin a)\end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\cos z_0 - \cos z}{\cos t_0 - \cos t} = \cos\varphi\cos\delta. \quad \text{(12a)}$$

Nun ist

$$\sin z \sin a = \mp i\cos z - k\cos\delta\sin t \mp \sin C$$
$$\sin z_0 \sin a_0 = \mp \cos z_0 - k\cos\delta\sin t_0 \mp \sin C_0,$$

in welchen Gleichungen die Aufstellungsfehler i, k dieselben sind, aber die verschiedenen Zeitmomente Beobachtungen an verschiedenen Fäden entsprechen, deren sphärische Abstände von dem nördlichen Achsenende $90° + C$ und $90° + C_0$ sind. Es wird daher:

$$\begin{aligned}\sin z_0 \sin a_0 - \sin z\sin a &= \mp i(\cos z_0 - \cos z) - k\cos\delta(\sin t_0 - \sin t) \mp (\sin C_0 - \sin C)\\ &= \mp 2i\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(t - t_0)\sin\tfrac{1}{2}(t + t_0) + \\ &\quad + 2k\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(t - t_0)\cos\tfrac{1}{2}(t + t_0) \pm 2\sin\tfrac{1}{2}(C - C_0)\cos\tfrac{1}{2}(C + C_0).\end{aligned}$$

Setzt man daher $t_0 - t = l$, $C - C_0 = f$, so folgt aus der ersten Gleichung (12):

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}l\sin(t_0 - \tfrac{1}{2}l)\sin\varphi\cos\delta &= +2\sin\tfrac{1}{2}f\cos(\tfrac{1}{2}f + C_0) + \\ &+ 2i\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}l\sin(t_0 - \tfrac{1}{2}l) \mp 2k\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}l\cos(t_0 - \tfrac{1}{2}l)\end{aligned}$$

und da $2\sin\frac{1}{2}f\cos(\frac{1}{2}f + C_0) = 2\sin\frac{1}{2}f\cos\frac{1}{2}f\cos C_0 - 2\sin^2\frac{1}{2}f\sin C_0$ ist:

$$2\sin\tfrac{1}{2}l\sin(t_0-\tfrac{1}{2}l)\sin\varphi\cos\delta[1-i\,cotang\,\varphi\pm k\,cotang(t_0-\tfrac{1}{2}l)\,cosec\,\varphi]= \\ =\sin f\cos C_0\,[1-tang\tfrac{1}{2}f\,tang\,C_0]. \qquad (13)$$

Da nun für kleine Werthe der μ: $\sin(m+\mu)=\sin m+\mu\cos m=\sin m[1+\mu\,cotang\,m]$ ist, so wird die linke Seite von (13):

$$2\sin\tfrac{1}{2}l\sin(t_0-\tfrac{1}{2}l)\sin\varphi\cos\delta\,[1-i\,cotang\,\varphi][1\pm k\,cotang\,(t_0-\tfrac{1}{2}l)\,cosec\,\varphi] \\ =2\sin\tfrac{1}{2}l\sin(t_0-\tfrac{1}{2}l\pm k\,cosec\,\varphi)\sin(\varphi-i)\cos\delta.$$

Man erhält daher, da für südliche Fäden f und l positiv, für nördliche aber f und l negativ sind, wenn man in beiden Fällen die absoluten Werthe einführt:

$$\text{für südliche Fäden:}\quad \sin\tfrac{1}{2}l\sin(t_0\pm k\,cosec\,\varphi-\tfrac{1}{2}l)=\frac{\sin\tfrac{1}{2}f\cos(C_0+\tfrac{1}{2}f)}{\sin(\varphi-i)\cos\delta}$$
$$\text{für nördliche Fäden:}\quad \sin\tfrac{1}{2}l\sin(t_0\pm k\,cosec\,\varphi+\tfrac{1}{2}l)=\frac{\sin\tfrac{1}{2}f\cos(C_0-\tfrac{1}{2}f)}{\sin(\varphi-i)\cos\delta}. \qquad \text{(III)}$$

Aus diesen Gleichungen kann l bestimmt werden; die Correction $k\,cosec\,\varphi$ ist positiv für Stern West, negativ für Stern Ost; C_0 ist gleich $+$ oder $-c$, je nachdem bei Kreis Nord oder Süd beobachtet wird. Statt der Zähler rechts kann man setzen

$$\sin\tfrac{1}{2}f\cos(C_0\pm\tfrac{1}{2}f)=\tfrac{1}{2}\sin f\cos C_0\,[1-\tfrac{1}{2}C_0 f\,arc\,1''^2]=\tfrac{1}{2}\sin f.$$

Bei einem fest aufgestellten Instrumente, für welches φ als constant angesehen werden kann, wird man übrigens besser thun, die Reductionen für gegebene Deklinationen nach der Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}l_0\sin(t_0\mp\tfrac{1}{2}l_0)=\frac{\sin f}{2\sin\varphi\cos\delta} \qquad \text{(IVa)}$$

vorzunehmen, welche von den Instrumentalfehlern unabhängig ist; zur Bestimmung des wahren Werthes l der Reduction aber müssen noch die Instrumentalfehler berücksichtigt werden. Da aber nach (13)

$$\sin\tfrac{1}{2}l\sin(t_0\mp\tfrac{1}{2}l)=\frac{\sin f}{2\sin\varphi\cos\delta}[1+i\,cotang\,\varphi\mp k\,cotang(t_0-\tfrac{1}{2}l)\,cosec\,\varphi]$$

ist, so wird

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}(l-l_0)\sin[t_0\mp\tfrac{1}{2}(l+l_0)]}{\sin\tfrac{1}{2}l_0\sin(t_0\mp\tfrac{1}{2}l_0)}=+i\,cotang\,\varphi\mp k\,cotang\,(t_0\mp\tfrac{1}{2}l)\,cosec\,\varphi,$$

wofür man ausreichend genau setzen kann

$$l-l_0=2\frac{\sin(t_0\mp\tfrac{1}{2}l_0)}{\sin(t_0\mp l_0)}\sin\tfrac{1}{2}l_0\,[+i\,cotang\,\varphi\mp k\,cotang\,(t_0-\tfrac{1}{2}l_0)\,cosec\,\varphi].$$

Das Zeichen bei k ist positiv oder negativ für Stern West oder Ost; von den anderen Doppelzeichen gelten die oberen für südliche, die unteren für nördliche Fäden. Seien die Coëfficienten

$$\left.\begin{aligned}2\frac{\sin(t_0\mp\tfrac{1}{2}l_0)}{\sin(t_0\mp l_0)}\sin\tfrac{1}{2}l_0\,cotang\,\varphi&=a\\ 2\frac{\cos(t_0\mp\tfrac{1}{2}l_0)}{\sin(t_0\mp l_0)}\sin\tfrac{1}{2}l_0\,cosec\,\varphi&=b\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&-\text{für südliche Fäden}\\ &+\text{für nördliche Fäden}\end{aligned} \qquad \text{(IV b)}$$

so wird

$$l-l_0=a\,i\mp b\,k. \qquad -\text{für Stern West;}\ +\text{für Stern Ost.}$$

Die Werthe von a, b können leicht für eine gegebene grographische Breite mit den Argumenten t_0 und l_0 tabulirt werden.

Seien nun die Durchgänge auf den Mittelfaden reducirt, so hat man es

nur mehr mit den Gleichungen (I) zu thun. Zur Bestimmung der Polhöhe dient die Formel[1])

$$tang\,\varphi = \frac{tang\,\delta}{cos\,\frac{1}{2}\,(\theta_w - \theta_o)} \tag{14}$$

und man bedarf zur Berechnung derselben des Stundenwinkels $\tau = \frac{1}{2}(\theta_w - \theta_o)$ im ersten Vertical, der nach den folgenden Beobachtungsmethoden bestimmt werden kann.

1) Man beobachtet denselben Stern im Ost- und Westvertical in derselben Kreislage. Dann ist

$$\tau = \frac{1}{2}\,(\theta_w - \theta_o) = \frac{1}{2}\,(\vartheta_w - \vartheta_o + \Delta x) + \frac{1}{2}\,\frac{i + i'}{sin\,\varphi\,tang\,\zeta} \pm \frac{c}{sin\,\varphi\,sin\,\zeta} \tag{15}$$

wobei das positive Zeichen für Kreis Nord, das negative für Kreis Süd gilt, und Δx die Aenderung des Uhrstandes, also der Uhrgang in der Zwischenzeit ist. Hierbei bedarf es daher der Kenntniss des Collimationsfehlers, welcher z. B. aus terrestrischen Objecten mittels eines Azimuthzeichens und Schraube (wie beim Passageninstrument im Meridian) bestimmt werden kann.

2) Man beobachtet denselben Stern im Ost- und Westverticale in geänderter Kreislage. Unter Annahme eines constanten c und k fallen die von denselben abhängigen Glieder in der Differenz $\theta_w - \theta_o$ weg; man hat daher

$$\tau = \frac{1}{2}\,(\theta_w - \theta_o) = \frac{1}{2}\,(\vartheta_w - \vartheta_o + \Delta x) + \frac{1}{2}\,\frac{(i + i')}{sin\,\varphi\,tang\,\zeta}. \tag{16}$$

Da bei umgelegtem Instrumente beobachtet wird, so fällt hier im Mittel der Neigungen auch die Zapfengleichung heraus.

3) W. STRUVE's Methode: Man legt bei sehr zenithnahen Sternen während des Durchganges im Osten, und ebenso während des Durchganges im Westen, um; man erhält dann aus den Beobachtungen desselben Sternes alle vier Gleichungen (I) und kann dann nebst θ_w und θ_o auch k und c bestimmen.

Zwischen dem Durchgange durch den Ost- und Westvertical vergehen aber, wenn die Meridianzenithdistanz etwas grösser ist, schon mehrere Stunden. Bei grossen, fest aufgestellten Instrumenten kann man sich vielleicht auf die Constanz des Azimuthes verlassen; bei den transportabeln Instrumenten, welche bei den astronomisch-geodätischen Arbeiten benützt werden, kann die Inconstanz des Azimuthes nicht unbedeutende Fehler erzeugen. Man wird jedoch diesen Fehler vermeiden, wenn man die Dauer der Beobachtungen möglichst abkürzt, was nur möglich ist, wenn man zwei rasch hinter einander durch den Vertical gehende Sterne beobachtet. Allerdings wird man mit Rücksicht auf die geringe Geschwindigkeit der Sterne die Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen beider Sterne nicht unter ein gewisses Maass herabdrücken können, wenn man die Zahl der zu beobachtenden Fadenantritte nicht verringern will, doch wird man durch Beobachtung mehrerer passender Sterne zu verschiedenen Zeiten das Azimuth selbst, eventuell dessen Aenderung, mit bestimmen können. Da aber für verschiedene Sterne θ_w, θ_o nicht in der einfachsten Beziehung stehen, so werden die Formeln (I) den Dienst versagen, und es muss eine andere Reductionsmethode gewählt werden. Hierzu können die folgenden beiden Methoden dienen.

---

[1]) Genau auf dieselbe Weise erhält man durch blosse Durchgangsbeobachtungen die Deklinationen der Sterne bei bekannter Polhöhe, weshalb die Messung sich vorzüglich auch zur Bestimmung von astronomischen Constanten eignet (s. den Artikel »Nutation«).

Aus der Gleichung (5c) folgt

für Stern West: $tang\,\varphi = tang\,\delta\,sec\,(\theta_w - \alpha) = tang\,\delta\,sec\,(\vartheta_w + x_1 + C_w - \alpha)$

für Stern Ost: $tang\,\varphi = tang\,\delta\,sec\,(\alpha - \theta_o) = tang\,\delta\,sec\,(\alpha - \vartheta_o - x_2 - C_o)$,

wobei, wenn man die Beobachtungen auf den Mittelfaden reducirt voraussetzt:

$$C_w = \xi + \frac{i_w}{sin\,\varphi\,tang\,\zeta} + \frac{k}{sin\,\varphi} \pm \frac{c}{sin\,\varphi\,sin\,\zeta}$$
$$C_o = \xi - \frac{i_o}{sin\,\varphi\,tang\,\zeta} + \frac{k}{sin\,\varphi} \mp \frac{c}{sin\,\varphi\,sin\,\zeta}$$

ist. Das Doppelzeichen bei C bezieht sich auf die Kreislage; unter ξ ist ein eventueller Fehler des Uhrstandes verstanden, indem für die Beobachtung bei Kreis Nord $x = x_1 + \xi$, bei Kreis Süd $x = x_2 + \xi$ anzunehmen ist, und der Unterschied zwischen x_1 und x_2 von dem Uhrgange in der Zwischenzeit herrührt.

Rechnet man ψ nach den Formeln

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Stern West:} & tang\,\psi = tang\,\delta\,sec\,(\vartheta_w + x_1 - \alpha)\\ \text{Stern Ost:} & tang\,\psi = tang\,\delta\,sec\,(\alpha - \vartheta_o - x_2),\end{array}\right. \qquad \text{(V a)}$$

so hat man an dem so gerechneten Werthe der uncorrigirten Breite ψ noch eine von den Instrumentalfehlern herrührende Correction anzubringen. Beschränkt man sich dabei wie natürlich auf die ersten Potenzen von i, k und c, so wird für

Stern West: $tang\,\varphi - tang\,\psi = + tang\,\delta\,tang\,(\vartheta_w + x_1 - \alpha)\,sec\,(\vartheta_w + x_1 - \alpha)\,C_w =$
$= + tang\,\psi\,tang\,(\vartheta_w + x_1 - \alpha)\,C_w$

Stern Ost: $tang\,\varphi - tang\,\psi = - tang\,\delta\,tang\,(\alpha - \vartheta_o - x_2)\,sec\,(\alpha - \vartheta_o - x_2)\,C_o =$
$= - tang\,\psi\,tang\,(\alpha - \vartheta_o - x_2)\,C_o$

oder da

$$tang\,\varphi - tang\,\psi = \frac{sin(\varphi - \psi)}{cos\,\varphi\,cos\,\psi};\quad \left.\begin{array}{l} cos\,\varphi\,tang\,(\vartheta_w + x_1 - \alpha)\\ cos\,\varphi\,tang\,(\alpha - \vartheta_o - x_2)\end{array}\right\} = tang\,\zeta$$

ist, $sec\,(\varphi - \psi)$ mit $\varphi - \psi$ und in den Coëfficienten von C_w, C_o nach Bedarf φ mit ψ vertauscht werden darf:

$$\begin{array}{ll}\text{für Stern West;} & \varphi - \psi = sin\,\varphi\,tang\,\zeta\,C_w\\ \text{für Stern Ost:} & \varphi - \psi = - sin\,\varphi\,tang\,\zeta\,C_o.\end{array}$$

Man erhält daher für:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Kreis Nord Stern West:} & \varphi = \psi + \xi\,sin\,\varphi\,tang\,\zeta + i_w + k\,tang\,\zeta + c\,sec\,\zeta\\ \text{Kreis Nord Stern Ost:} & \varphi = \psi - \xi\,sin\,\varphi\,tang\,\zeta + i_0 - k\,tang\,\zeta + c\,sec\,\zeta\\ \text{Kreis Süd Stern West:} & \varphi = \psi + \xi\,sin\,\varphi\,tang\,\zeta + i_w' + k\,tang\,\zeta - c\,sec\,\zeta\\ \text{Kreis Süd Stern Ost:} & \varphi = \psi - \xi\,sin\,\varphi\,tang\,\zeta + i_0' - k\,tang\,\zeta - c\,sec\,\zeta\end{array}\right\} \quad \text{(V b)}$$

Würde man hier $c \pm f$ an Stelle von c setzen, so könnte man die Beobachtungen an den Seitenfäden unmittelbar, ohne sie erst auf den Mittelfaden zu reduciren, verwenden, wie dieses auch bei der folgenden Methode der Fall ist.

Aus (4) folgt nämlich

$$sin\,(\varphi - \delta) = 2\,sin\,\varphi\,cos\,\delta\,sin^2\tfrac{1}{2}T \left\{\begin{array}{l} -\,sin\,z_w\,sin\,a_w\\ +\,sin\,z_o\,sin\,a_o\end{array}\right.$$
$$= 2\,sin\,\varphi\,cos\,\delta\,sin^2\tfrac{1}{2}T + \left(\frac{tang\,i}{cos\,k}\,cos\,z \pm tang\,k\,cos\,\delta\,sin\,T + \frac{sin\,C}{cos\,i\,cos\,k}\right).$$

Nun ist:

$$cos\,\delta\,sin\,T = sin\,z\,cos\,a = \sqrt{sin^2 z - sin^2 z\,sin^2 a}$$
$$= \sqrt{sin^2 z - \left(\frac{tang\,i}{cos\,k}\,cos\,z \pm tang\,k\,cos\,\delta\,sin\,T + \frac{sin\,C}{cos\,i\,cos\,k}\right)^2}$$
$$= sin\,z\,[1 - \tfrac{1}{2}\,(i\,cotang\,z \pm k\,cos\,\delta\,sin\,T\,cosec\,z + C\,cosec\,z)^2]$$

In dem Produkte dieses Ausdruckes mit k werden daher die Instrumentalfehler in der dritten Ordnung auftreten, weshalb $\cos\delta \sin T$ unbedenklich durch $\sin z$ ersetzt werden, und auch ζ an Stelle von z_w, z_o treten kann. Man erhält daher, wenn man $C = c - f$ setzt, und demnach f der Abstand eines südlichen Seitenfadens vom Mittelfaden ist, wenn man die Beobachtungen an demselben Seitenfaden in beiden Kreislagen betrachtet, und

$$\sin(\varphi - \delta) = \varphi - \delta - S(\varphi - \delta)$$

setzt, wo $S(\varphi - \delta)$ die Reduction vom Bogen auf den Sinus bedeutet, für:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{K. N., *West:} & \varphi - \delta = S(\varphi - \delta) + 2\sin\varphi\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}T_w + c - f + i_w\cos\zeta + k\sin\zeta \\
\text{K. N., *Ost:} & \varphi - \delta = S(\varphi - \delta) + 2\sin\varphi\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}T_o + c - f + i_0\cos\zeta - k\sin\zeta \\
\text{K. S., *West:} & \varphi - \delta = S(\varphi - \delta) + 2\sin\varphi\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}T_w - c + f + i'_w\cos\zeta + k\sin\zeta \\
\text{K. S., *Ost:} & \varphi - \delta = S(\varphi - \delta) + 2\sin\varphi\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}T_o - c + f + i'_0\cos\zeta - k\sin\zeta.
\end{array}\right\}\text{(VI)}$$

In dem Gliede rechts: $2\sin\varphi\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}T_{w,o}$ hat man

$$T_w = (\vartheta_w + x_1) - \alpha; \quad T_o = \alpha - (\vartheta_o + x_2)$$

zu setzen. Hiernach bedarf man nicht der Reductionen vom Seitenfaden auf den Mittelfaden, sondern nur die Entfernungen f; auch diese fallen heraus, bezw. können mit bestimmt werden, wenn man den Stern im Ost- und Westvertical bei geänderter Kreislage beobachtet.

Die Gleichungen (V) und (VI) sind direkt verwendbar, um auch die Instrumentalfehler zu bestimmen. Durch Combination der Beobachtungen desselben Sternes zu beiden Seiten des Meridians bei geänderter Kreislage (z. B. K. N. Stern Ost und K. S. Stern West) eliminirt sich, wie man sieht, ein Fehler des Uhrstandes, somit auch der Rectascension[1]), das Azimuth und der Collimationsfehler, also auch, wenn zu beiden Seiten des Meridians am selben Faden beobachtet wird, die Fadendistanz selbst. Hingegen geht die Neigung mit dem vollen Betrage ein, und muss daher mit möglichster Sorgfalt bestimmt werden.

Will man auch k und c bestimmen, wobei man aber, wie erwähnt, k während längerer Zeiträume nicht als constant ansehen wird, so muss man mehrere Sterne unmittelbar hinter einander beobachten. Da selbst bei sehr geringen Unterschieden in der Deklination die Zenithdistanz ζ schon wesentlich verschieden wird, so kann man dabei den Coëfficienten von k nicht als constant ansehen. Bei diesen Beobachtungen wird sich daher das folgende Programm empfehlen:

Kreislage I[2]): a) Ein oder zwei Sterne in grösserer Zenithdistanz (v).
b) Zwei bis drei Sterne im Westverticale, ebenso viel im Ostverticale in kleinerer Zenithdistanz, möglichst abwechselnd, und so, dass die Summe der Zenithdistanzen auf beiden Seiten nahe dieselbe ist. (v und h).
c) Ein Stern in grösserer Zenithdistanz (v).
d) Ein Stern in sehr kleiner Zenithdistanz: an allen Fäden vor dem Mittelfaden.

Umlegen.

Kreislage II: e) Derselbe Stern an denselben Fäden.

Hierauf c), b), a), wenn möglich einzelne der früher im Ostverticale beobachteten, jetzt im Westverticale.

---

[1]) Nicht aber ein Fehler der Deklination, der stets mit dem vollen Betrage eingeht, weshalb man gut bestimmte Sterne wählen muss.

[2]) Je nachdem Kreislage I Nord oder Süd ist, wird Kreislage II Süd oder Nord. v bedeutet Beobachtung an Verticalfäden, h an Horizontalfäden; siehe pag. 366.

Eine solche Beobachtungsreihe bildet eine Gruppe, deren Beobachtung etwa zwei oder zwei und eine halbe Stunde beansprucht, und bei welcher die zenithnahen Sterne auf beiden Seiten des Verticales beobachtet werden können.

Für die Beobachtungen der Veränderlichkeit der Polhöhe (s. diese) sind jederzeit mindestens zwei Gruppen zu beobachten, so dass jede Gruppe immer eine Zeit lang mit der vorhergehenden und später mit der nachfolgenden beobachtet wird, wobei auch für die Sternpositionen (α und δ) Correctionen ermittelt werden.

Zur Ergänzung mag noch bemerkt werden, wie man auch gemessene Zenith. distanzen verwenden kann.

Die abgelesene Zenithdistanz z' ist gleich der Drehung des Fernrohres aus der Lage ZAO in die Ebene SAO (Fig. 380), also gleich dem Winkel ZAS. Nun hat man in dem Dreiecke AZS:

$$\cos z = -\sin i \sin C + \cos i \cos C \cos z'$$

daher, weil $\cos i = 1$, $\sin i = i$ gesetzt werden kann:

$$\cos z' - \cos z = i \sin C + \cos z\,(1 - \cos C)$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(z - z') \sin \tfrac{1}{2}(z + z') = 2 i \sin \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}C + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}C - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}C (1 - \cos z')$$

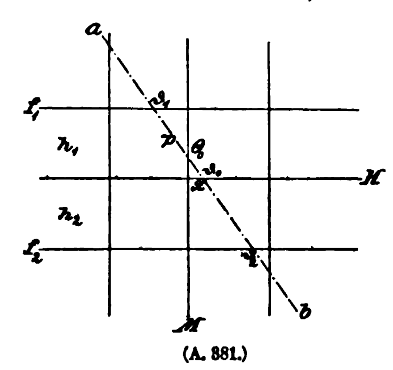
oder, da $z - z'$ von der Ordnung von iC und C^2 ist:

$$z - z' = \frac{2 \sin \frac{1}{2}C}{\sin z'}\left[i \cos \tfrac{1}{2}C + \sin \tfrac{1}{2}C\right] - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} z',$$

welche Gleichung mit Weglassung des letzten, verschwindenden Gliedes

$$z - z' = \frac{C \operatorname{arc} 1''}{\sin z'}\left[i + \tfrac{1}{2}C\right] \tag{17}$$

wird. C ist hier der Abstand des Punktes x (Fig. 381), in welchem der Stern den Horizontalfaden trifft, von der optischen Achse. Diese Correction würde für zenithnahe Sterne sehr beträchtlich; für $z = 5°$, $C = 5'$ wird $z - z'$ noch nahe $5''$; für kleinere Zenithdistanzen noch weit beträchtlicher. Für sehr kleine Zenithdistanzen ist aber zu beachten, dass der Stern überhaupt nicht in grössere Azimuthe, also in grössere Entfernung vom Mittelfaden kommen kann. Jedenfalls wird man sich bei der Messung der Zenithdistanzen an die Nähe des Mittelfadens halten und kann vielleicht als Directive gelten lassen, dass C nie grösser als $\frac{1}{60}z'$ angenommen werden soll.



(A. 881.)

Aus dem Dreiecke PZS folgt

$$\sin \delta = \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \cos A, \tag{18}$$

welche Gleichung für $A = 90° + a_w$ und $A = 270° + a_o$

$$\cos z_w \sin \varphi = \sin \delta - \cos \varphi \sin z_w \sin a_w$$
$$\cos z_o \sin \varphi = \sin \delta + \cos \varphi \sin z_o \sin a_o$$

wird. Verbindet man diese Gleichungen mit (5a), so erhält man

$$(\cos z_w - \cos \zeta) \sin \varphi = 2 \sin \tfrac{1}{2}(z_w + \zeta) \sin \tfrac{1}{2}(\zeta - z_w) \sin \varphi = -\cos \varphi \sin z_w \sin a_w$$
$$(\cos z_o - \cos \zeta) \sin \varphi = 2 \sin \tfrac{1}{2}(z_o + \zeta) \sin \tfrac{1}{2}(\zeta - z_o) \sin \varphi = +\cos \varphi \sin z_o \sin a_o,$$

und wenn

$$\tfrac{1}{2}(z_w - \zeta) = v_w; \qquad \tfrac{1}{2}(\zeta - z_o) = v_o$$

gesetzt wird:

$$
\begin{aligned}
2\sin(\zeta + v_w)\sin v_w \, tang\,\varphi &= y_w \\
2\sin(\zeta - v_o)\sin v_o \, tang\,\varphi &= y_o
\end{aligned}
\tag{19}
$$

wo y_w, y_o die in (7) angegebene Bedeutung haben. Hieraus folgt, ebenso wie aus (8), für $M = \zeta$, und $\eta = \frac{y}{2\,tang\,\varphi\,sin\,\zeta}$

$$
v = \frac{y}{2\,tang\,\varphi\,sin\,\zeta} \mp \frac{y^2\,cotang\,\zeta}{4\,tang^2\,\varphi\,sin^2\,\zeta} + \frac{1}{12}\frac{y^3(1 + 3\,cotang^2\,\zeta)}{tang^3\,\varphi\,sin^3\,\zeta} \tag{20}
$$

und da $\zeta = z_w - 2v_w$; $\zeta = z_o + 2v_o$ ist, so wird, indem, wie man leicht sieht, $tang\,\varphi$ an Stelle von $sin\,\varphi$ und $cotang\,\zeta$ an Stelle von $cotang\,\tau$ in (10) gesetzt wird:

$$
\Psi = \frac{f}{tang\,\varphi\,sin\,\zeta}:
$$

$$
R = \Psi \pm \frac{(15\,arc\,1'')}{2}\Psi^2\,cotang\,\zeta
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= z_w + R_s + \eta_w'(1 + \Psi_s cotang\zeta); \quad \zeta = z_w - R_n + \eta_w'(1 - \Psi_n cotang\zeta) \\
\zeta &= z_o + R_s - \eta_o'(1 + \Psi_s cotang\zeta); \quad \zeta = z_o - R_n - \eta_o'(1 - \Psi_n cotang\zeta)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

wobei η_w', η_o' eine den η_w, η_o analoge Bedeutung haben. Betrachtet man daher alle gemessenen Zenithdistanzen auf den Mittelfaden reducirt, so wird die daraus abgeleitete Zenithdistanz im ersten Verticale für:

$$
\begin{aligned}
&\text{Kreis Nord, Stern West:} \quad \zeta = z_w + \frac{i_w}{tang\,\varphi\,tang\,\zeta} + \frac{k}{tang\,\varphi} + \frac{c}{tang\,\varphi\,sin\,\zeta} \\
&\text{Kreis Nord, Stern Ost:} \quad \zeta = z_o + \frac{i_o}{tang\,\varphi\,tang\,\zeta} - \frac{k}{tang\,\varphi} + \frac{c}{tang\,\varphi\,sin\,\zeta} \\
&\text{Kreis Süd, Stern West:} \quad \zeta = z_w + \frac{i'}{tang\,\varphi\,tang\,\zeta} + \frac{k}{tang\,\varphi} - \frac{c}{tang\,\varphi\,sin\,\zeta} \\
&\text{Kreis Süd, Stern Ost:} \quad \zeta = z_o + \frac{i_o'}{tang\,\varphi\,tang\,\zeta} - \frac{k}{tang\,\varphi} - \frac{c}{tang\,\varphi\,sin\,\zeta}
\end{aligned}
\tag{VII}
$$

Allein man beobachtet die Zenithdistanzen nicht an einem Verticalfaden, sondern man beobachtet den Durchgang eines Sternes durch einen Horizontalfaden an einem gewissen Orte desselben; man hat es aber nicht in seiner Macht, an einem bestimmten Punkte desselben zu beobachten, da man zu diesem Zwecke das Instrument gerade in dem Momente des Durchganges probeweise verstellen müsste, bis der die Fäden schief passirende Stern genau an dieser bestimmten Stelle den Horizontalfaden kreuzt. Man wird daher eine gewisse Zenithdistanz einstellen, und den Moment nehmen, zu welchem der Stern einen Horizontalfaden H (Fig. 381) passirt. Um diese Beobachtung zu benützen, muss aber weiter die Stelle x des Fadens H bekannt sein, an welcher der Stern gekreuzt hat; diese ist wieder nicht bestimmbar und man muss daher nebstdem den Durchgang des Sternes an einem Verticalfaden M beobachten, und aus den beiden Zeiten Θ_0 am Verticalfaden und ϑ_0 am Horizontalfaden hat man die Lage des Kreuzungspunktes x zu bestimmen. Dieses kann auf zweierlei Weise geschehen; $\vartheta_0 - \Theta_0$ kann man als die Zeit betrachten, welche der Stern vom Faden M zu einem ideellen, nicht wirklich gespannten, durch x gehenden Seitenfaden benötigt, und kann mittels jener Zeitdifferenz den Abstand des ideellen Seitenfadens vom Mittelfaden, also den Collimationsfehler C dieses Seitenfadens bestimmen; oder man kann mittels dieser Zeitdifferenz aus der gemessenen Zenithdistanz, welche sich auf den Punkt x bezieht, die Zenithdistanz des Sterns bei der Kreuzung des Fadens M bestimmen, also die Zenithdistanz auf den Faden M reduciren.

Schreibt man die Gleichung (12a) in der Form:

$$\sin \tfrac{1}{2}(z - z_0) \sin \tfrac{1}{2}(z + z_0) = \sin \tfrac{1}{2}(t + t_0) \sin \tfrac{1}{2}(t - t_0) \cos \varphi \cos \delta, \tag{22}$$

so kann man hiernach eine zu einer gewissen Zeit gemessene Zenithdistanz auf einen anderen Zeitmoment übertragen; man hat nämlich, wenn z die zur Sternzeit θ beobachtete Zenithdistanz, und z_0 die zur Sternzeit θ_0 gehörige Zenithdistanz ist für:

Stern West:

$$\sin\tfrac{1}{2}(z - z_0) \sin [z - \tfrac{1}{2}(z - z_0)] = \sin\tfrac{1}{2}(\theta - \theta_0) \sin [\tfrac{1}{2}(\theta + \theta_0) - \alpha] \cos\varphi \cos\delta$$

Stern Ost:

$$\sin\tfrac{1}{2}(z - z_0) \sin [z - \tfrac{1}{2}(z - z_0)] = \sin\tfrac{1}{2}(\theta_0 - \theta) \sin [\alpha - \tfrac{1}{2}(\theta + \theta_0)] \cos\varphi \cos\delta \tag{VIII}$$

Setzt man die bekannten Grössen für

$$\text{Stern West: } \frac{1}{arc\,1''} \sin\tfrac{1}{2}(\theta - \theta_0) \cos\varphi \frac{\sin [\tfrac{1}{2}(\theta + \theta_0) - \alpha] \cos\delta}{\sin z} = Z$$

$$\text{Stern Ost: } \frac{1}{arc\,1''} \sin\tfrac{1}{2}(\theta_0 - \theta) \cos\varphi \frac{\sin [\alpha - \tfrac{1}{2}(\theta + \theta_0)] \cos\delta}{\sin z} = Z \tag{VIIIa}$$

wobei der als Coëfficient auftretende Bruch gemäss der Gleichung (5b) nahe 1 ist, so erhält man die Reihe

$$\tfrac{1}{2}(z - z_0) = Z + Z^2 \operatorname{cotang} z + \tfrac{2}{3} Z^3 (1 + 3 \operatorname{cotang}^2 z). \tag{VIIIb}$$

Für die Beobachtung der Zenithdistanzen wird es nun vortheilhaft (nebst den zur Beobachtung der Durchgangszeiten vorhandenen Verticalfäden) auch mehrere Horizontalfäden, am besten in ungrader Anzahl anzubringen: einen mittleren Hauptfaden und mehrere ihm parallele Nebenfäden. Die Beobachtungen werden dann am besten so angeordnet, dass man das Instrument in eine gewisse Zenithdistanz bringt, für welche in der Nähe einer Seitenfadengruppe der Stern etwa den Weg *ab* (Fig. 381) beschreibt. Der Kreis wird abgelesen, und die Zeiten der Antritte an den Seiten- und Nebenfäden beobachtet; hierauf wird das Fernrohr verstellt, so dass der Stern eine andere Seitenfadengruppe passirt; es wird wieder der Kreis gelesen und die Fadenantritte beobachtet, u. s. w. Da das Instrument dabei im Azimuth unverändert blieb, so werden die sämmtlichen Beobachtungen an den Seitenfäden nach den bereits abgeleiteten Formeln auf den Mittelfaden reducirt werden können, und es handelt sich hier nur mehr um die Reduction der Zenithdistanzen. Aus den beobachteten Fadenantritten ϑ_1 ϑ_0 ϑ_2 (unter der Annahme von zwei Nebenfäden) ist nun zuerst die genaue Zeit des Durchganges durch den Hauptfaden abzuleiten. Aus (VIII) folgt ganz allgemein

$$\sin \tfrac{1}{2}(\theta - \theta_0) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(z - z_0)}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin [z - \tfrac{1}{2}(z - z_0)]}{\sin [\tfrac{1}{2}(\theta + \theta_0) - \alpha] \cos\delta}$$

welche Gleichung für den Ost- und Westvertical gültig ist.

Sind die bekannten Fadenabstände zweier symmetrisch angebrachten Nebenfäden h_1 und h_2, so sind die Zenithdistanzen dieser Nebenfäden $z - h_1$ und $z + h_2$ und die auf den Hauptfaden reducirten Durchgangszeiten $\vartheta_1^{(0)}$, $\vartheta_2^{(0)}$ folgen aus den beobachteten ϑ_1, ϑ_2 aus:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\vartheta_1^{(0)} - \vartheta_1) = \frac{\tfrac{1}{2}h_1}{\cos\varphi \cos\delta} \cdot \frac{\sin (z - \tfrac{1}{2}h_1)}{\sin [\tfrac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_0) - \alpha]};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_2^{(0)}) = \frac{\tfrac{1}{2}h_2}{\cos\varphi \cos\delta} \cdot \frac{\sin (z + \tfrac{1}{2}h_2)}{\sin [\tfrac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_2) - \alpha]} \tag{23}$$

und wenn man die dritten Potenzen der Fadendistanzen vernachlässigt:

$$\tfrac{1}{3}[\vartheta_1^{(0)} + \vartheta_0^{(0)} + \vartheta_2^{(0)}] = \tfrac{1}{3}(\vartheta_1 + \vartheta_0 + \vartheta_2) +$$
$$+ \frac{1}{3\cos\varphi\cos\delta}\left\{h_1 \frac{\sin(z - \frac{1}{2}h_1)}{\sin[\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_0) - \alpha]} - h_2 \frac{\sin(z + \frac{1}{2}h_2)}{\sin[\frac{1}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_0) - \alpha]}\right\}, \quad (23a)$$

welche Gleichung für beide Seiten des Verticales gilt, wenn man mit ϑ die Antritte an den oberen Faden (Fäden mit kleineren Zenithdistanzen), mit ϑ_2 diejenigen an den unteren (Fäden mit grösseren Zenithdistanzen) versteht. Hat man n Fäden, so wird die Reduction des Mittels der Zeiten:

$$\text{Reduktion} = \frac{1}{n\cos\varphi\cos\delta}\left[\Sigma h_1 \frac{\sin(z - \frac{1}{2}h_1)}{\sin[\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_0) - \alpha]} - \Sigma h_2 \frac{\sin(z + \frac{1}{2}h_2)}{\sin[\frac{1}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_0) - \alpha]}\right].$$

Mit dieser Formel wird man stets ausreichen; will man sich aber von der Uebereinstimmung der Einzelresultate überzeugen, so wird man jede einzelne Antrittszeit auf den Hauptfaden reduciren.

Diese Antrittszeiten können dann mittels der Formeln VIII direkt auf den Mittelfaden, oder mittels (VIIIa) und (VIIIb) auf einen Seitenfaden und von diesem auf den Mittelfaden reducirt werden, d. h. auf denjenigen Punkt des Hauptfadens, in welchem dieser vom Mittelfaden geschnitten wird, woraus dann die Zenithdistanz ζ im ersten Verticale nach den Formeln (VII) erhalten wird.

Zur Bestimmung der Polhöhe aus der Deklination oder dieser aus jener dient die Formel

$$\sin\varphi = \sin\delta\sec\zeta; \qquad \sin\delta = \sin\varphi\cos\zeta. \quad (24)$$

Zur Ableitung von ζ unabhängig von den Instrumentalfehlern kann man wieder die früher angeführten drei Combinationen wählen; beobachtet man z. B. denselben Stern im Ost- und Westverticale bei geänderter Kreislage, so folgt unabhängig vom Azimuth, Collimationsfehler und Zapfengleichung

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(z_w + z_o) + \frac{\frac{1}{2}(i + i')}{\tang\varphi\,\tang\zeta} \quad (25)$$

Die Reduction kann aber auch hier noch nach zwei anderen Methoden vorgenommen werden. Die Gleichung (24) giebt

$$\sin\varphi = \sin\delta\sec\zeta = \sin\delta\sec(z + C),$$

wenn unter C die auf Seite 365 von i, k, c abhängigen Glieder verstanden werden. Hieraus folgt, wenn man ψ nach der Formel

$$\sin\psi = \sin\delta\sec z_w; \qquad \sin\psi = \sin\delta\sec z_o \quad (\text{V c})$$

berechnet, für die Correction von φ:

$$\sin\varphi = \sin\psi + \sin\psi\,\tang z\cdot C$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \sin\psi\,\tang z\cdot C,$$

und wenn wieder nur die erste Potenz von $\varphi - \psi$ berücksichtigt wird, und daher in dem Coëfficienten von C auch $\sin\varphi\,\tang\zeta$ an Stelle von $\sin\psi\,\tang z$ gesetzt wird:

$$\varphi - \psi = \tang\varphi\,\tang\zeta\cdot C,$$

woraus wieder die Gleichungen (Vb) hervorgehen, in denen hier $\xi = 0$ ist.

Zieht man weiter die Gleichung (18) von $\sin\varphi = \sin\varphi$ ab, so erhält man:

$$\sin\varphi - \sin\delta = \sin\varphi(1 - \cos z) + \sin z\cos\varphi\cos A,$$

also für $A = 90° + a_w$ und $A = 270° + a_o$:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta) = 2\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}z +$$
$$+ \cos\varphi\left(\frac{\tang i}{\cos k}\cos z \pm \tang k\cos\delta\sin T + \frac{\sin C}{\cos i\cos k}\right),$$

daher mit Rücksicht auf das pag. 362 erwähnte für

Kreis Nord, Stern West:

$$\varphi-\delta=S\left(\frac{\varphi-\delta}{2}\right)+2\frac{sin\varphi}{cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}sin^2\tfrac{1}{2}z_w+\frac{cos\varphi}{cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}\left[i_w cos\zeta+k\,sin\zeta+c-f\right]$$

Kreis Nord, Stern Ost:

$$\varphi-\delta=S\left(\frac{\varphi-\delta}{2}\right)+2\frac{sin\varphi}{cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}sin^2\tfrac{1}{2}z_o+\frac{cos\varphi}{cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}\left[i_o\,cos\zeta-k\,sin\zeta+c-f\right]$$

Kreis Süd, Stern West: (IX)

$$\varphi-\delta=S\left(\frac{\varphi-\delta}{2}\right)+2\frac{sin\varphi}{cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}sin^2\tfrac{1}{2}z_w+\frac{cos\varphi}{cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}\left[i_w'\,cos\zeta+k\,sin\zeta-c+f\right]$$

Kreis Süd, Stern Ost:

$$\varphi-\delta=S\left(\frac{\varphi-\delta}{2}\right)+2\frac{sin\varphi}{cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}sin^2\tfrac{1}{2}z_o+\frac{cos\varphi}{cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}\left[i_o'\,cos\zeta-k\,sin\zeta-c+f\right]$$

welche Gleichungen in derselben Weise wie die Gleichungen VI zu verwenden sind. Doch bedarf man hier immerhin der Reduction der Zenithdistanz von dem Zeitmomente des Durchganges durch den Hauptfaden auf diejenige Stelle desselben, wo er von dem nächstgelegenen Seitenfaden geschnitten wird.

N. Herz.

Persönliche Gleichung. Zu den systematischen Fehlern, welche von den zufälligen Beobachtungsfehlern zu trennen, und welche sowie die Instrumentalfehler bei der Reduction der Beobachtungen zu berücksichtigen sind, gehört eine gewisse Gruppe von Fehlern, welche wenn auch an sich oft klein, so doch dadurch von Wichtigkeit werden, dass sie Beobachtungen verschiedener Beobachter an demselben Instrumente, und selbst unter Umständen Beobachtungen desselben Beobachters am nämlichen Instrumente beeinflussen, d. h. von den mehrfach erwähnten Instrumentalfehlern unabhängig sind. Man ist im Laufe der Zeit auf verschiedene derartige Fehlerquellen aufmerksam geworden, von denen im Folgenden kurz gesprochen wird; das gemeinsame derselben ist aber, dass sie rein subjektiver Natur, an die Person des Beobachters geknüpft sind, weshalb man sie unter dem gemeinsamen Begriff der »persönlichen Fehler« zusammenfasst.

Die erste Beobachtung dieser Art war die Verschiedenheit in der Auffassung der Fadenantritte bei Durchgangsbeobachtungen; sie erfuhren aber anfangs nicht die richtige Deutung. Maskelyne bemerkte, dass sein Assistent Kinnebrook 1794 und Anfangs 1795 die Durchgänge der Sterne mit ihm selbst übereinstimmend beobachtet hatte, aber im August 1795 anfing, dieselben um $\frac{1}{2}$ Secunde später anzugeben, welcher Unterschied bis 1796 auf $0^s{\cdot}8$ angewachsen war, »so dass es nicht wahrscheinlich war, dass der Gehilfe zu einer richtigen Methode zu observiren zurückkehren würde«, weshalb Maskelyne sich gezwungen sah, ihn zu entlassen. Diese Beobachtung blieb vorerst völlig vereinzelt; kleine Unterschiede, die gewiss sehr häufig vorgekommen sein mögen, blieben unter den ebenso wenig berücksichtigten Instrumentalfehlern verborgen.

Der scharfsichtige Bessel vermuthete aber alsbald, dass es sich hier nicht um ein Verschulden des Assistenten gehandelt hatte, sondern dass der beobachtete Unterschied ein unwillkürlicher war. Er stellte 1819 Versuche mit Lindenau und Encke am Meridiankreise an, indem jeder einige Sterndurchgänge beobachtete; allein diese Versuche führten zu keinem Resultate; die Beobachtungen waren zu wenig zahlreich, die Unterschiede, d. h. die persönlichen Gleichungen jedenfalls zu klein. Erst im Winter des folgenden Jahres erhielt er durch Vergleiche mit Walbeck (in Königsberg) ganz bedeutende Unterschiede. Die Beobachtungs-

methode bestand darin, dass an einem Abende von 10 Sternen Bessel 5 und Walbeck die folgenden 5 beobachtete, am nächsten Abende umgekehrt Walbeck die ersten, Bessel die folgenden 5. Der Unterschied betrug über eine Secunde, und eine Wiederholung an folgenden Abenden bestätigte das Resultat, sodass sich aus den Beobachtungen von 1820 Dec. 16 bis 22 der Unterschied in der Auffassungszeit der Sterne

Bessel — Walbeck = + 1s·041

ergab, d. h. Bessel beobachtete alle Sterne um etwa 1s später als Walbeck.

1823 März 28 und April 15 beobachteten in derselben Weise Bessel und Argelander und es fand sich

Bessel — Argelander = — 1s·223.

Beobachtungen im Januar 1821 in Dorpat ergaben

Struve — Walbeck = — 0s·242

und im Juli 1823 ebenda

Struve — Argelander = — 0s·202.

Die Verbindung dieser Resultate mit den früheren ergiebt

Bessel — Struve = — 0s·799, bezw. — 1s·021.

Direkte Vergleichungen ergaben für Bessel — Struve

im Oktober	1814	— 0s·044	im Januar	1821	— 0s·799
im November	1820	— 0·680	im Juni	1823	— 1·021.

Die Differenzen waren also sehr beträchtlich, wenn auch im Ganzen ein Zweifel über die Qualität der Erscheinung nicht mehr obwalten konnte.

Bessel änderte nun die Versuchsanordnung in zwei Richtungen: es wurden nicht Bewegungen von Sternen beobachtet, sondern das plötzliche Verschwinden derselben, und da fand sich für diese Art der Beobachtungen:

Bessel — Argelander = — 0s·222 (78 Vergleiche)
— 0·281 (Verschwinden von Sternen am dunkl. Mondrande)
Struve — Argelander = — 0·031

also wesentlich kleiner. Daraus folgerte Bessel, dass der grösste Theil des Fehlers aus einer fehlerhaften Vergleichung der *stetigen* Bewegung des Sternes im Fernrohre mit den plötzlichen Secundenschlägen der Uhr resultire.

Bei einer zweiten Versuchsreihe beobachtete Bessel an einer Halbsecundenuhr. Die Reduction auf die Secundenuhr ergab

Bessel (Secundenuhr) — Bessel (Halbsecundenuhr) = — 0s·494
Bessel (Secundenuhr) — Argelander (Halbsecundenuhr) = — 1·227
Struve (Secundenuhr) — Argelander (Halbsecundenuhr) = — 0·227.

Die Erklärung, welche Bessel für den persönlichen Fehler giebt, war die foldende: »Wenn man annimmt, dass Eindrücke auf das Auge und das Ohr nicht in einem Momente mit einander verglichen werden können, und der zweite Beobachter zur Uebertragung des einen Eindruckes auf den anderen *verschiedene* Zeiten gebraucht, so entsteht ein Unterschied; ein noch grösserer aber, wenn der eine vom Sehen zum Hören, der andere vom Hören zum Sehen übergeht«. Die Bestimmung und Berücksichtigung des hieraus entstehenden Fehlers hält Bessel für wünschenswerth, allein für fast unmöglich.

Auch auf den hieraus resultirenden möglichen Unterschied bei Längenbestimmungen macht Bessel bereits aufmerksam: »Wenn z. B. Herr Dr. Argelander für von ihm beobachtete Sternbedeckungen die Zeit bestimmt hätte, so würde Königsberg nach seinen Beobachtungen eine Zeitsecunde östlicher liegen, als nach der meinigen; derselbe Unterschied kann bei den durch Pulverblitze oder

durch Signale mit dem Heliotropen bestimmten Meridianunterschieden eintreten, sodass auch diese Methoden nur dann Sicherheit gewinnen werden, wenn die Beobachter ihre Stationen wechseln«.

Ohne zunächst auf die physiologische oder psychologische Ursache der persönlichen Gleichung einzugehen, kann als nächste Ursache der Zeitdifferenz bei den Beobachtungen angenommen werden, dass jeder Beobachter die Erscheinung um einen gewissen Betrag (τ, τ') später auffasst, als sie eintritt, wobei τ, τ' möglicherweise auch negativ sein kann. Ist die wahre Zeit der Erscheinung t, so wird der Beobachter A dieselbe zur Zeit $t + \tau$ notiren, der Beobachter B — *ceteris paribus* — zur Zeit $t + \tau'$. Man nennt die Zeiten τ, τ' die absoluten persönlichen Fehler oder die absolute persönliche Gleichung. Die Differenz in der Auffassung derselben Erscheinung durch die beiden Beobachter A und A' ist

$$A - A' = \tau - \tau'.$$

$\tau - \tau'$ nennt man die relative persönliche Gleichung.

Ist für eine Längenbestimmung der Beobachter A an der westlichen Station W, A' an der östlichen O, so beobachtet A z. B. einen Sterndurchgang zur Zeit $t + \tau = \vartheta$[1]; A' zur Zeit $t + \tau' + \lambda = \vartheta'$ und die Längendifferenz ergiebt sich hieraus

$$\lambda = (\vartheta' - \vartheta) - (\tau' - \tau).$$

Wechseln die Beobachter die Stationen, sodass nunmehr A an der östlichen Station O, A' an der westlichen W beobachtet, so erhält man für die Zeiten der Sterndurchgänge in derselben Weise

$$t_1 + \tau' = \vartheta_1'; \quad t_1 + \lambda + \tau = \vartheta_1,$$

demnach

$$\lambda = (\vartheta_1 - \vartheta_1') + (\tau' - \tau).$$

Hieraus folgt:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}[(\vartheta' - \vartheta) + (\vartheta_1 - \vartheta_1')]$$
$$\tau' - \tau = \tfrac{1}{2}[(\vartheta' - \vartheta) - (\vartheta_1 - \vartheta_1')].$$

Das arithmetische Mittel der beiden Werthe der erhaltenen Länge ist daher frei von dem persönlichen Fehler; in der Differenz der erhaltenen Werthe ergiebt sich die relative persönliche Gleichung.

Diese Methode ist ebensowohl anwendbar für die Beobachtung von Sterndurchgängen als auch bei der Längenbestimmung durch Pulversignale.

Ohne Wechsel des Beobachters kann die persönliche Gleichung bestimmt werden, indem nach der zuerst von Bessel angewendeten Methode die beiden Beobachter an demselben Orte und an demselben Instrumente unmittelbar nach einander Zeitbestimmungen machen; der Unterschied in dem erhaltenen Uhrstande giebt unmittelbar die relative persönliche Gleichung. Fehler der Sternpositionen werden dabei eliminirt, wenn dieselben Beobachtungen an zwei aufeinander folgenden Beobachtungstagen so vorgenommen werden, dass die Beobachter die Sterne wechseln, wie oben pag. 369 erwähnt ist. Eine dritte Methode ist die, dass die beiden Beobachter denselben Stern an demselben Tage beobachten, indem A an den ersten, B an den letzten Fäden beobachtet; um dabei von den Fehlern der Fadendistanzen unabhängig zu sein, wird dann derselbe Stern an einem nächstfolgenden Tage so beobachtet, dass nunmehr B an den ersten und A an den letzten Fäden beobachtet.

---

[1]) Auf die Stromzeit ist dabei nicht Rücksicht genommen; vergl. hierüber den Artikel »Längenbestimmung«.

Bei Längenbestimmungen ist es dabei praktisch, dass die Beobachter vor Beginn der Längenbestimmung und nach Abschluss derselben zusammenkommen, um ihre persönliche Gleichung zu ermitteln.

Auch nach der Einführung der Registrirmethode änderte sich hieran nichts; jede Längenbestimmung lieferte neues Material für die Bestimmung der relativen persönlichen Gleichung verschiedener Beobachter. Aus den Resultaten ist nur hervorzuheben, dass sich dieselbe verschieden für die Auge- und Ohrbeobachtungen einerseits und für die Registrirmethode (Auge- und Handbeobachtungen) andererseits erwies, und dass sich derselbe für denselben Beobachter nicht als völlig constant zeigte.

Frühzeitig aber tauchte die Idee auf, den Werth von τ, die absolute persönliche Gleichung für den Beobachter selbst, zu bestimmen. Schon 1851 hatte F. KAISER in einem Aufsatze »Ueber eine neue Anwendung vom Principe der Nonien zur genaueren Beobachtung plötzlicher Erscheinungen«[1]) im 5. Bande des damaligen königlich niederländischen Institutes auf einen solchen hingewiesen; und bald darauf auch einen solchen construirt, an welchem GUSSEW in Leiden beobachtete. Die Beschreibung dieses Apparates gab KAISER im 15. Bande der Zeitschrift der königlichen Akademie der Wissenschaften in Amsterdam und 1866 im ersten Bande der *Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles.* Inzwischen hatte PRAZMOWSKY einen Apparat construirt, bei welchem die Beobachtung einer schwingenden Magnetnadel benutzt wurde[2]), und bald darauf HARTMANN einen anderen, bei welchem bereits Lichtblitze beobachtet wurden. Im Wesentlichen bestand sein Apparat[3]) aus zwei mit Hilfe eines Zwischenrades miteinander rotirenden Rädern, von denen das eine A durch ein Centrifugalpendel in gleichmässiger Rotation erhalten wird, wobei die Gleichmässigkeit durch das Tönen einer Sirene gesichert war; das zweite Rad B drehte eine Scheibe aus Cartonpapier, in welcher ein Loch durchgeschlagen war, durch welches man ein Licht beobachten konnte. Der beobachtete Moment wurde notirt, während der wirkliche Moment des Durchganges dadurch bestimmt werden konnte, dass das zweite Rad B nicht beständig mit A mitrotirte, sondern durch eine einspringende Feder in einem gegebenen Augenblicke mitbewegt wurde.

Zunächst wäre der Zeit nach der von PLANTAMOUR und HIRSCH angegebene, von HIPP construirte Apparat zu erwähnen. Die Zeitangabe erfolgte durch ein Uhrwerk, dessen gleichmässiger Gang (wie bei den HIPP'schen Chronographen überhaupt) durch eine schwingende Feder regulirt wurde, welches $\frac{1}{1000}$ Secunden abzulesen gestattete[4]), und welches durch einen Stromschluss angehalten, durch Oeffnen des Stromes in Gang gesetzt werden konnte. Ein künstlicher Stern wird langsam vorübergeführt und durch ein kleines Fernrohr beobachtet: in dem Momente, wo der Stern am Faden erscheint, wird der Strom geöffnet (Rectification in der Ruhelage ähnlich wie dieses für den unten beschriebenen Apparat geschieht), das Räderwerk geräth in Gang, und wenn die Erscheinung

[1]) S. die Annalen der Sternwarte Leiden, Bd. II.

[2]) COSMOS, IV. Bd., pag. 445.

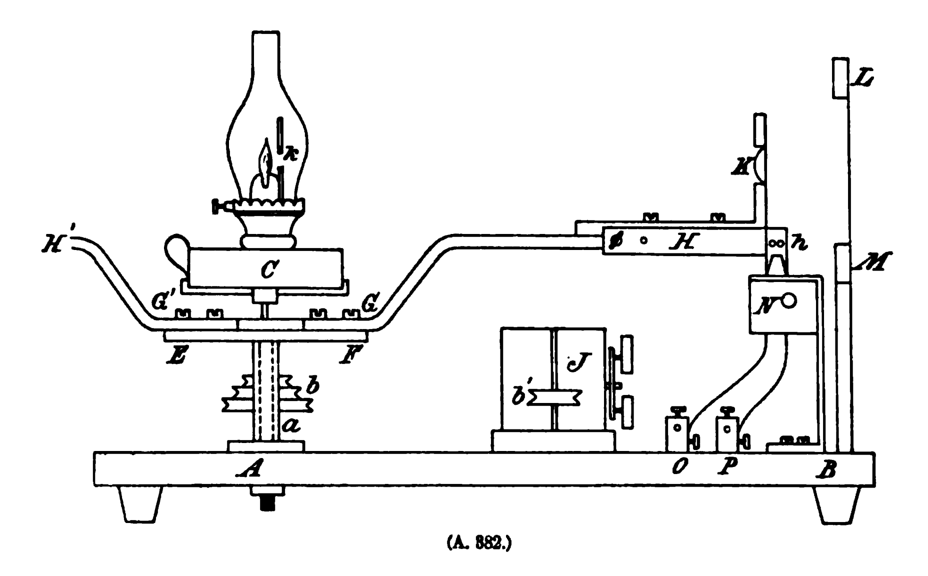
[3]) »Einige Beobachtungen und Bemerkungen über Personaldifferenz«, GRUNERT's Archiv für Mathematik und Physik, 1858, und Astronomische Nachrichten Bd. 65, pag. 129.

[4]) Bulletins de la Société des Sciences naturelles de Neufchatel, Bd. VI. Eine genaue Beschreibung des Apparates nebst einigen für anderweitige Beobachtungen von persönlichen Fehlern dienenden Ergänzungen findet sich in WUNDT, Physiologische Psychologie, 4. Aufl., II. Bd., pag. 322 ff.

beobachtet wird, wird registirt und durch Stromschluss das Uhrwerk arretirt. Die abgelesene Bewegung giebt die Verspätung.

Um von den verschiedenen später construirten Apparaten, welche sich in der Hauptsache immer mehr weniger wiederholten, und bei denen sich die Hauptänderungen auf die Herstellung des künstlichen Sterns und auf die Art der Registrirung der wahren und beobachteten Momente erstrecken, ein anschauliches Bild zu geben, mögen die beiden von KAISER in den Annalen der Sternwarte Leiden, II. Bd., pag. 19 empfohlenen, Zeitcollimatoren genannten Apparate, an der Hand der beiden Fig. 382 und 383, welche Reproductionen der dortigen Zeichnungen sind, beschrieben werden.

Der erste, in Fig. 382 in $\frac{1}{8}$ natürlicher Grösse dargestellt, besteht aus einem starken Brette *AB* von 48 *cm* Länge und 41 *cm* Breite. Bei *A* ist auf einer



(A. 882.)

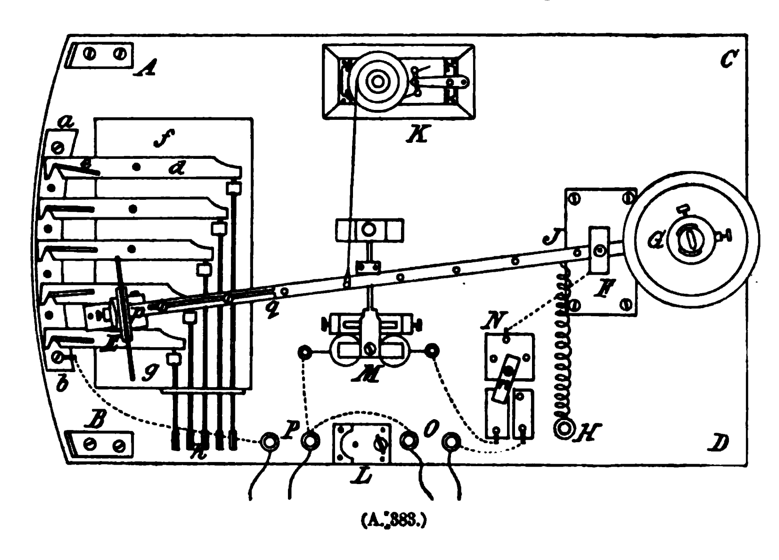
eisernen Axe die feststehende Lampe *C*; um die Axe drehbar ist die Büchse *a* mit der Scheibe *EF*, auf welcher acht eiserne Arme befestigt sind, von denen in der Figur der eine *GH* vollständig und sein gegenüberstehender *G'H'*, theilweise gezeichnet sind. Die Drehung wird durch eine Uhr mit Windfang bei *J* bewirkt, deren Bewegung sich durch Schnüre, welche in die Transmissionsrollen *bb'* gelegt werden, auf die Büchse *a* überträgt. Bei *b* sind drei Transmissionsrollen von verschiedenem Durchmesser, wodurch die Geschwindigkeit der Rotation geändert werden kann. Weitere Aenderungen derselben können überdies durch Verstellen der Flügel des Windfanges erzielt werden.

Innerhalb des Glascylinders der Lampe ist eine Scheibe von dünnem Messingblech mit einer runden Oeffnung *k*, durch welche die Lichtstrahlen auf die an dem andern Ende des Armes etwas verschiebbare Glaslinse *K* fallen und durch diese hindurch ein je nach der Stellung der Linse mehr oder weniger scharfes und grosses Bild auf einen Schirm bei *LM* werfen. Zur Befestigung desselben ist bei *B* auf der Grundplatte ein cylinderförmiger Rahmen, dessen Cylinderaxe mit der Rotationsaxe bei *A* zusammenfällt, angebracht. Bei *LM* ist dieser Rahmen durchbrochen und mit einem geölten Papier überklebt. Das auf *LM* entstehende Bild repräsentirt den Stern, ein verticaler, schwarzer Papierstreifen auf dem geölten Papier den Faden.

Die Geschwindigkeit der Uhr, die Grösse der Lichtscheibe und die Breite des Streifens müssen so regulirt werden, dass man das Bild eines Sternes und einen Faden des Fernrohres für eine gewisse Vergrösserung getreu nachgeahmt hat. An dem KAISER'schen Apparate war hierzu, wenn die Beobachtung aus einer Entfernung von 5 Meter von dem Apparate angestellt wurde, die Breite des Papierstreifens von 4·8 *mm* und eine zweimalige Rotation des Apparates pro Minute entsprechend einer 200fachen Vergrösserung durch ein 6zölliges Fernrohr mit 8' Brennweite nöthig.

In dem Momente des Vorüberganges des Sternbildes vor dem Faden muss ein Strom, ohne der Bewegung den mindesten Widerstand entgegenzusetzen, geschlossen werden. Zu diesem Zwecke ist an jedem Arm mittels einer Stahlfeder *H* seitlich etwas verstellbar, eine kupferne zweizinkige Gabel *h* befestigt, deren Zinken in zwei Quecksilbertropfen tauchen, die aus Löchern des Holzblockes *N* heraussteben. Diese zwei Tropfen sind jeder für sich in metallischem Contakt mit den Klemmschrauben *P*, welche zum Registrirapparat führen. Die Rectification wird in der Ruhelage vorgenommen, indem das Flammenbild auf den Faden eingestellt, der Arm festgehalten und die Gabel *h* durch die Feder *H* so lange seitlich verschoben wird, bis Contakt stattfindet. Sind sämmtliche Arme berichtigt, so kann der Apparat in Gang gesetzt werden: der Moment der Erscheinung registrirt sich automatisch, der Beobachter kann die Erscheinung entweder nach der Auge- und Ohrmethode beobachten oder registriren.

Der zweite KAISER'sche Apparat ist in Fig. 383 in $\frac{1}{8}$ natürlicher Grösse abgebildet. Auf einem Fussbrett *ABCD* von 55 *cm* Länge und 33·5 *cm* Breite sind



(A. 383.)

bei *A* und *B* Winkelhaken, an welchem ein cylindrischer Eisenrahmen senkrecht zur Grundplatte aufgesetzt ist. Dieser ist durchbrochen und mit geöltem Papier überzogen, auf welchem Streifen (in der Fig. fünf) aufgezogen sind. *EG* ist ein bei *F*, dem Orte der Axe des cylindrischen Rahmens *AB*, drehbarer eiserner Arm, der bei *G* eine Lampe mit Blende aufgesetzt hat, in welcher eine runde Oeffnung den Durchtritt des Lichtes gestattet. Durch eine in ziemlich weiten Grenzen verstellbare Linse bei *E* entsteht ein Bild auf dem geölten Papierschirm; durch Verstellung der Linse, zu welchem Zwecke ihre Fassung mittels der Schiene *pq* auf dem Arm verschoben und durch Schrauben in die

daselbst gebohrten Löcher festgeklemmt werden kann, entsteht ein Lichtbild von passender Grösse.

Der Arm *EF* wird durch eine Feder *HJ* gegen *B* gezogen und durch das Uhrwerk *K*, dessen Kraft ausreichend ist, um den Widerstand der Feder zu überwinden, nach *A* bewegt; eine Aenderung der Geschwindigkeit kann durch Verstellung der Flügel des Windfanges der Uhr oder durch Vertauschung der Transmissionsrollen derselben, endlich durch Verstellen des Ansatzpunktes *J* der Feder *HJ* bewirkt werden.

Bei der Bewegung des Armes von *B* nach *A* wird der künstliche Stern die Fäden passiren, und bei jedem Durchgange wird ein Strom geschlossen. Zu diesem Zwecke reichen von dem Metallbügel *ab* an den den einzelnen Fäden entsprechenden Stellen steife Drähte *e* über den Arm hinauf und sind dann umgebogen, so dass ihre Spitzen in einen Quecksilbertropfen auf dem Arme tauchen, der in metallischer Verbindung mit der Axe *F* steht. Die Klemmen *P* sind mit der Batterie verbunden. Der Strom geht von der linken Klemme bei *P* zum Metallbügel *ab*, durch die Drähte und den Arm zur Axe *F* und von dieser durch den Stromumschalter *N* durch die Bobinen des Zeichengebers *M* zur rechten Klemme bei *P*.

Zur Rectification dienen die Hebel *d*, gegen deren rechte Enden Schrauben wirken, die durch einen bei *h* aufgesteckten Schlüssel gedreht werden können. Gegen das linke Ende derselben legen sich durch ihre eigene Elasticität die Drähte *e*, so dass diese durch die Wirkung der Schraube *h* etwas verstellt werden können. Der Arm wird nun mittels einer Schlinge an einen Stift bei *L* befestigt und dieser durch einen Schlüssel so lange gedreht, bis der künstliche Stern auf den Faden fällt, dann in dieser Ruhelage der diesem Faden entsprechende Stift *e* so lange seitlich verschoben, bis der Anker des Schreibhebels *M* den stattfindenden Contakt anzeigt. Sind alle Stifte *e* rektificirt, so wird der Stromwechsler *N* so gestellt, dass der Strom statt durch den Schreibhebel *M* nunmehr durch die Klemme *O* zum eigentlichen Registrirapparate geht (Rechtsdrehen der Contaktfeder *n*), worauf die Beobachtung beginnen kann. Das Ende *E* des Armes *EF* wird nach *B* gezogen, was durch eine über eine Rolle zum Beobachter geführte Schnur geschehen kann, dann losgelassen, die Durchgänge beobachtet, dann das Ende *E* wieder gegen *B* gezogen u. s. w.

Andere Apparate wurden später beschrieben von M. C. WOLF[1]) 1866, HARKNESS 1867[2]), EASTMAN[3]), CHRISTIE (Verbesserung des WOLF'schen Apparates) u. A. Erwähnt mögen hier nur noch drei etwas abweichende Vorschläge werden.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN construirte 1879[4]) einen Apparat, bei welchem die Bewegung des künstlichen Sternes dadurch bewirkt wird, dass das Licht einer Mire durch zwei Prismen von schwach brechendem Winkel geht, so dass bei paralleler Stellung (brechende Kanten vertical und entgegengesetzt gerichtet) eine Ablenkung des Bildes nicht erfolgt und durch Drehung

---

[1]) »Recherches sur l'équation personelle dans les observations de passages«, Annales de l'Observatoire impériale de Paris, Bd. VIII, pag. 153.

[2]) Astronomical and Meteorological Observations made et the U. S. Naval Observatory during the Year 1867, App. I.

[3]) Astronomical and Meteorological Observations made at the U. S. Naval Observatory during the year 1875, App. I.)

[4]) Vierteljahrschrift d. astron. Gesellschaft Bd. 14, pag. 414, u. Bd. 24, pag. 249. Eine genauere Beschreibung des Apparates findet sich in den Annalen der Sternwarte in Leiden, Bd. VII.

des einen Prisma eine Bewegung des Mirenbildes erzielt wird. Um die nöthige kleine Geschwindigkeit zu erhalten, reicht man mit sehr kleinen brechenden Winkeln von etwa 15′ aus; die Beobachtung des Bildes geschieht direkt durch ein Fernrohr. Die Drehung wird hier ebenfalls durch einen Arm bewirkt, der während seiner Drehung an den den Fäden des Fernrohres entsprechenden Stellen einen Strom schliesst; die Rectification wird ebenfalls in der Ruhelage vorgenommen. Da jedoch die Bewegung des Bildes nicht proportional ist der Drehung des Prisma, so muss die letztere, wenn erstere gleichmässig sein soll, durch eine über ein Excenter geführte Transmission bewirkt werden. BAKHUYZEN brachte übrigens, um auch bei nicht horizontaler Lage des Fernrohres beobachten zu können, zwei Spiegel an, welche sich um horizontale Axen drehten, so dass das Bild nach doppelter Reflexion in das in eine gewisse Zenithdistanz gestellte Fernrohr gelangt.

WISLICENUS benutzte[1]) als künstlichen Stern das in jedem Fernrohr bei centraler Feldbeleuchtung auftretende kleine Lichtbild, welches von dem an der inneren Seite des Objectives angekitteten kleinen Hohlspiegel herrührt. Da das Lichtbild immer in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, so wird es durch die Bewegung des Oculars selbst über die Fäden geführt. Contakte werden durch zwei Stifte hergestellt, die mittels einer isolirten Platte mit dem Ocular verbunden sind, und an einer Messingschiene gleiten, in welcher, den Fäden des Netzes entsprechend, Linien eingerissen sind, die mit einer isolirten Masse (Kautschuk) angefüllt sind. Dabei ist die den Contakt störende Oxydation des Quecksilbertropfens vermieden, statt dessen aber sind zwei Fehlerquellen eingetreten, welche WISLICENUS selbst erwähnt: Die Breite der Linien und die nicht vollständige Coincidenz derselben mit den Fäden; eine dritte Fehlerquelle, die daher rührt, dass das Bildchen nur in der Mitte des Feldes (in der Axe des Objectives) centrisch ist, ausserhalb derselben aber etwas excentrisch, fällt kaum merklich ins Gewicht. Doch liessen sich vielleicht auch die beiden ersten durch die später erwähnte REPSOLD'sche Einrichtung der Contakte an der Schraubentrommel wegschaffen.

Ein von SIGM. EXNER[2]) construirter, relativ einfacher Apparat, den er Neuramoebiometer nannte, ist der folgende: Eine elastische Feder von bekannter Schwingungszeit zeichnet mittels einer an derselben angebrachten Borste auf einer rasch vorübergeführten berussten Platte eine Wellenlinie; jeder Welle entspricht die Schwingungszeit, so dass aus der Zahl der Wellen (eine veränderliche Geschwindigkeit der Platte verändert nur deren Länge) die zwischen zwei Zeitmomenten verflossene Dauer abgelesen werden kann. Durch ein und denselben Impuls werden gleichzeitig die Arretirung der Platte und der Feder aufgehoben, so dass der Beginn der Wellenlinie den wahren Moment des Impulses angiebt. Die Beobachtung derselben (durch das Auge oder das Ohr) wird durch einen raschen Druck auf einen Taster notirt, durch welchen die schwingende Feder von der berussten Platte abgehoben wird, so dass die Wellenlinie unterbrochen ist. Die an der Wellenlinie abgelesene Zeit giebt unmittelbar die persönliche Gleichung.

Für eine vollständige Elimination des persönlichen Fehlers bezw. eine Bestimmung desselben während der Beobachtung der himmlischen Objecte

---

[1]) »Untersuchungen über den absoluten Fehler bei Durchgangsbeobachtungen«.

[2]) »Experimentelle Untersuchung der einfachsten physischen Processe«, PFLÜGER's Archiv für Physiologie, Bd. VII, pag. 601; die Beschreibung des Apparates pag. 659.

(nicht künstlicher Sterne) schlug 1868 E. KAYSER[1]) vor, Beobachtungen an einem mit Uhrwerk versehenen Aequatoreal anzustellen, welches dabei so berichtigt sei, dass der Stern während der Bewegung am Faden erhalten werde. »Es kommt nun darauf an, in einem gewissen Momente, in welchem noch der Faden den Stern deckte, also mit einem bestimmten Pendelschlage der Normaluhr, das Triebwerk des Aequatoreals anzuhalten und darauf die Passage des Sternes bei ungeändertem Stande des Instrumentes zu beobachten.« Zum Theile ähnliche Ideen finden sich bei C. BRAUN, WHEATSTONE[2]), AIRY[3]). REPSOLD übertrug die KAISER'sche Idee auf das Passageninstrument, welches er zu diesem Zwecke nicht fest, sondern auf einem festen Unterbau, mit zum Pole gerichteter Axe drehbar einrichten wollte[4]); bald darauf[5]) jedoch änderte er diesen Vorschlag in den viel leichter durchführbaren ab, das Instrument unbeweglich zu lassen und die Bewegung auf einen Micrometerfaden zu verlegen. Bei dem hiernach eingerichteten Micrometer wird ein beweglicher Faden durch den Beobachter beständig an dem Sterne erhalten. An der Schraube ist nebst der gewöhnlichen getheilten Trommel noch eine Scheibe angebracht, welche an bestimmten Stellen durch Gleiten an Metallspitzen metallische Contakte giebt, die auf dem Chronographen die Zeichen des Sterndurchganges an den den Contakten entsprechenden Stellen des Gesichtsfeldes markiren. Beobachtet man z. B. in dieser Weise an einem Theile des Gesichtsfeldes und registrirt in gewöhnlicher Weise am andern Theile, so kann man die absolute persönliche Gleichung feststellen[6]).

Mit dem Fortschreiten der physiologischen Erkenntnisse wurde auch das ursprünglich Räthselhafte der Erscheinung unserer Erkenntniss näher gerückt. Die Ansicht BESSEL's, welche bereits erwähnt wurde, trifft so ziemlich den Kern der Sache, und das später hinzugefügte giebt nur eine auf eingehendere experimentelle Forschungen gestützte detaillirtere Analyse. Hingegen äusserte HARTMANN in seiner bereits erwähnten Arbeit[7]), dass weniger Perceptionszeit oder Leitungszeit mitspielen, sondern vielmehr die Abweichungen ihren Grund in »ungleicher Aufmerksamkeit, Ueberraschung, mangelhafter Erinnerung der Folge der Licht- und Schallphänomene u. s. w. finden, dass daher die persönliche Gleichung durch Uebung auf ein Minimum reducirt werden könnte«. M. C. WOLF in seiner erwähnten Arbeit bemerkt zunächst, dass die weitaus grösste Zahl der persönlichen Fehler um $0^s \cdot 3$ herum liege, selten $0^s \cdot 5$ bis $0^s \cdot 6$ erreiche, und meint: »*il faut bien conclure de là que la cause de l'équation personelle n'est pas le temps necessaire à l'esprit pour la supposition de deux jugements*[8]). Er glaubt die Ursache in der Persistenz des Eindruckes zu finden, in Folge deren dann gewohnheitsmässig eine gewisse zwischen den äussersten Grenzen derselben gelegene Zeit als Moment des Eintrittes der Erscheinung gewählt wird. »*La correction personelle, dans l'estime des passages par l'oeil et par l'oreille, est comprise*

---

1) »Ein Mittel, den persönlichen Fehler bei Passagebeobachtungen zu bestimmen«, Astronomische Nachrichten, Bd. 70, pag. 129.

2) Monthly Notices Bd. 24, pag. 159.

3) Monthly Notices Bd. 25, pag. 157.

4) Astronomische Nachrichten Bd. 118, pag. 305.

5) Astronomische Nachrichten Bd. 123, pag. 177.

6) Vergl. hierzu BECKER, »Ueber einige Versuche von Durchgangsbeobachtungen nach dem neuen REPSOLD'schen Verfahren«. Astronomische Nachrichten Bd. 127, pag. 185.

7) Astronomische Nachrichten Bd. 65, pag. 141.

8) l. c. pag. 191.

entre deux limites, qui sont toutes deux égales à la durée de l'impression lumineuse, prises positivement et négativement[1]).

Endlich mag noch, wegen des Ortes, an welchem der Ausspruch publicirt ist, erwähnt werden, dass LANDERER[2]) die Ursache in einer Art Diplopie sucht.

Um ein Urtheil über die verschiedenen Meinungen zu gewinnen, ist es nöthig, eine etwas genauere Analyse der dabei stattfindenden physiologischen und psychologischen Processe zu geben.

Die Zeit, welche verfliesst zwischen der Einwirkung eines äusseren Reizes auf ein peripheres Sinnesorgan bis zu dem Augenblick einer durch diesen Reiz veranlassten beabsichtigten motorischen Reaction wurde von EXNER Reactionszeit genannt, zum Unterschied von der Reflexzeit, welche die Zwischenzeit zwischen der Einwirkung eines peripheren Reizes und einer durch denselben ausgelösten unbeabsichtigten motorischen Reaction (Reflex: Lidschluss bei grellem Licht, Schling- und Darmbewegungen durch den Inhalt des Verdauungscanales) veranlassten.

Der Vorgang, welcher der Reactionszeit entspricht, setzt sich zusammen[3]) »1) aus der Leitung vom Sinnesorgan bis in das Gehirn; 2) aus dem Eintritt in das Blickfeld des Bewusstseins oder der Perception; 3) aus dem Eintritt in den Blickpunkt der Aufmerksamkeit oder der Apperception; 4) aus der Willenserregung, welche im Centralorgane die registrirende Bewegung auslöst; und 5) aus der Leitung der so entstandenen motorischen Erregung bis zu den Muskeln und dem Anwachsen der Energie in denselben. Der erste und der letzte dieser Vorgänge sind rein physiologischer Art. Bei jedem derselben verfliesst eine verhältnissmässig kurze Zeit, welche der Eindruck braucht, um in die peripherischen Nerven geleitet zu werden, und eine wahrscheinlich etwas längere, welche die Leitung im Centralorgane beansprucht. Dagegen werden wir die drei mittleren Vorgänge, die Perception, die Apperception und die Entwickelung des Willensimpulses als psycho-physische bezeichnen dürfen, insofern sie gleichzeitig eine psychologische und eine physiologische Seite haben. Unter ihnen ist die Perception höchst wahrscheinlich mit der Erregung der centralen Sinnesfläche unmittelbar gegeben. Wir haben allen Grund anzunehmen, dass ein Eindruck, der auf ein Sinnescentrum einwirkt, dadurch an und für sich schon in dem allgemeinen Blickfeld des Bewusstseins liege.«

Schon die Leitung in den sensibeln und motorischen Nerven beruht auf einem ziemlich complicirten Process. Nach den neuesten Untersuchungen besteht jede Nervenbahn aus mindestens zwei von einander getrennten und mit einander nur durch Contakt in Verbindung stehenden Theilen. Solche Unterbrechungen sind für die peripheren Nerven in den Vorder- bezw. Hinterhörnern des Rückenmarkes; für das Auge (nach RAMON Y CAJAL) in der inneren und äusseren reticulären Schicht der Netzhaut; für das Ohr (nach WALDEYER und RETZIUS) in der Basilarmembran des Cortischen Organes und überdies in den Bulbärkernen der Medulla oblongata. Es kommt also für die Leitung durch die sensibeln und motorischen Bahnen nebst der physiologischen Leitungszeit noch die Uebertragungszeit zwischen den Leitungsunterbrechungen in Betracht, überdiess aber für das Auge und das Ohr, die Reflexzeit für die Accommodation, welche beim Auge der die Zonula Zinnii entspannende circuläre Theil des M.

[1]) ibid., pag. 196.

[2]) Bulletin astronomique, Bd. VI, pag. 218.

[3]) WUNDT, Grundzüge der physiologischen Psychologie, II. Bd., pag. 306.

ciliaris (der H. MÜLLER'sche Muskel) und beim Ohre der das Trommelfell spannende M. tensor tympani bewirkt.

Weiter fand KÜHNE, dass durch die Einwirkung des Lichtes der in den Stäbchen und Zapfen enthaltene Sehpurpur gebleicht wird, und es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese Verwandlung mit der Lichtempfindung in inniger Beziehung steht.

Endlich ist zu bemerken, dass der innervirte Muskel nicht sofort, sondern erst nach einer gewissen, allerdings sehr kurzen sogen. Latenzzeit reagirt.

Allerdings ist nun jede dieser Zeiten sehr kurz[1]). Die Leitungsgeschwindigkeit ist in den motorischen Nerven nach HELMHOLTZ 34 Meter per Secunde, in den sensibeln Nerven vielleicht etwas grösser (nach HELMHOLTZ, KOHLRAUSCH u. A. schwanken die Werthe zwischen 30 bis 94 Meter). Dieses bezieht sich jedoch nur auf die periphere Nervenbahn (von den Rückenmarksganglien bis zu den Muskeln); allerdings scheint nach den wenigen bisher angestellten Versuchen die Leitungsgeschwindigkeit in den Rückenmarkssträngen dieselbe und die Uebergangszeit an den Ganglien der Hinterhörner (nach EXNER) verschwindend klein zu sein.

Was nun die psychologischen Theile des Processes anbelangt, so nimmt, wie erwähnt, WUNDT an, dass die Perceptionszeit gleich Null sei, welcher Ansicht jedoch HERMANN widerspricht.

Für die Apperceptions- und Wahlzeit existiren zahlreiche Versuche, die aber zum Theile einander widersprechende Resultate ergeben. So fanden[2]) v. KRIES und AUERBACH die Zeit für die Unterscheidung zweier Töne $0^s{\cdot}019$ bis $0^s{\cdot}034$; für die Unterscheidung zweier Farben $0^s{\cdot}012$; WUNDT und FRIEDRICH für die Unterscheidung zweier Farben $0^s{\cdot}019$ bis $0^s{\cdot}084$; TIGERSTEDT und BERGQUIST für das Erkennen einer dreizifrigen Zahl $0^s{\cdot}015$ bis $0^s{\cdot}035$, WUNDT und FRIEDRICH hingegen $0^s{\cdot}320$ bis $0^s{\cdot}346$.

WUNDT unterscheidet eine sensorielle und eine muskuläre Reactionszeit, je nachdem die Aufmerksamkeit auf den erwarteten Sinneseindruck (Auge) oder das reagirende Organ (Hand) gerichtet ist. Für die erstere findet er für drei Beobachter für Schall, Licht und elektrische Hautreize nahe dieselben Werthe, im Mittel $0^s{\cdot}246$, für die muskuläre $0^s{\cdot}139$; die letztere wird vielleicht dadurch kürzer, dass die Zeit für die Willenserregung als unnöthig wegfällt; die Apperceptionszeit ist dabei noch keineswegs gleich Null. Welchen Einfluss die Aufmerksamkeit und Uebung hat, sieht man, wenn man derartige Versuche das erste Mal und selbst nach widerholten Versuchen an einem anderen Apparat oder in anderer Versuchsanordnung macht. »Jedem, der diese Versuche das erste Mal anstellt, fällt es auf, wie wenig er Herr seiner Bewegungen ist, wenn es sich darum handelt, dieselben möglichst rasch auszuführen. Nicht nur liegt die Heftigkeit der Zuckung gleichsam ausserhalb des Kreises der Willkür; auch die Zeit, zu welcher die Zuckung ausgeführt wird, hängt blos bis zu einem gewissen Grade von uns ab. Wir zucken und können nachher mit überraschender Genauigkeit angeben, ob wir früher oder später gezuckt haben, als ein anderes Mal, haben es aber durchaus nicht in unserer Macht, wirklich im gewünschten Momente zu reagiren[3]).«

---

[1]) Dass übrigens beträchtliche Variationen innerhalb physiologischer Breite sehr wohl möglich sind, zeigt das pathologische Auftreten der »verlangsamten Leitung« bei der *Tabes dorsalis*, wo die Verspätung der Apperception bis 10 Secunden betragen kann. Uebrigens ist auch die sogen. »psychische Hemmung« in den Depressionszuständen des circulären Irreseins auf eine Verlängerung der Reactionszeit zurückzuführen.

[2]) Vergl. HERMANN, Physiologie, 10 Auflage pag. 463.

[3]) EXNER, l. c. pag. 611.

Dem Einfluss der Uebung trägt Wundt dadurch Rechnung, dass er eine »vollständige Reactionszeit« und eine »verkürzte Reactionszeit« unterscheidet; er meint, dass bei letzterer der Process der Apperception wahrscheinlich ganz eliminirt ist, und die Akte der Perception und des Bewegungsimpulses zeitlich zusammenfallen, weil der letztere nicht mehr vom Willen ausgeht, sondern reflexartig ausgelöst wird, so dass nach Wundt die muskuläre Reactionszeit mit der verkürzten zusammenfällt; das letztere wird aber nur dann der Fall sein, wenn auch bei der muskulären Reactionszeit die Apperceptionszeit wegfällt, was nach dem obigen wenigstens nicht immer der Fall zu sein braucht. Catell hält jede Art der Reaction für einen eingeübten Gehirnreflex, wogegen Lange die Ansicht ausgesprochen hat, dass bei sensoriellen Reactionen die Uebertragung der sensorischen in die motorische Erregung innerhalb der Grosshirnrinde stattfinde, während sie bei der muskulären schon in einem untergeordneten Centrum des Kleinhirns oder Mittelhirns stattfindet. Hingegen bemerkt Wundt, dass es aber Centren verschiedener Ordnung auch in der Grosshirnrinde giebt; allein wesentlich scheint dieses nicht zu sein; tritt die Erscheinung reflexartig auf, so ist es für die Reactionszeit, abgesehen von der Leitungszeit in der kurzen Nervenbahn ziemlich gleichgültig, wo das Reflexcentrum liegt[1]). Immerhin kann und wird ja auch eine Reflexerscheinung durch gleichzeitige Leitung ins Gehirn nachträglich zum Bewusstsein kommen.

Für die Anschauung des Ueberganges der bewussten Reaction in eine Reflexerscheinung spricht auch der Umstand, dass bei fortgesetzter Uebung die Reactionszeit bis zu einer gewissen Grenze herabgedrückt werden kann (nach Hartmann: Reduction der persönlichen Gleichung auf ein Minimum; s. pag. 376), wobei sie zur einfachen Reflexzeit wird, und als solche von rein physiologischen Momenten (Leitungszeit), aber nicht mehr von psychischen Momenten abhängt; in diesem Sinn geht also der Beobachter im Laufe der Zeit zur »verkürzten Reactionszeit« über. Wundt erklärt jedoch auch die mitunter vorkommenden grösseren Schwankungen der persönlichen Gleichung daraus, dass der Beobachter von der vollständigen zur verkürzten Reactionszeit übergeht und umgekehrt. Der Rückgang von der verkürzten zur vollständigen Reactionszeit scheint aber nicht wahrscheinlich und dasselbe gilt vom Uebergang von der muskulären zur sensoriellen Reactionszeit und umgekehrt, und ebenso von der psychischen Zeit. Ganz auffällig zeigt sich dies bei den Auge- und Ohrbeobachtungen. Diese können bekanntlich nach zwei verschiedenen Methoden ausgeführt werden. Entweder man merkt sich den Ort des Sternes für den nächsten Secundenschlag vor und nach dem Fadendurchgange und schätzt den Ort des Fadens zwischen den beiden angegebenen Orten des Sternes aus den ganzen Secunden; oder aber man theilt das gehörte Secundenintervall durch den Moment des Fadendurchganges. Meist bedient man sich der ersten Methode, doch ist es für die Beobachtung selbst, wenn auch nicht für den Wert der persönlichen Gleichung gleichgültig, welcher Methode man sich bedient; ein Wechsel der Beobachtungsmethode, insbesondere ein fortwährender oder zeitweiser Uebergang von der einen zur anderen kommt bei guten Beobachtern überhaupt nicht vor.

Im Mittel beträgt nun die Reactionszeit:

für den Schall	$0^{s}{\cdot}14$ bis $0^{s}{\cdot}17$		für den Geschmack	$0^{s}{\cdot}15$ bis $0^{s}{\cdot}23$	
„ Licht	$0^{s}{\cdot}15$ „ $0^{s}{\cdot}22$		„ Tastwahrnehmungen	$0^{s}{\cdot}13$ „ $0^{s}{\cdot}20$,	

[1]) Die Reflexcentren liegen wohl alle im Rückenmarke und verlängerten Marke.

doch sind dies nur Mittelwerthe, die ganz bedeutenden individuellen Schwankungen unterliegen.

Kleine Unterschiede in der Reactionszeit sind leicht zu erklären[1]). Schon HELMHOLTZ fand, dass durch Kälte die Leitungsgeschwindigkeit in den Nerven wesentlich verlangsamt wird. KRAEPELIN stellte eingehende Untersuchungen über den Einfluss von toxischen Substanzen an. Er theilt dieselben ein in:

1) solche mit anfänglicher Verkürzung und darauffolgender Verlängerung der Reactionszeit (Alkohol, Paraldehyd, Morphium);
2) solche mit anfänglicher Verlängerung und darauffolgender Verkürzung (mässige Dosen Aether und Chloroform, Amylnitrit);
3) solche mit bleibender Verlängerung (grössere Dosen Alkohol, Aether, Chloroform, Chloralhydrat).
4) solche mit bleibender Verkürzung (Thee, Kaffee).

Nicht unwichtig sind hier für den Astronomen: aus der ersten Gruppe der Alkohol, nach dessen stärkendem Genuss sich die Reactionszeit selbst im Verlaufe der darauffolgenden Beobachtungsreihe ändern kann, und aus der letzten Gruppe der in dieser Richtung ebenfalls nicht gleichgültige Genuss von Kaffee oder Thee. Aber abgesehen von diesen transitorischen Einflüssen und abgesehen von pathologischen Veränderungen der Nerven (Aenderungen in der Leitungszeit) oder in der psychischen Constitution (psychische Defecte) findet man bei vollständig normalen Menschen 1) unzweifelhaft constatirte Reactionszeiten von bedeutender Grösse und 2) unzweifelhaft constatirte abnorm grosse Aenderungen in der Reactionszeit. Nach allem Gesagten unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass man diese Erscheinungen, wenigstens zu ihrem grössten Theile, der Perceptions-, Apperceptions- und Wahlzeit, d. i. also dem psychischen Processe zuzurechnen hat.

BESSEL hatte nun aber an einer Secundenuhr um nahe $\frac{1}{2}$ Secunde früher als an der Halbsecundenuhr beobachtet. Man könnte also vermuten, dass die Zeitschätzungen einen wesentlichen Einfluss haben. Allein wenn dieses auch der Fall wäre, so liegt in letzter Instanz doch wieder die Ursache in einem psychischen Akte. Auge- und Ohrbeobachtungen gehören eigentlich nicht mehr zu den einfachen psychischen Erscheinungen, indem an Stelle der Wahlzeit (und der Leitung in motorischen Nerven) eine gewisse Zeit für die Bildung eines Urtheils oder eines Schlusses nötig ist: Abschätzung und Vergleichung zweier durch verschiedene Sinne wahrgenommener Erscheinungen[2]). In diesem Sinne wäre daher auch die Meinung HARTMANN's zu berichtigen, indem, wie schon erwähnt, durch Uebung auf die abgekürzte Reactionszeit übergegangen werden kann, dass es sich aber bei den Beobachtungen ganz allgemein nicht um Ueberraschung oder mangelhafte Erinnerung handelt, sondern dass allgemein die Aufmerksamkeit

---

[1]) Dass dieselbe durch Ableitung der Aufmerksamkeit, durch Ermüdung vergrössert wird, ist selbstverständlich (auf die muskuläre Reactionszeit soll dieser Umstand übrigens angeblich weniger Einfluss haben); da übrigens auch der geübteste Beobachter ermüdet, so zeigt sich, dass auch die verkürzte Reactionszeit von der Apperceptionszeit nicht unabhängig ist.

[2]) Vergl. das hierüber pag. 379 Gesagte. Welche Verschiedenheiten in dieser Richtung obwalten, zeigt der Umstand, dass für den Indifferenzpunkt in der Zeitschätzung (kleine Zeiten werden überschätzt, grössere unterschätzt; zwischen beiden giebt es einen Punkt, bei welchem die Schätzung wenigstens aus einer grossen Zahl von Fällen nahe richtig ist; diese Zeit nennt man den Indifferenzwerth) MACH $0^s \cdot 37$, VIERORDT in einer früheren Versuchsreihe $1^s \cdot 5$ bis $3^s \cdot 5$, in einer späteren Reihe einen wesentlich kleineren Werth fand.

und Zusammenstellung von Erinnerungsbildern behufs eines Urtheils eine constante Rolle spielen; derjenige Theil, der von diesen psychischen Elementen abhängig ist, kann auch durch Uebung nicht weggeschafft werden, und erklärt eben die abnorm grossen Reactionszeiten.

Die Abhängigkeit der persönlichen Gleichung von Instrumenten, vom Fadennetze, von der Beleuchtung ist nunmehr nach dem Früheren ohne Weiteres zu erklären.

Eine mitunter auftretende negative persönliche Gleichung (M. C. Wolf, dessen ausführliche Arbeit früher erwähnt wurde, beobachtete um $0^s{\cdot}1$ zu früh), erklärt sich durch die muskuläre Reactionszeit; sie kann nur auftreten, wenn die Aufmerksamkeit bei einem erwarteten und vorherzusehenden Phänomen (ein stetiges Lichtbild und eine Fadengruppe), auf das reagirende Organ gerichtet ist. Bei Lichtblitzen, plötzlich einsetzenden Geräuschen u. s. w. ist eine solche undenkbar und auch thatsächlich noch nicht beobachtet.

Bei Durchgangsbeobachtungen im ersten Verticale ist übrigens noch daran zu denken, dass die Sterne die Fäden nicht senkrecht, sondern schief passiren, und zwar um so schiefer, je kleiner ihre Zenithdistanz ist; es wird daher die persönliche Gleichung eine Function der Zenithdistanz und kann allgemein in die Form gebracht werden:

$$\xi = a + b\zeta^m + c\cos\zeta + d\sin\zeta,$$

wobei ζ die Zenitdistanz des betrachteten Sternes ist, und der Ausdruk ξ die Correction der Durchgangszeit in dem Faden für einen gewissen Beobachter bedeutet; das Glied ζ^m enthält je nach dem Werthe von m ein der Zenithdistanz proportionales oder umgekehrt proportionales Glied. Dieser Ausdruck für ξ ist in die Formeln für das Passageninstrument im ersten Vertical (pag. 362) einzusetzen.

Im Jahre 1864 hatte Argelander bemerkt[1]), dass er Sterne bis zu 9·1 ter Grösse durch alle Grössenklassen gleichmässig, Sterne von 9·2 ter Grösse an durch alle folgenden Grössenklassen etwas früher und zwar ungefähr $0^s{\cdot}15$, beobachtete, und eine ähnliche Bemerkung machte Gill[2]) und H. G. van de Sande Bakhuyzen[3]). Gill fand, dass an die schwächeren Sterne eine Correction von $0^s{\cdot}017$ für jede Grössenklasse anzubringen wäre; Bakhuyzen fand für registrirte Beobachtungen denselben Werth, für Auge- und Ohrbeobachtungen einen etwas anderen, und zwar für schwache Sterne (Unterschied zwischen 7·8 und $5{\cdot}3^m$) $0^s{\cdot}039$, für helle (Unterschied zwischen 5·5 und $3{\cdot}0^m$) gleich $0^s{\cdot}099$. Schäberle fand aus seinen Beobachtungen[4]) die Verfrühung für jede Grössenklasse $0^s{\cdot}022$ und ähnlich andere Beobachter. Die Beobachtungen hierzu werden angestellt, indem vor dem Objective ein Diaphragma oder eine Gitterblende angebracht wird; durch diese werden helle Sterne abgeblendet, und sie können an einer Reihe von Fäden ohne Blendung, an den übrigen Fäden entsprechend geschwächt beobachtet werden.

Da man die Beobachtung des Durchganges an die Auffassung der Bisection der Sternscheibe knüpft und die Erfassung der Bisection um so leichter wird, je kleiner das Scheibchen ist, so dürfte es sich bei der Beobachtung der helleren

---

[1]) »Ueber die Bonner und Leidner Beobachtungen der Egeria in der Opposition des Jahres 1864«, Astronomische Nachrichten Bd. 74, pag. 263.

[2]) Monthly Notices Bd. 39, pag. 434.

[3]) Astronomische Nachrichten Bd. 95, pag. 87, und Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft Bd. 14, pag. 408.

[4]) Astronomische Nachrichten Bd. 134, pag. 129.

Sterne um eine Verlängerung der Apperceptionszeit handeln, wozu auch kommt, dass die Aufmerksamkeit mehr auf den Stern, also auf das percipirende Organ gerichtet sein muss; der zweite Theil (Uebergangsstufe zur sensoriellen Reactionszeit), dürfte mehr in Frage kommen, wo es sich, wie bei ARGELANDER, um eine constante Differenz handelt; der erste Theil (mehr oder weniger stark verkürzte Reactionszeit), dort wo eine progressive Lichtgleichung stattfindet, also in den meisten Fällen[1]).

Wenn, wie dieses wahrscheinlich ist, der in der Netzhaut stattfindende chemische Vorgang (Bleichung des Sehpurpurs), die Gesichtsempfindung vermittelt, so ist nicht ausgeschlossen, dass sich auch ein Einfluss der Sternfarbe auf die persönliche Gleichung geltend macht; doch sind bisher hierüber keine Erfahrungen bekannt.

Die zeitliche Aufeinanderfolge der Beobachtungen betreffend ist noch zu erwähnen, dass bei Auge- und Ohrbeobachtungen die verschiedenen Zehntelsecunden nicht gleich oft beobachtet werden[2]). Als Ursache dieses Umstandes, der sich, wie erwähnt, nur bei Auge- und Ohrbeobachtungen geltend macht, erklärt WUNDT den Einfluss, welchen das Geräusch des Schlages auf den Beobachter ausübt. Hierbei spielt wahrscheinlich das Erinnerungsbild des zuletzt gefundenen Secundenschlages mit, welches, indem es eine kurze Zeit anhält, die darauffolgenden Beobachtungen näher gerückt erscheinen lässt, in der That findet sich das Maximum der Beobachtungen zwischen $0^s\cdot0$ und $0^s\cdot3$.

Ausser diesen auf die Zeitverhältnisse bezüglichen persönlichen Unterschieden sind noch andere, rein auf örtliche Verhältnisse sich beziehende subjective Unterschiede in den Beobachtungen gefunden worden.

AIRY berichtet[3]) über den Unterschied in der Messung des Intervalles zwischen zwei Theilstrichen eines Kreises zur Bestimmung des Run; die Correction war für 100″ Intervalle nach:

	1853	1854	1855
HENRY	0″·420	0″·403	0″·420
DUNKIN	0·310	0·274	0·297
HENDERSON . . .	0·411	—	—
ELLIS	0·301	0·368	0·408
TODD	—	0·329	—
CRISWICH	—	—	0·290.

STONE fand einen Unterschied bei der Bestimmung der Collimationslinie. ARGELANDER bemerkte 1870[4]). »Es ist, wenn auch vielleicht noch nicht öffentlich ausgesprochen, gewiss doch vielen Astronomen bekannt, dass ein Beobachter nicht selten die Einstellung eines Gestirns oder auch eines Fadens in die Mitte zwischen zwei anderen constant anders taxirt, als ein anderer, und dass hierbei Unterschiede in der Schätzung von $\frac{1}{2}''$ und mehr vorkommen können. Der Grund dieser Erscheinung ist vorläufig noch ein psychologisches Räthsel. Könnte aber nicht auch eine ebenso räthselhafte Ursache eine Verschiedenheit der Ein-

---

[1]) Folgerichtig sollte man daher eigentlich von einer Verspätung in der Beobachtung heller Sterne sprechen, doch ist dieses praktisch gleichgültig. Vielleicht gehört auch hierher die Aenderung der persönlichen Gleichung durch die Unschärfe des Bildes.

[2]) Vergl. z B. BOUQUET im Bulletin astronomique, August 1889; LEWITZKY in Astronomische Nachrichten, Bd. 124, pag. 105.

[3]) Monthly Notices, Bd. 16, pag. 6.

[4]) »Ueber die Abhängigkeit der Declinationen von den Grössen der Sterne«, Astronomische Nachrichten Bd. 75, pag. 353.

stellung durch denselben Beobachter bei Sternen verschiedener Helligkeit hervorbringen?« Die diesbezüglichen Untersuchungen ARGELANDER's führen ihn allerdings zu dem Resultate, dass für ihn ein solcher Unterschied nicht besteht. Auch die beobachtete Bevorzugung gewisser Zehntel beim schätzenden Ablesen der Registrierstreifen gehört zum Theil hierher.

Auf die persönlichen Unterschiede bei Höheneinstellungen hat neuerdings WOLFER[1]) hingewiesen; dass übrigens bei jeder Art von Beobachtungen subjective Abweichungen stattfinden, weiss jeder, der sich mit Bahnbestimmung von Himmelskörpern beschäftigt hat. Messungen an Positionsmikrometern oder an Heliometern, Positionswinkel sowie Distanzen, werden, ob es sich um Beobachtungen von Kometen oder Planeten oder um Beobachtungen von Doppelsternen handelt, von einzelnen Beobachtern stark in demselben Sinne abweichend gefunden; gerade die Elimination dieser Fehlerquellen gehört bei der Ableitung der definitiven Resultate zu den subtilsten und schwierigsten Arbeiten, und gelingt nicht immer mit der gewünschten Schärfe. Eine Ursache für dieselben anzugeben ist bisher noch nicht gelungen; es scheint aber nicht unwahrscheinlich, dass gerade diese topischen Verhältnisse in der Zukunft werthvolle Aufschlüsse auf erkenntnisstheoretischem Gebiete (über die Art der Perception und Apperception überhaupt und über individuelle Verschiedenheiten in denselben), zu erlangen gestatten werden. N. HERZ.

Planeten. Von den um die Sonne kreisenden Himmelskörpern waren im Alterthume (ausser der Erde) fünf bekannt. Nach der Entdeckung des Uranus und Neptun sind es, die Erde mit eingerechnet, acht, welche man in zwei Gruppen trennt: innere und äussere. Man legt jedoch diesen Begriffen eine doppelte Bedeutung bei; man bezeichnet 1) als innere die vier Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, welche innerhalb des breiten Zwischenraumes liegen, in welchem man lange Zeit einen Planeten vermuthete, und in dem man später die grosse Zahl der kleinen Planeten fand, und als äussere die vier anderen: Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun, welche ausserhalb dieses Gürtels liegen. Oder aber man bezeichnet 2) als innere die beiden Planeten Merkur und Venus, deren Bahnen innerhalb der Erdbahn liegen, alle übrigen von Mars angefangen als äussere. Bei der letzteren Auffassung liegt der Grund zur Trennung eigentlich nur in dem Umstande, dass Merkur und Venus nie in Opposition kommen können, sich von der Sonne nur bis zu einem gewissen Winkel entfernen (grösste Digression). Merkmale, welche die vier, innerhalb des Gürtels der kleinen Planeten gelegenen verbinden und sie von den vier äusseren unterscheiden, sind: die Grösse, Dichte, Abplattung und Rotationszeit. Die vier inneren sind kleiner, sehr dicht, wenig abgeplattet, von beträchtlicher Rotationsdauer; die äusseren bedeutend grösser, von geringerer Dichte, stark abgeplattet und von wesentlich rascherer Rotation. Ob die Rotationszeit der beiden innersten Planeten Merkur und Venus mit der Umlaufszeit identisch ist oder nicht, ist zur Zeit noch eine offene Frage. Welche Umstände es veranlassen, dass die Rotationszeit für sehr nahe Himmelskörper gleich der Umlaufszeit wird, und bis zu welcher Entfernung dies theoretisch möglich oder vielleicht auch nothwendig ist, ist bisher noch nicht untersucht worden; die Untersuchungen, welche hierüber anlässlich der Libration der Satelliten angestellt wurden, zeigen nur, dass, wenn diese Bedingung einmal strenge oder auch nur genähert erfüllt ist, sie es bleiben muss,

---

[1]) Astronomische Nachrichten Bd. 100, pag. 331.

und nur eine geringe Libration auftritt. Eine ursprünglich nicht bestehende Gleichheit zwischen Rotations- und Revolutionszeit kann nur dann successive in eine Gleichheit übergeführt werden, wenn äussere, in dem rotirenden Körper selbst gelegene Bedingungen vorhanden sind, zu denen in erster Linie eine Anschwellung gegen den attrahirenden Körper zu vorhanden ist, und zweitens die Bewegung in einem, wenn auch äusserst dünnen, widerstehenden Mittel stattfindet. Ob und wie derartige Anschwellungen zu Stande kommen, ist aber damit noch keineswegs erörtert. Wäre aber die Gleichheit der Rotations- und Revolutionszeit bei den beiden innersten Planeten Merkur und Venus sichergestellt, so würde dies ein sehr starkes Argument für eine jedenfalls ziemlich bedeutende Sonnenatmosphäre, die bis über die Venusbahn hinausreicht, sich aber nicht bis an die Erdbahn erstreckt, sein und damit ein leitendes Princip für eine Erklärung der Sonnencorona geben.

Die acht genannten Planeten werden als Hauptplaneten bezeichnet, da einige derselben von anderen Himmelskörpern, Nebenplaneten, Satelliten, Trabanten, genannt, umkreist werden. Bei Merkur und Venus wurde bisher kein Satellit beobachtet, die Erde hat einen, Mars zwei, Jupiter fünf, Saturn acht, Uranus vier, Neptun einen Satelliten.

Die Planeten erkennt man am Himmel an ihrer Scheibenform; Venus, Jupiter und Saturn überdies in der Nähe des grössten Glanzes, bezw. in der Nähe der Opposition an ihrem hellen, alle Fixsterne überstrahlenden Glanze. Bei Anwendung von Fernrohren wird man die Scheibe je nach der Vergrösserung des Fernrohres immer grösser hervortreten sehen. Bei sehr grosser Entfernung oder bei geringer Grösse des Planeten wird dieses Merkmal selten charakteristisch. Das in älteren Werken angegebene, und auch jetzt noch mehrfach wiederholte Characteristicum, das »ruhige Licht« der Planeten gegenüber dem »zitternden Lichte« der Fixsterne ist vollständig unzuverlässig; zwar kann, eben in Folge der Scheibenform, das Licht der Planeten ruhiger sein, da feine, zwischen das Auge und das betrachtete Object tretende Staubpartikelchen das Licht eines äusserst kleinen, punktförmigen Objectes leichter abzulenken vermögen, als das von verschiedenen Punkten einer Scheibe in derselben Richtung kommende Licht, allein praktisch reicht man hiermit niemals aus, und in der That ist der Gesichtswinkel, unter welchem selbst sehr kleine Staubpartikelchen gesehen werden, kaum so klein, dass nicht auch kleinere, scheibenförmige Objecte verdeckt, bezw. durch Beugung etwas seitlich verschoben erscheinen können. Im Fernrohr aber wird dieser Unterschied ganz hinfällig, da Staubpartikelchen nur undeutliche Zerstreuungskreise geben, die das durch eine grosse Anzahl parallel auffallender Strahlen gesammelte Bild des Sterns nicht verändern oder verschieben können. Erkennt man also, wie dieses bei kleinen Planeten selbst mit grossen lichtstarken Fernröhren der Fall ist, die Planeten nicht an ihrer Scheibe, so kann nur die Ortsveränderung innerhalb kleinerer oder, wenn nöthig, grösserer Zeitintervalle, Aufschluss hierüber geben. Die Planetenentdeckung erfolgt daher nur so, dass man z. B. an einem Abend eine möglichst genaue Karte einer Gegend des Himmels, in welcher Planeten vermuthet werden (Ekliptikalkarten) anfertigt, und diese am nächsten Abende, und wenn Zweifel über die Richtigkeit der Zeichnung bestehen, an mehreren Abenden mit dem Himmel vergleicht. Das Anlegen der Karte durch Auge und Hand ist in neuerer Zeit durch die Himmelsphotographie ersetzt, welche dasselbe mit weniger Mühe und weit grösserer Präcision zu leisten vermag. Auf den photographischen Platten sieht man übrigens bei langer Expositionszeit die bewegten Objecte als

Striche, während die Fixsterne selbstverständlich als Punkte erscheinen, so dass man meist schon auf einer Platte bei mehrstündiger Expositionszeit den Hinweis auf die Möglichkeit des Vorhandenseins eines Planeten erkennt.

Bezüglich der Anordnung der Himmelskörper wurde wiederholt versucht, für die mittlere Entfernung ein Gesetz zu bestimmen. TITIUS gab ein solches, welches sich in die Form $4 + 3 \cdot 2^n$ kleiden lässt, wenn man für die Venus, Mars u. s. w. $n = 0, 1 \ldots$ setzt, wo aber für Merkur nicht $n = -1$ gesetzt werden darf, wie es die fortlaufende Reihe erfordern würde, sondern einfach 4, d. i. $n = -\infty$[1]). Dieselbe Reihe wurde später von BODE neuerdings erwähnt. Sie stimmt noch besser, wenn man nach WERNER an Stelle der beiden Zahlen 4 und 3 die Coëfficienten 387, 293 setzt, also die Entfernung proportional $387 + 293 \cdot 2^n$ — natürlich mit derselben Ausnahme. Die Entdeckung des Uranus und der kleinen Planeten in dem Gürtel zwischen Mars und Jupiter festigte die Ansicht von der Richtigkeit dieses Gesetzes, indem dadurch ein neues, ausserhalb gelegenes Glied der Reihe, und ein in derselben liegendes, bis dahin fehlendes ergänzt wurden; aber die Entdeckung des Neptun machte dem ein Ende. Als mnemotechnisches Hilfsmittel ist aber der Satz ganz brauchbar, um rasch genähert die Entfernung eines Himmelskörpers von der Sonne zu erhalten. Man findet diese in Millionen Kilometern, wenn man für die inneren Planeten die Zahlen

$$4; \quad 4 + 1 \cdot 3 = 7; \quad 4 + 2 \cdot 3 = 10; \quad 4 + 4 \cdot 3 = 16;$$

für die kleinen Planeten $4 + 8 \cdot 3 = 28$, und für die äusseren Planeten

$$4 + 16 \cdot 3 = 52; \quad 4 + 32 \cdot 3 = 100; \quad 4 + 64 \cdot 3 = 196; \quad 4 + 128 \cdot 3 = 388$$

mit 15 multiplicirt. Uranus stimmt noch recht gut; der Werth für Neptun wird um nahe 1000 Millionen Kilometer zu gross.

Bei der Bestimmung der Grösse kommt zunächst der Durchmesser und die Masse in Betracht. Die Bestimmung des Durchmessers stösst auf Schwierigkeiten in Folge der Irradiation. Ist d_0 der Durchmesser in der Entfernung 1, so ist derselbe in der Entfernung Δ gleich $\frac{d_0}{\Delta}$. Bei hellen Objecten erscheint aber das Netzhautbild verbreitert. Für $\Delta = \infty$ (Fixsterne) müsste ja der scheinbare Durchmesser Null sein; die Fixsterne müssten als Punkte erscheinen; dennoch erscheinen sie als Scheiben von messbarem Durchmesser, und man wird daher nicht den der Entfernung Δ entsprechenden Durchmesser rein erhalten, sondern vermehrt um die Irradiation. Ist diese jederseits i, so wird der gemessene Durchmesser d gleich sein:

$$d = \frac{d_0}{\Delta} + 2i.$$

Bei sehr variablem Δ, wie dieses z. B. für Venus und Mars der Fall ist, kann daraus Δ und i bestimmt werden. MÄDLER fand aus Beobachtungen der Venus $i = 0''\cdot3253$[2]). STONE erhielt in derselben Weise aus den Greenwicher Venusbeobachtungen aus den Jahren 1839—1850: $i = 0''\cdot641$, aus denjenigen von 1851—1862: $i = 0''\cdot437$[3]) und aus Beobachtungen des Mars: $i = 1''\cdot184$[4]). Allein so einfach ist die Sache doch auch nicht. Die Irradiation hängt, wie erwähnt, von der Helligkeit ab, und hellere Fixsterne erscheinen unter einem

[1]) Auf diese Inkorrektheit des Gesetzes hat zuerst GAUSS hingewiesen.

[2]) Astron. Nachr. Bd. 14, pag. 200.

[3]) Monthly Notices Bd. 25, pag. 57.

[4]) Monthly Notices Bd. 41, pag. 145.

grösseren Sehwinkel wie schwächere Fixsterne. Da aber die Helligkeit des Planeten auch mit seiner Entfernung abnimmt, so wird die Irradiation eben nicht als constant anzunehmen sein. Die Helligkeit kann, wenn r die Entfernung des Planeten von der Sonne ist,

$$H = \frac{H_0}{r^2 \Delta^2}$$

gesetzt werden. Wäre die Irradiation proportional der Helligkeit, so müsste daher

$$d = \frac{d_0}{\Delta} + 2 \frac{i_0}{r^2 \Delta^2}$$

angenommen werden, welche Formel wesentlich andere Werthe für i ergeben würde. Allein die unmittelbare Proportionalität der Irradiation mit den Helligkeiten kann nach den bisherigen Untersuchungen nicht als feststehend angenommen werden, weshalb die Bestimmung der Durchmesser noch erheblichen Unsicherheiten unterliegt.

Die Grösse der Planetenscheiben unterliegt auch insofern Schwankungen, als die Planeten je nach ihrer Stellung zur Sonne und Erde, ganz so wie der Mond, Phasen zeigen. Ist dabei weniger als die Hälfte des Planeten erleuchtet, so hat er die Sichelform; man bezeichnet dann die beiden Spitzen der Sichel als »Hörner«. Die Veränderungen derselben können in Fällen, wo die Beobachtungen der Flecke (s. hierüber später) für die Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit kein unzweifelhaftes Resultat ergeben, mit herangezogen werden.

Ist jedoch, wie dieses bei den äusseren Planeten der Fall ist, der beleuchtete Theil grösser als die halbe Planetenscheibe, so wird die Sichelgestalt nicht auftreten; aber nur in der Opposition selbst wird die vollbeleuchtete Scheibe sichtbar, in jedem anderen Punkte wird der Planet eine gewisse Phase zeigen, und man muss hierauf bei der Messung des Durchmessers entsprechend Rücksicht nehmen.

Für die Massen der Planeten wurde lange Zeit eine Abhängigkeit von der Entfernung derselben von der Sonne vorausgesetzt, EULER berechnete die Massen unter der Voraussetzung, dass sich dieselben wie die Quadratwurzeln aus den mittleren Bewegungen verhalten, welche Annahme auch noch später von LAGRANGE[1]) und LAPLACE[2]) für diejenigen Himmelskörper, für welche keine Satelliten bekannt waren, beibehalten wurde. NEWTON hatte die Masse der Erde, des Jupiter und Saturn aus den Umlaufszeiten ihrer Satelliten bestimmt. Die ausgebildete Theorie der Störungen der Planeten untereinander gab einen anderen Weg zur Bestimmung der Masse, welcher später von LE VERRIER in seinen Untersuchungen angewendet wurde. Ueber die Werthe der Massen wird später bei den einzelnen Planeten gesprochen.

Aus dem Durchmesser und der Masse erhält man die Dichte des Planeten. Da nämlich die Masse M eines Himmelskörpers vom Durchmesser d und der Dichte δ:

$$M = \tfrac{1}{6}\pi d^3 \delta$$

ist, und für einen zweiten vom Durchmesser d' und der Dichte δ':

$$M' = \tfrac{1}{6}\pi d'^3 \delta',$$

so wird

$$\frac{M}{M'} = \frac{d^3 \delta}{d'^3 \delta'}; \qquad \frac{\delta}{\delta'} = \frac{M}{M'} \left(\frac{d'}{d}\right)^3.$$

---

[1]) Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1782, pag. 190; Werke, V. Bd., pag. 235.

[2]) Mécanique céleste, III. Bd.

Da das Verhältniss der linearen Durchmesser gleich ist dem Verhältniss der Winkel, unter welchem diese in derselben Entfernung gesehen werden, so kann man auch diese an Stelle der linearen Durchmesser setzen. Der Winkel, unter dem der Erddurchmesser in der Entfernung 1 erscheint, ist die doppelte mittlere Aequatorealhorizontal-Parallaxe der Sonne. Drückt man daher alle Massen in der Einheit der Sonnenmasse, die Dichte in Einheiten der Erddichte aus, und verwendet für die Durchmesser die Werthe der scheinbaren Planetendurchmesser in der Einheit der Entfernung, so wird für einen Planeten

$$\delta = \frac{M}{M_{\circ}} \left(\frac{17 \cdot 69}{d}\right)^3 = (17 \cdot 69)^3 \cdot 330000 \cdot \frac{M}{d^3}.$$

Die sich hiernach ergebende Dichte des Planeten ist eine mittlere Dichte, wie sie unter der Voraussetzung der Homogenität des Planeten folgen würde. Diese Voraussetzung ist aber keineswegs zutreffend; im Gegentheil zeigt der Vergleich der beobachteten Abplattung mit der unter der Annahme einer gleichförmigen Dichte folgenden (vergl. den Artikel »Mechanik des Himmels«, II. Bd. pag. 551), dass diese letztere Annahme für die Planeten nicht richtig ist, und man eine Zunahme der Dichte gegen das Innere zu voraussetzen muss.

Von systematischen Untersuchungen über die Helligkeit der Planeten sind zunächst diejenigen von SEIDEL zu erwähnen[1]. Nimmt man als Einheit der Helligkeit diejenige von α Lyrae (Wega) an, so ist die Helligkeit von

Venus in ihrem mittleren Glanze	1·5902
Jupiter in mittlerer Opposition	0·9158
Saturn „ „ „ (ohne Ring)	0·6687
Mars in mittlerer Opposition	0·4674

ZÖLLNER erhielt[2] für die Einheit der Lichtstärke von α Aurigae (Capella)[3] für die Logarithmen der Helligkeiten

für Venus 1·6070 (auf die Entfernung der mittleren Conjunction reducirt)

für Mars	0·9016	in mittlerer Opposition
„ Jupiter	1·0082	
„ Saturn	9·6291 (ohne Ring)	
„ Uranus	7·8176	
„ Neptun	6·8453	

ferner für die Sonne: 10·7463.

Von der Helligkeit ist die reflektirende Kraft oder »Albedo«, auch wohl die »Weisse« genannt, zu unterscheiden. Da die Planeten, abgesehen von grösserer oder geringerer Eigenlichtentwickelung, deren Vorhandensein bisher nicht bei allen constatirt ist, hauptsächlich durch das von der Sonne reflektirte Licht sichtbar werden, so wird die Helligkeit bei verschiedener chemischer Beschaffenheit in Folge des verschiedenen Grades der Reflexion der auffallenden Strahlen verschieden sein. Die Helligkeit H eines Himmelskörpers vom Halbmesser ρ und der Albedo A wird in der Entfernung r von der Sonne und Δ von der Erde

---

[1]) »Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn und die relative Weisse ihrer Oberfläche«, pag. 34.

[2]) »Photometrische Untersuchungen«, pag. 131—154.

[3]) Es ist $log \frac{\text{Wega}}{\text{Capella}} = 9 \cdot 9061$ nach SEIDEL und 9·9877 nach ZÖLLNER.

$$H = \frac{1}{c} \frac{\rho^2}{r^2 \Delta^2} A,$$

folglich

$$A = c \frac{r^2 \Delta^2}{\rho^2} H.$$

Man kann daher auch unter Albedo die Helligkeit der Flächeneinheit dee in der Einheit der Entfernung von Erde und Sonne befindlichen Himmelskörpers verstehen[1]).

Die Albedo der verschiedenen Planeten ist ziemlich verschieden; sie beträgt nach ZÖLLNER für

Mars	0·2672
Jupiter	0·6238
Saturn	0·4981
Uranus	0·6406
Neptun	0·4648.

Zur Vergleichung mögen hier die von ZÖLLNER angegebenen Werthe der Albedo für verschiedene irdische Stoffe angeführt werden. Sie ist für

dunklen Syenit	0·078	weissen Sandstein	0·237
feuchte Ackererde	0·079	Spiegelmetall	0·535
Quarz, Porphyr	0·108	Quecksilber	0·648
Thonmergel	0·156	weisses Papier	0·700
		frisch gefallenen Schnee	0·783

Man sieht, dass die Albedo des Mars nahe gleich derjenigen des weissen Sandsteines, diejenige des Jupiter und Uranus sehr nahe derjenigen des Quecksilbers, diejenige des Saturn und Neptun etwas kleiner wie diejenige des Spiegelmetalles ist. Die Albedo der Venus und des Mekcur hat ZÖLLNER nicht bestimmt; dieselbe ist für Venus sehr hoch, was nur durch die Annahme eines spiegelnden Stoffes (Wasser) erklärt werden kann.

Eigentlich ist die Albedo für jede Farbe verschieden und müsste für jede einzelne Farbe bestimmt werden. Im allgemeinen genügt aber die Angabe der Albedo im zusammengesetzten Lichte. Von der Verschiedenheit der Albedo für die einzelnen Fatben wird übrigens auch die Farbe des Himmelskörpers bedingt. Nur für die photographischen Aufnahmen wird die Angabe der Albedo der actinischen Strahlen nöthig; je höher diese ist, desto kürzer wird die Expositionszeit.

Die Oberfläche der Planeten zeigt kein gleichmässiges Aussehen. Man bemerkt hellere und dunklere Stellen (Flecke) auf einem mehr oder weniger gleichmässigen Grunde. Zur Erkenntniss der Oberflächenbeschaffenheit der Planeten ist die Kenntniss der relativen Lage dieser Flecke von Wichtigkeit. Ueberdies bietet der Planet nicht beständig dasselbe Aussehen dar, die Flecke sind theils gegeneinander verändert, theils bei relativ unveränderter Lage gegen die Visir-

[1]) Da $\frac{\rho}{\Delta} = \sin \sigma$ ist, wenn σ der scheinbare Halbmesser des Himmelskörpers ist, und $r = \frac{\sin \eta}{\sin \eta'}$ ist, wenn η den von der Erde gesehenen, η' den vom Planeten gesehenen Halbmesser der Sonne bedeutet, so folgt hieraus

$$A = c \frac{\sin^2 \eta}{\sin^2 \sigma \sin^2 \eta'} H$$

die Formel von ZÖLLNER (l. c., pag. 159).

linie verschoben. Die fortgesetzte Beobachtung der Flecke führt daher einerseits zur Erkenntnis der Constanz oder Veränderlichkeit der Oberflächenform, andererseits zur Erkenntniss der Rotationszeit des Himmelskörpers. Ueber die Festlegung der Lage der Flecke braucht hier nichts weiter ausgeführt zu werden, da das Nöthige in dem Artikel »Mechanik des Himmels« II. Bd., pag. 460 erwähnt ist. Die Formeln können allerdings noch mehrfach modificirt werden, doch genügt das dort Gesagte, da jeder leicht die ihm am besten zusagende Form der Berechnung finden wird.

Merkur.

Von dem hypothetischen intramercuriellen Planeten, über welchen später einiges gesagt wird, abgesehen, ist Merkur der der Sonne nächst stehende Planet. Die grösste Elongation des Planeten ist wegen der grossen Excentricität in ziemlich weite Grenzen eingeschlossen, und dementsprechend variirt auch der retrograde Bogen, während die Zeit der Retrogradation geringeren Schwankungen unterworfen ist, da die grössten Werthe der Elongationen in der Erdnähe und Sonnenferne stattfinden, wobei die Geschwindigkeit der Bewegung eine kleinere ist. Die grössten Elongationen liegen zwischen 20 und 26°, die Grösse des retrograden Bogens zwischen 8 und 15½°, die Zeit der Retrogradation zwischen 21 und 23 Tagen.

Mit freiem Auge ist Merkur nur sehr schwer zu sehen; daher sind auch die Beobachtungen aus dem Alterthume und Mittelalter nur sehr spärlich. Unter günstigen Umständen kann er jedoch auch ziemlich hell erscheinen, doch sind diese Gelegenheiten nicht häufig. OUDEMANS sah ihn in Leiden am 3. Februar 1855 zwischen $5^h 20^m$ und $5^h 50^m$ mit blossem Auge wie einen Stern wenigstens zweiter Grösse; am 13. Februar zwischen 6 Uhr 14^m und $6^h 20^m$ ebenfalls mit freiem Auge, heller wie einen Stern erster Grösse[1]). Ueber eine ähnliche Beobachtung berichtet GORE in »The English Mechanic«, Bd. 19, pag. 562.

Um die Messung seines Durchmessers haben sich besonders SCHMIDT und KAISER verdient gemacht; aus den Beobachtungen von Merkursdurchgängen leitete COPELAND seinen Durchmesser zu 6·644″ in der Entfernung 1 ab[2]). Die von verschiedenen Beobachtern erhaltenen Werthe schwanken zwischen 6″ und 6¾″; ein aus denselben abgeleiteter Mittelwerth ergiebt 6·455″.

Bedeutend grösseren Unsicherheiten unterliegt die Massenbestimmung. Sieht man von den älteren, durch Conjecturen gefolgerten Werthen ab, so ist zunächst der von ENCKE aus den Störungen des ENCKE'schen Kometen ermittelte Werth $\frac{1}{3091947}$ zu erwähnen[3]); bald darauf[4]) gab ENCKE den aus der Weiterführung seiner Rechnungen folgenden corrigirten Werth $\frac{1}{3200448}$. Die späteren Bestimmungen von LE VERRIER ergaben den wesentlich kleineren Werth $\frac{1}{5310000}$, und einen noch kleineren Werth erhielt v. ASTEN aus den Störungen, welche der ENCKE'sche Komet in der Zeit zwischen 1818 und 1868 erlitt; er fand $\frac{1}{7636440}$. Hiermit im auffallenden Widerspruche stand nun das Resultat, welches BACKLUND aus der Berechnung der Störungen erhielt, die dieser Komet in der Zeit zwischen 1871—1885 erlitt. BACKLUND fand die Merkursmasse gleich $\frac{1}{2668700}$. Die letzteren beiden Resultate wurden unter gleichzeitiger Bestimmung der Constante des widerstehenden Mittels erhalten.

---

[1]) Astron. Nachr. Bd. 40, pag. 200 und 240.
[2]) Astron. Nachr. Bd. 73, pag. 96.
[3]) Astron. Nachr. Bd. 19, pag. 186.
[4]) Astron. Nachr. Bd. 21, pag. 128.

v. HAERDTL fand nun im Gegensatze zu diesen einander ziemlich widersprechenden Resultaten aus der Berechnung der Störungen des WINNECKE'schen Kometen die Merkursmasse $\frac{1}{5012842}$[1]), also einen, dem LE VERRIER'schen sehr nahen Werth. Ueberdies fand aber v. HAERDTL die bemerkenswerthe Thatsache, dass, wenn in den v. ASTEN'schen und BACKLUND'schen Gleichungen die Constante des Widerstandes nicht mitbestimmt, sondern als empirische Constante in Rechnung gezogen wird, sich für die Merkursmasse die Werthe $\frac{1}{5648600}$ bezw. $\frac{1}{5669700}$ ergaben. Daraus schliesst v. HAERDTL, dass man, mit Rücksicht auf die Uebereinstimmung der letzten Werthe untereinander und mit dem LE VERRIER'schen nicht daran zweifeln könne, dass es unzulässig sei, bei dem Kometen ENCKE gleichzeitig die Widerstandsconstante mit der Merkursmasse zu bestimmen[2]).

Es scheint daher, dass man vorläufig noch bei dem älteren LE VERRIER-schen Werthe der Merkursmasse als einem derzeit allen Beobachtungen am besten entsprechenden verbleiben müsste[3]), wenngleich NEWCOMB in seiner Schrift »The Elements of the four inner planets, 1895, pag. 175«, dem kleineren Werth $\frac{1}{6,000000}$ den Vorzug giebt.

Ueber die Oberflächenbeschaffenheit des Merkur ist bisher noch wenig Sicheres bekannt, und sind die gewonnenen Resultate theilweise einander widersprechend.

MÜLLER in Potsdam schloss aus den den verschiedenen Phasen entsprechenden Helligkeitsänderungen des Merkur auf eine dem Erdmonde ähnliche Oberflächenbeschaffenheit und auf den Mangel einer Atmosphäre; hingegen schloss VOGEL 1873 aus spectroskopischen Beobachtungen (Auftreten von Absorptionsstreifen, die nicht der Erde angehören) auf das Vorhandensein einer solchen.

Die Phasen des Merkur wurden schon von dem Jesuiten ZUPUS am 23. Mai 1639 und bald darauf von HEVEL in Danzig, am 22. November 1644, gesehen. Die Veränderlichkeit der Sichelform wurde zuerst von SCHRÖTER in Lilienthal beobachtet. Dieser sah[4]) am 26. März 1800 um 7 Uhr Abends das südliche Horn abgerundet, das nördliche mit einer scharfen Spitze, eine Erscheinung, die nach 24 Stunden wiederkehrte, woraus SCHRÖTER auf eine Rotationsperiode von nahe 24 Stunden schloss. Die genauere Bestimmung ergab sich dann durch Vergleichung mit Beobachtungen nach einem längeren Zeitraume; genau dieselbe Phase sah SCHRÖTER wieder am 16. September Morgens 11 Uhr 8 Minuten, woraus er die Rotationsperiode gleich 24 Stunden 5 Minuten 30 Secunden fand[5]).

Die erste Beobachtung eines Flecks auf der Merkuroberfläche rührt von HARDING in Lilienthal her, der am 18. Mai 1801 einen dunklen Streifen auf der südlichen Hemisphäre, in der Nähe des südlichen Hornes sah, welche Beobachtung auch von SCHRÖTER am darauffolgenden Tage bestätigt wurde. Seine Bewegung stimmte vollkommen mit der aus den Hörnerveränderungen abgeleiteten Rotationszeit[6]). Am 22. Mai und den folgenden Tagen sahen beide

---

[1]) Astron. Nachr. Bd. 122, pag. 178.

[2]) ibid. pag. 186.

[3]) Derselbe wurde daher auch in der Tabelle in dem Artikel »Mechanik des Himmels«, II. Bd. No. 12, beibehalten.

[4]) ZACH's Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, I. Bd., pag. 574.

[5]) ibid. IV. Bd., pag. 221; Berl. Astron. Jahrbuch für 1804, pag. 97.

[6]) Monatl. Corresp. Bd. IV, pag. 223, Berl. Astr. Jahrbuch für 1804, pag. 98.

Beobachter einen runden, verwaschenen, dunklen Fleck, der in Schattengrenze diese bei starker Vergrösserung wie ausgezackt e und dessen weitere Verfolgung bis zum 14. Juni gelang und ebe stätigung der erhaltenen Rotationsgeschwindigkeit ergab. Aus de der Beobachtungen bestimmte später BESSEL[1]) die Rotationsperiode 6 Minuten 52·57 Secunden.

Von späteren Beobachtungen dieser Art ist nicht viel bek Zu erwähnen wäre nur, dass PETERSEN und SCHUMACHER währe ganges des Merkur vor der Sonnenscheibe 1832 Mai 5 in der Mi bald einen helleren, bald einen dunkleren Fleck wahrgenommen hat HARDING bei dieser Gelegenheit zwei hellere Flecke mit aller denkt keit gesehen, und in einem Zeitraume von beinahe 6 Stunden ihr bemerkt und aufgezeichnet hatte[3]).

Selbst die grösseren und lichtstärkeren Fernröhre der später über die Oberflächenbeschaffenheit des Merkur keine positiven Res und VOGEL bemerkt im zweiten Hefte der Bothkamper Beobachtu wohl einige Flecke wahrgenommen habe, dass aber die Versuche, etwas Näheres über die Oberflächenbeschaffenheit zu erhalten, erfolglos geblieben wären. Die Fig. 384 ist nach den von VOGEL in Bothkamp 1871 April 14 und April 22 aufgenommenen Zeichnungen wiedergegeben.



(A. 384.)
Merkur
beobachtet von VOGEL in Both
1871 April 14 1871

SCHIAPARELLI[4]) kommt aus seinen Beobachtungen der Jahre 1882—1889 zu ganz neuen Ergebnissen. Er bemerkte ebenfalls, dass sich der Anblick der Merkurphasen von einem Tage zum andern nicht ändere, dass ab merkliche Veränderung in der Zwischenzeit nicht zu constatiren s daher die Annahme, dass Merkur eine oder mehrere Rotationen i ausführe, auszuschliessen, und nur die Annahme mit den Beoba einbar, dass die Umdrehungszeit sehr langsam wäre. Betrachtet m verschiedenen synodischen Umläufen, aber in denselben Stellungen und Erde, so ist nach SCHIAPARELLI im Allgemeinen die Stellun bis auf eine kleine Verschiebung nahe dieselbe, so dass er zu kommt, dass Merkur um die Sonne so rotirt, wie der Mond Abgesehen von kleinen Abweichungen, wäre dann die Rotatio weitere Rechnung 87·97 Tage; doch sieht SCHIAPARELLI dieses Res Beobachtungen von 1882—1889 noch nicht als vollständig bewi

[1]) Berl. Astr. Jahrbuch für 1812, pag. 222.

[2]) Astron. Nachr. Bd. 10, pag. 133.

[3]) ibid., pag. 220.

[4]) »Sulla Rotazione di Mercurio«, Astron. Nachr. Bd. 123, pag. 241.

Spätere Beobachtungen von PERCIVAL LOWELL[1]) ergaben dasselbe Resultat. LOWELL spricht sich jedoch viel zu bestimmt aus; er meint, dass seine Beobachtungen mit irgend einer Differenz wesentlich unvereinbar wären[2]). Ob das Resultat in dieser Schärfe aufrecht zu erhalten ist, bleibt immerhin noch durch spätere Beobachtungen zu bestätigen.

Venus.

Die grössten Elongationen der Venus sind nur mässigen Schwankungen unterworfen, zwischen 44° und 48°; der retrograde Bogen schwankt zwischen 14° und 16°, die Zeit der Retrogradation zwischen 40 und 43 Tage; in ihrer östlichen Elongation erscheint sie am Abendhimmel nach Sonnenuntergang (Abendstern), in ihrer westlichen Elongation am Morgenhimmel (Morgenstern). In ihrem grössten Glanze erscheint sie wie ein Stern erster Grösse, oft heller als Sirius; doch ist das Maximum ihrer Helligkeit nach den Untersuchungen von MÜLLER innerhalb etwa $1\frac{1}{2}$ Grössenklassen veränderlich.

Zieht man die von verschiedenen Beobachtern (MÄDLER, SCHMIDT, SECCHI, KAISER, HARTWIG u. a.) erhaltenen Werthe des Durchmessers zusammen, so erhält man als Mittelwerth für den Durchmesser der Venus in der Einheit der Entfernung 17·190''.

Da die Venus keinen Satelliten hat, so kann die Masse derselben ebenfalls nur aus den Störungen berechnet werden, welche sie auf die Bewegung der anderen Himmelskörper ausübt. POWALKY giebt die folgende Zusammenstellung der verschiedenen für die Venusmasse erhaltenen Werthe[3]).

LE VERRIER fand aus den periodischen Störungen der Erde: $\frac{1}{410000}$, aus den Aenderungen der Schiefe der Ekliptik zwischen 1755—1846: $\frac{1}{427000}$.

Der von HANSEN und OLUFSEN in ihren Sonnentafeln verwendete Werth ist: $\frac{1}{408000}$.

HILL fand aus der Knotenbewegung der Venus mit der Sonnenparallaxe 8·848'': $\frac{1}{427000}$.

POWALKY leitete aus der Erdbewegung den Werth ab: $\frac{1}{397000}$.

Der zweite und vierte Werth scheinen wohl zu klein, der POWALKY'sche zu gross zu sein. Legt man dem ersten und dritten Werthe doppeltes Gewicht bei, so ergiebt sich als Mittelwerth $\frac{1}{410000}$, von welchem Werthe sich auch das einfache Mittel wenig unterscheidet und ebenso der neueste von NEWCOMB in seinem oben citirten Werk, nämlich $\frac{1}{408000}$.

Die Phasen der Venus wurden zum ersten Male 1610 von GALILEI gesehen, aber erst am 3. August 1700 hatte LAHIRE die Schattengrenze gezackt beobachtet[4]), doch war an eine genaue Bestimmung der Umdrehungszeit aus den Veränderungen der Schattengrenze nicht zu denken. Inzwischen hatte schon BURATINI in Polen[5]) und bald darauf CASSINI am 18. Juni 1667 Flecke auf der Venus gesehen. CASSINI verfolgte auch den Ort eines Flecks auf der Venusoberfläche und schloss auf eine Rotationszeit von ungefähr 23—24 Stunden. CASSINI der jüngere fand für dieselbe 23 Stunden 2·5 Minuten.

---

1) Astron. Nachr. Bd. 142, pag. 23.

2) ibid., pag. 391.

3) Astron. Nachr. Bd. 88, pag. 265.

4) Mémoiren der Pariser Academie für 1700, pag. 288.

5) Angezeigt von AUZOUT im Journal des Savants für 1665, pag. 287, dann von ihm selbst, ebenda 1668, pag. 33 und 101.

Bianchini bemerkte am 26. Februar 1726 zwischen 5 Uhr 45 Minuten Nachmittags und 9 Uhr Abends keine Veränderung der Flecke und schloss daraus, dass die Rotationszeit keinesfalls 23 Stunden sein könne. Aus seinen weiteren Beobachtungen aus den Jahren 1726 und 1727 leitete er die Rotationsdauer zu 24 Tagen 8 Stunden ab. Schröter beobachtete 1788 und 1793 die Veränderungen der Hörner und leitete daraus die Umlaufszeit 23 Stunden 21 Minuten 19 Secunden ab. Andererseits kam Valz aus den Beobachtungen von Flaugergues aus dem Jahre 1796 und aus seinen eigenen Beobachtungen wieder zu dem Resultate, dass die Rotationsdauer der Venus keinesfalls 23 Stunden betragen könne.

Gegenüber diesen positiven Angaben, welche theils für eine kurze Rotationsdauer von 23 Stunden, theils für eine längere von 24 Tagen sprachen, sind jedoch einige andere zu erwähnen, welche die Resultate überhaupt als zweifelhaft erscheinen lassen. Die Venusflecke sind nämlich ausserordentlich schwierig zu sehen, und Herschel fand mit seinen grossen Instrumenten keine Flecken auf der Venus, nie Unregelmässigkeiten in der Schattengrenze und keine Veränderuugen in den Hörnergrenzen. Dennoch neigt er der Meinung zu, dass die Rotation kaum so langsam sei, dass die Rotationsdauer 24 Tage betragen würde[1]).

Auch Valz hatte auf die langsame Rotationsdauer nicht aus Fleckenbeobachtungen, sondern aus der Unveränderlichkeit der Schattengrenze geschlossen[2]): »*depuis longtemps je partageois l'opinion soutenue, ayant vu maintesfois les échancrures du croissant immobiles pendant plusieurs heures de suite.*« Allerdings war sein Fernrohr nur von mässiger Stärke, denn Jupiterflecke, die Airy und Bessel sehr gut sahen, konnte er durch sein Fernrohr nicht beobachten[3]). Trotzdem hatte aber Hussey nach den Beobachtungen von Bianchini, welche allein er für vertrauenswürdig erklärt[4]), eine Karte der Venus entworfen, die zahlreiche Details zeigt[5]).

Aus den nächsten Jahren sind sodann die Beobachtungen von Mädler und de Vico zu erwähnen.

Mädler hatte Flecke nie wahrgenommen; aber aus der »oft überraschend schnellen Veränderung der Hörnergestalten, wenn sie nicht aller Objectivität ermangeln«, muss man auf die Unvereinbarkeit mit der Bianchini'schen Angabe schliessen[6]). Auch Lamont hat einige Flecke wahrgenommen[7]); und Schumacher berichtet[8]), dass er 1844 April 26 Flecke auf der Venus sah, und zwar mit einem k l e i n e n Fernrohre; mit einem grösseren waren sie durch den starken Glanz der Venus nicht zu sehen.

---

1) Vergl. Vogel in Bothkamper Beobachtungen, II. Heft, pag. 128.

2) Astron. Nachr. Bd. 12, pag. 239.

3) Doch hat Mädler Unrecht, wenn er diese beiden Aeusserungen für einander widersprechend hält.

4) Monthly Notices of the Royal Astron. Society, II. Bd., pag. 78. Merkwürdiger Weise führt er als Argument hierfür gegenüber anderen Beobachtern auch »the character of the Observer« an. ibid., pag. 79.

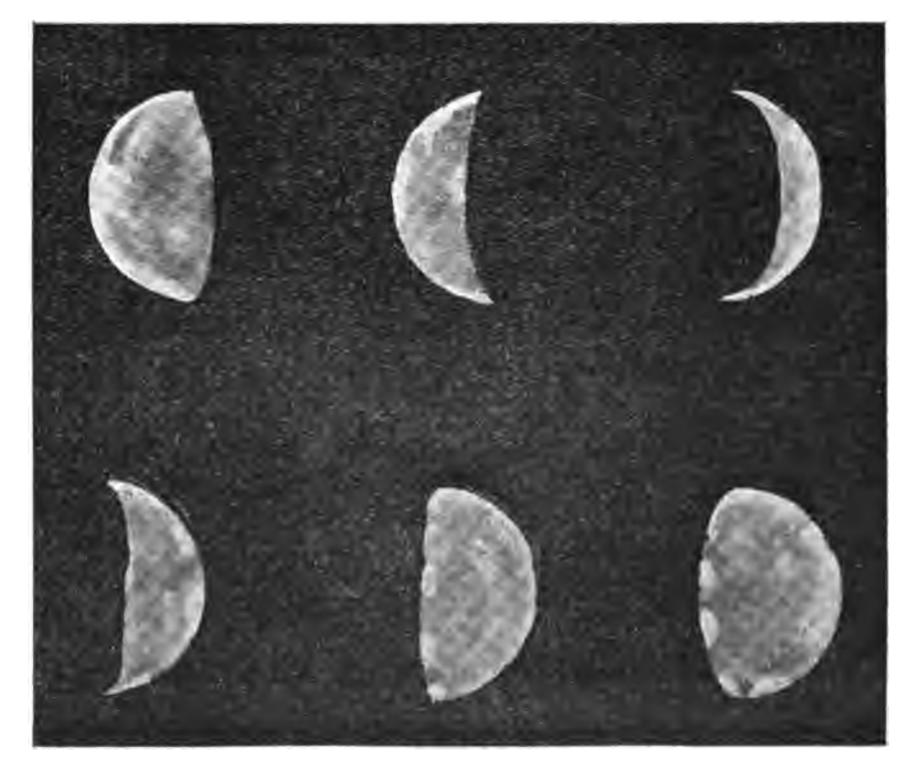
5) Astron. Nachr. Bd. 11, pag. 121 und 139.

6) »Beiträge zur physischen Kenntnis der Himmelskörper«, pag. 132 und Astron. Nachr. Bd. 14, pag. 197.

7) Astron. Nachr. Bd. 14, pag. 182.

8) Astron. Nachr. Bd. 45, pag. 160.

DE VICO hingegen hat Flecke ganz deutlich wahrgenommen, so dass er aus denselben auch die Rotationsperiode ableiten konnte: Er sagt[1]): »*Generalmente le macchie si presentano sotto l'aspetto di una sfumatura assai carica verso il centro; ma le cui estremità si perdono insensibilmente . . . Quanto al tempo della rotazione essa si compie in meno di 24 ore solari. Per tutto il tempo, in cui Venere sta sopra l'orizzonte, non essendo da noi mai abbandonata, scorgiamo troppo evidentemente che le sue macchie si avanzano sensibilmente e con moto regolare, fino a nascondersi e poi ricomparire a suo luogo dall'ora conveniente nel giorno appresso. Ed è cosa notabilissima, che dentro lo spazio di tre o quattr'ore tal' è la loro disposizione sul disco, che tornano presso a poco a mostrarsi nella medesima positura, benchè alcuna d'esse non sia più la stessa di prima. Dal che può facilmente avvenire, che chi d'ora in ora non segue il moto delle macchie possa credere dileggeri, ma falsamente, ch'elle non si sieno mosse.*« Dieser Schluss — dass die Vertheilung der Flecken nach 3—4 Stunden eine solche sei, wie vor dieser Zeit, so dass man, wenn man nicht von Stunde zu Stunde der Bewegung der Flecken folge, irrthümlich meinen könne, sie hätten sich nicht bewegt — macht das Wiedererkennen der Flecke am folgenden Tage[2]) gewiss ausserordentlich schwer,



(A. 386.)

Beobachtungen der Venus von H. C. VOGEL 1871

Mai 24	Juni 17	Juli 30
November 1	November 17	December 24

so dass es befremdlich erscheint, wie DE VICO unter diesen Umständen die Rotationszeit bis auf Hundertel Zeitsecunden ($23^h\ 21^m\ 21^s{\cdot}93$) bestimmen konnte.

[1]) Astron Nachr. Bd. 17, pag. 307.

[2]) Vergl. VOGEL, Bothkamper Beobachtungen, II. Heft, pag. 118.

Die Beobachtungen von VOGEL aus den Jahren 1871, 1872 und 1873 für die Bestimmung der Rotationsdauer des Planeten waren erfolglos[1]. Es wurden mit Sicherheit Flecke constatirt. Die Fig. 386 giebt die VOGEL'schen Beobachtungen von 1871 Mai 24, Juni 17, Juli 30, November 1, November 17 und December 24 wieder. VOGEL konnte auch durch Vergleichung von Zeichnungen, die innerhalb weniger Stunden aufgenommen waren (so insbesondere 1871 Mai 23: $6^h 7^m$ und $8^h 47^m$; ferner September 14: $2^h 55^m$ und $23^h 15^m$)[2] auf eine sehr langsame Veränderung schliessen, konnte jedoch nicht zu einem bestimmten Schlusse über die Rotationszeit gelangen.

Die Resultate seiner Venusbeobachtungen fasst er folgendermaassen zusammen[3]:

»1) Auf dem von der Sonne beleuchteten Theil der Venusoberfläche lassen sich unter günstigen atmosphärischen Verhältnissen verschiedene Lichtabstufungen sowie auch helle und dunkle Flecken wahrnehmen, welche nur sehr langsame Veränderungen, sowohl in Bezug auf Gestalt wie auch auf Position, zeigen. Diese Flecken sind meist unbestimmt begrenzt und heben sich nur so wenig von den umliegenden Theilen der Planetenscheibe ab, dass sie sich selbst bei guter Luft dem Auge des Beobachters nur intermittirend darstellen und daher nur schwer und unsicher aufzusuchen sind. Diesem Umstande mag es zum Theil zugeschrieben werden, dass das Aussehen des Planeten innerhalb weniger Stunden, ja sogar von einem Tag zum andern sich scheinbar nur wenig verändert. Man wird unter solchen Verhältnissen nur grössere Veränderungen zu beobachten im Stande sein.

»Das nebelartig verschwommene Aussehen der Flecke, sowie die — besonders zu der Zeit, wo die Venus als Sichel erscheint — auffallende Abnahme des Lichtes nach der Beleuchtungsgrenze machen es sehr wahrscheinlich, dass der Planet von einer Atmosphäre umgeben ist, in der eine sehr dichte und dicke Schicht von Condensationsprodukten schwebt, und dass die Aufhellungen in dieser Schicht nie so weit gehen, dass sie deutlich markirte Flecken auf der Venusscheibe bedingen oder einen Durchblick auf die Oberfläche des Planeten gestatten.

»Unter diesen Verhältnissen scheint es unmöglich, aus den Flecken, die man auf der Oberfläche der Venus bemerkt, Schlüsse über die Rotationszeit oder die Lage der Rotationsaxe des Planeten zu ziehen.

»2) Unregelmässigkeiten, d. h. Aus- oder Einbuchtungen an der Beleuchtungsgrenze, sind nur an wenigen Tagen vermuthet worden, nie konnten dieselben mit solcher Bestimmtheit fixirt werden, dass man aus einer etwaigen Wiederkehr oder einer Lagenveränderung in kürzerer Zwischenzeit auf eine Rotation des Planeten hätte schliessen können. Oft schienen Ausbuchtungen vorhanden zu sein, bei sorgfältiger Prüfung zeigte sich aber die Beleuchtungsgrenze ganz gleichmässig verlaufend, hellere in der Nähe dieser Grenze befindliche Stellen hatten die Täuschung hervorgebracht. Die Entscheidung war übrigens oft schwierig, besonders dann, wenn durch die Unruhe der Luft die Ränder der Planeten stark undulirten. Kleinere Auszackungen, Vorsprünge, isolirt auf der Nachtseite liegende Punkte, Gestaltsveränderungen der Hörner sind nie beobachtet worden.

---

[1] ibid., pag. 125.

[2] ibid., pag. 120, 123.

[3] ibid., pag. 125 und 126.

»3) Lichterscheinungen auf der Nachtseite der Venus konnten mit einiger Bestimmtheit gesehen werden, sie erstreckten sich aber nicht über den ganzen dunklen Theil der Planetenscheibe, sondern waren nur bis zu einer Entfernung von etwa 30° von der Beleuchtungsgrenze wahrzunehmen. Dieselben können möglicherweise das Phänomen einer sehr starken Dämmerung sein, was wiederum sehr für das Vorhandensein einer hohen und dichten Atmosphäre sprechen würde. Die fraglichen Lichterscheinungen scheinen jedoch nicht immer sichtbar zu sein, und wenn man nicht den Grund davon in der grösseren oder geringeren Undurchsichtigkeit unserer Atmosphäre suchen will, dürfte das zeitweilige Auftreten für die Annahme elektrischer, mit Lichtentwickelung verbundener Vorgänge sprechen. Das Spectroskop, das in einem solchen Falle am ehesten hierüber eine Entscheidung bringen könnte, lässt leider wegen der zu grossen Lichtschwäche keine Anwendung zu.

»Ein Uebergreifen der Hörnerspitzen nach der Nachtseite der Venus konnte aus den am Tage angestellten Messungen nicht nachgewiesen werden . . . .«

Zwischen 1877 November 13 bis 1878 Februar 7 hatte TROUVELOT zwei weisse Flecke nahe dem südlichen Horne beobachtet[1]), welche von RUSSELL schon 1877 Juni 15 gesehen worden waren[2]).

Auch die Hörnerveränderungen sind auf Flecken zurückzuführen, indem sich dunkle Flecken an der Schattengrenze bis an die Hörner vorschieben, wobei eine beträchtliche Schwächung des Lichtes erzeugt wird, die den Eindruck eines »abgestumpften Hornes« hervorruft[3]).

Schon aus den VOGEL'schen Ausführungen ist zu entnehmen, dass das Aussehen des Planeten sich selbst von einem Tage zum andern nur wenig verändert; VOGEL suchte die Ursache in der unbestimmten Begrenzung und der Schwierigkeit der Auffassung der Flecken. Dem gegenüber war SCHIAPARELLI aus seinen Beobachtungen 1895 zum Schlusse gekommen, dass die Rotationsdauer der Venus gleich sei ihrer Umlaufszeit, also 224·7 Tage[4]). Zu demselben Resultate ist auch MASCARI[5]) gekommen, nachdem er sich bereits 1893 gegen die Rotationsdauer von 24 Stunden ausgesprochen hatte, und auch P. LOWELL[6]) schloss sich der Meinung von SCHIAPARELLI an, während VILLIGER aus seinen Beobachtungen in München wieder auf die Rotationszeit von 24 Stunden geführt wurde[7]).

Aehnlich wie beim Monde kann man auch den nicht erleuchteten Theil der Venusscheibe in mattem »aschgrauem« Lichte sehen; doch gehört diese Erscheinung zu den Seltenheiten. KIRCH war wohl der erste, der die Nachtseite der Venus sah. Er berichtet, dass er 1721 Juni 7 und 1726 März 8 »das tunckle Veneris« gesehen hat[8]), und zwar den dunklen Theil von kleinerem Halbmesser, wofür er auch die richtige Erklärung giebt (Irradiation): »dass sich das helle Licht in unserem Auge ausbreitet, und grösser scheint, als es in der That ist«

---

1) The Observatory, Bd. III, pag. 417.
2) ibid., III. Bd., pag. 574.
3) Vergl. VOGEL, l. c., pag. 121.
4) Astron. Nachrichten, Bd. 138, pag. 252.
5) Astron. Nachrichten, Bd. 139, pag. 304.
6) Astron. Nachrichten, Bd. 142, pag. 361.
7) Astron. Nachrichten, Bd. 139, pag. 312.
8) S. die Notiz von SCHÖNFELD, Astron. Nachrichten, Bd. 67, pag. 27.

Sodann wäre eine Beobachtung von HARDING in Göttingen vom 24. Januar 1806[1]) und von SCHRÖTER in Lilienthal vom 14. und 21. Februar 1806[2]) zu erwähnen.

ŠAFAŘIK gab in den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der königl. böhm. Akademie der Wissenschaften 1873 eine Zusammenstellung aller jener Fälle, wo die Nachtseite der Venus gesehen wurde; zu dem Auszuge in der Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellsch., Bd. I, pag. 213 bemerkt WINNECKE, dass er selbst »seit 24 Jahren die Venus häufig mit den verschiedensten Fernröhren und unter allen Verhältnissen, gewiss viele hundertmale, zum Theil mit der Absicht, das Secundärlicht zu sehen, beobachtet, und nur zweimal den merkwürdigen Schimmer wahrgenommen habe«. Auch MÄDLER bemerkt in seinen »Beiträgen zur physischen Kenntniss der Himmelskörper« pag. 139, dass er und BEER das aschfarbige Licht nie gesehen hätten[3]).

Dass die Nachtseite der Venus bei hellstem Sonnenschein in der Mittagsstunde gesehen wurde, kam überhaupt nur zweimal vor; das erste Mal wurde diese Beobachtung am 20. Oktober 1759 von ANDREAS MAYER in Greifswald, das zweite Mal am 25. September 1871 von WINNECKE in Karlsruhe beobachtet[4]).

Trabanten des Merkur und der Venus sind bisher keine entdeckt worden. Zwar wurden wiederholt Beobachtungen bekannt gemacht, welche eine solche Auslegung erfuhren, doch bestätigte sich bisher keine dieser Annahmen. Meist waren es dunkle Flecken, die bei Vorübergängen des Merkur oder der Venus auf der Sonnenscheibe gesehen wurden[5]), die aber nur als Sonnenflecke zu deuten sind, oder aber Nebenbilder, wie dieselben manchmal in den Fernrohren auftreten. Dass einer der kleinen Planeten zufällig in der Nähe der Venus beobachtet und für einen Trabanten derselben gehalten worden sei, scheint mit Rücksicht auf die Grösse derselben nicht wahrscheinlich, aber doch auch nicht gerade ausgeschlossen, worauf bezüglich der erst entdeckten schon v. ENDE[6]) hinweist. Dergleichen Angaben über einen vermeintlichen Venusmond finden sich ziemlich zahlreich. Schon am 15. November 1645 hatte FONTANA, dann am 25. Februar 1672 und später, am 28. August 1686, CASSINI einen Venusmond zu sehen geglaubt[7]). Beide hielten die beobachteten Objecte für reell. Später findet sich eine Beobachtung von SHORT vom 23. October 1740[8]) und zwischen 1759 und 1764 zahlreiche Angaben, unter anderen eine von HORREBOW; LAMBERT versuchte aus diesen Beobachtungen eine Bahn abzuleiten[9]), aber seit 1764 finden sich keine neuerlichen Beobachtungen verzeichnet.

Mars.

Obgleich dieser Planet der Erde nicht so nahe kommen kann, wie Venus — in den günstigsten Oppositionen (im August und September), kann er sich der Erde

---

1) Berl. Astr. Jahrbuch für 1806, pag. 167.

2) ibid pag. 164.

3) Vergl. auch VOGEL, Bothkamper Beobachtungen, II Heft, pag. 124.

4) Astron. Nachrichten, Bd. 78, pag. 236.

5) Astron. Nachrichten, Bd. 10, pag. 197.

6) ZACH's Monatliche Correspondenz Bd. 24, pag. 394.

7) Histoires et Mémoires de l'Academie de France, Bd. VIII (1731), pag. 183.

8) Philosoph. transact. of the Royal Society für 1741, pag. 646.

9) Berliner Memoiren für 1773, pag. 222, und Berliner Astron. Jahrbuch für 1777, pag. 178 und für 1778, pag. 186.

bis auf 54 Millionen *km*, in den ungünstigsten (Februar und März) nur auf 96 Millionen *km* nähern, — ist uns die Configuration seiner Oberfläche viel besser bekannt, als diejenige der Venus; allein dieses bezieht sich nur auf die Configuration, keineswegs aber auf die wirkliche Oberflächenbeschaffenheit; über diese gehen die Meinungen, und auf solche ist man zur Zeit noch angewiesen, noch ziemlich weit auseinander.

Gemäss der sehr grossen Excentricität seiner Bahn variirt sein retrograder Bogen mit der Zeit der Retrogradation ziemlich stark; ersterer zwischen 11° und 20°, letztere zwischen 64 und 80 Tagen. Auch sein scheinbarer Durchmesser ist, selbst in den Oppositionen, in ziemlich weiten Grenzen veränderlich. Die Bestimmung desselben stösst ebenso wie bei Venus in Folge der Irradiation auf nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Die von verschiedenen Beobachtern (Bessel, Schmidt, Le Verrier, Winnecke, Kaiser, Engelmann, Pritchett, Young u. a.) erhaltenen Werthe, auf die Einheit der Entfernung reducirt, schwanken zwischen 9″·2 und 11″·1. Das Mittel 9″·730, welches nur unwesentlich von dem von Stone[1]) abgeleiteten abweicht, dürfte der Wahrheit am nächsten kommen.

Schon J. D. Cassini sah den Planeten abgeplattet[2]). Wirkliche Messungen rühren von Winnecke[3]) und Kaiser[4]) her. Nach Kaiser's Messungen ist der Aequatorealhalbmesser in der Einheit der Entfernung 9″·518, der Polarhalbmesser 9″·436; nach Winnecke's Messungen bezw. 9″·235, und 9″·202, daher die Abplattung $\frac{1}{115}$ bezw. $\frac{1}{280}$. Adams[5]) folgerte auf theoretischem Wege, dass auch Mars nicht homogen wäre.

Die älteren Massenbestimmungen gründeten sich auf die Störungen, welche Mars in der Bewegung anderer Himmelskörper, vorzugsweise der Erde hervorbringt; Le Verrier erhielt $\frac{1}{2970000}$, Hansen verwendete in den Sonnentafeln $\frac{1}{3915000}$ Schon die ersten Beobachtungen der Satelliten, bald nach ihrer Entdeckung, lieferten ausreichendes Material, um einen Werth der Marsmasse abzuleiten. Die erhaltenen Werthe weichen nicht erheblich von den älteren, auf ganz anderem Wege erhaltenen ab. Newcomb leitete 1877 den Werth $\frac{1}{3090000}$ ab; im folgenden Jahre berechnete Hall aus seinen Beobachtungen $\frac{1}{3051000}$, welchen Werth er jedoch nur als genähert ansieht, und durch $\frac{1}{3100000}$ ersetzt. Eine genauere Reduction derselben Beobachtungen lieferte Pritchett den Werth $\frac{1}{3075000}$. In Erwartung eines genaueren aus sämmtlichen späteren Beobachtungen abzuleitenden Werthes kann vorläufig der Hall'sche abgerundete beibehalten werden, welcher zugleich dem von Newcomb neuerdings berechneten sehr nahe kommt, nämlich $\frac{1}{3{,}098500}$.

Die erste, unzweifelhafte Beobachtung von Marsflecken rührt wohl von Huygens her; zwar findet sich schon auf einer Darstellung von Fontana vom 24. August 1638 ein dunkler Fleck in der Mitte des Mars, und Riccioli berichtet in seinem »Almagestum novum«, dass P. Daniel Bartolus am 24. Dezember 1645 im unteren Theile der Marsscheibe zwei Flecke gesehen habe, und dass er eine

---

[1]) Monthly Notices of the R. Astron. Soc. Bd. 41, pag. 145.

[2]) Pariser Memoiren II. Bd. (1733), pag. 130.

[3]) Astron. Nachrichten Bd. 48, pag. 102.

[4]) Astron. Nachrichten Bd. 62, pag. 52; Annalen der Sternwarte zu Leiden III. Bd., pag. 236.

[5]) Monthly Notices of the R. Astron. Soc. Bd. 40, pag. 10.

Rotation des Planeten vermutete[1]). Da aber zunächst der weisse Südpolarfleck auffallen muss, so ist wenigstens die erstere Beobachtung wohl eher auf einen Irrthum oder eine Täuschung zurückzuführen.

Der Südpolarfleck findet sich zum ersten Male dargestellt auf einer Zeichnung von HUYGENS aus dem Jahre 1672. HERSCHEL zog aus seinen Beobachtungen aus den Jahren 1777 bis 1783 den Schluss auf die Unveränderlichkeit der Flecke, und bestimmte auch die Rotationszeit des Planeten zu 24 Stunden, 39 Minuten, 21⅝ Secunden[2]).

Eingehender beschäftigte sich MÄDLER mit dem Planeten. Die Zeichnungen MÄDLER's zeigen mehr oder weniger ausgedehnte Flecke (nirgends aber die später wahrgenommenen Linienzüge) mit verschwommenem, unscharfem Uebergange in die Umgebung, woraus MÄDLER auf das Vorhandensein einer Atmosphäre auf dem Planeten schliesst. Die Rotationsdauer giebt MÄDLER zu $24^h\ 37^m\ 9^s{\cdot}9$[3]) und später aus der Verbindung der Erscheinungen 1830 und 1832 gleich $24^h\ 37^m\ 20^s{\cdot}4$[4]). Die Richtung der Axe liegt so, dass der Hochsommer der südlichen Halbkugel mit dem Perihel zusammenfällt; da dieses auch die günstigsten Oppositionen sind (im Herbste), so ist es natürlich, dass die südliche Marshemisphäre uns genauer bekannt wird, als die nördliche Halbkugel, die in den Frühjahrsoppositionen gegen die Erde und Sonne zu gerichtet ist, wo der Mars nahe doppelt so weit von der Erde entfernt bleibt. Die Neigung der Axe giebt MÄDLER zu 30° 18′ an.

Insbesondere aber beschäftigte sich MÄDLER mit den Polarflecken; er constatirte schon 1830 die veränderliche Ausdehnung des Südpolarflecks[5]). Derselbe reichte, vom Pole ausgehend:

	1880 Aug. 31	Sept. 10	Sept. 15	Okt. 2	Okt. 5	Okt. 20
bis zur Breite	83° 37′	84° 15′	86° 25′	86° 50′	87° 7′	85° 59′.

Besonders günstig waren die Beobachtungen der Frühjahrsopposition 1837; der Nordpolarfleck war ausserordentlich ausgedehnt; er reichte Januar 12 bis zur Breite 74° 18′ und März 7 bis zur Breite 76°. Gleichzeitig aber hatte auch der Südpolarfleck eine mächtige Ausdehnung erreicht; trotzdem die Südhemisphäre von dem Beobachter weggewendet war, zeigte sich an der Begrenzung noch ein deutlich sichtbares Uebergreifen des Flecks, so dass derselbe mindestens bis zur südlichen Breite von 55° gereicht haben musste.

Die Farbe der Polarflecken ist entschieden weiss gegenüber der mehr röthlichen Farbe der übrigen Oberfläche; das Maximum der Ausdehnung derselben fällt nicht unmittelbar zur Zeit der Solstitien, sondern einige Zeit nach denselben, so dass MÄDLER zu der Annahme geführt wird, »dass wir in diesen weissen Flecken einen unserem Schnee analogen Winterniederschlag auf der Marskugel erblicken«[6]).

Die späteren Beobachtungen von SECCHI, ROSSE, LASSELL, LOCKYER aus den Jahren 1856 lieferten werthvolles Vergleichungsmaterial für spätere Untersuchungen,

---

[1]) Vergl. KAISER, »Untersuchungen über den Planeten Mars bei den Oppositionen in den Jahren 1862 und 1864«, pag. 7. Die letztere Angabe dürfte auf wirklich beobachtete Flecke hindeuten, wenn nicht das im Fernrohr gesehene (umgekehrte) Bild gemeint ist.

[2]) Philosoph. transact. of the R. Soc. für 1781, pag. 136; Connaissance des temps für 1788, pag. 344.

[3]) Beiträge zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper, pag. 113.

[4]) ibid., pag. 117.

[5]) ibid., pag. 114 und 118.

[6]) l. c., pag. 124.

allein wesentliche Aufschlüsse über die Oberflächenconfiguration ergaben dieselben nicht. Erwähnt mag nur die Bemerkung von SECCHI zu seinen Zeichnungen werden[1]): »*La tâche à fig. 2 ajouté à la tâche à fig. 1, constitue une espèce de continent rougeâtre, contourné par un canal bleuâtre. Sur le reste de la surface de la planète on n'a que des continents sans ces canaux et tout le globe est d'une monotonie frappante.*« Allein dieser »Kanal« hat, nach der Beschreibung und Zeichnung zu schliessen, nicht den Charakter der später von SCHIAPARELLI gefundenen Kanäle.

Eine neue Epoche für die Marsuntersuchungen begann mit den Arbeiten KAISER's. Zur Beurtheilung der von ihm benutzten Quellen und der zu überwindenden Schwierigkeiten werden am besten die folgenden Worte KAISER's dienen[2]): »Die Zahl der Abbildungen des Planeten, welche ich bei meinen Untersuchungen benutzen konnte, beträgt 412; bei einer beträchtlichen Anzahl derselben findet man zwischen ihnen so ungeheure Unterschiede, dass man kaum glauben möchte, dass sie denselben Körper darstellen. Diese Unterschiede lassen sich aber theilweise aus ganz natürlichen Ursachen erklären, selbst in der Voraussetzung, dass die Oberfläche des Planeten keinen Aenderungen unterliegt . . . . Die Flecken auf dem Planeten Mars zeigen sich, auch in den günstigsten Fällen, nur in der Mitte seiner Scheibe mit einiger Deutlichkeit und in ihrer wahren Gestalt. Die Flecken, welche den Rändern näher liegen, sind perspektivisch sehr verkürzt, zeigen sich daher nicht in ihrer wahren Form und sind meist unkenntlich. Dieser Uebelstand wird noch durch die Atmosphäre des Planeten sehr beträchtlich vergrössert, deren Undurchsichtigkeit schon an und für sich um so mehr schaden muss, je näher die Flecken den Rändern des Planeten liegen . . . .«

Die Beobachtungen stellte KAISER in den Jahren 1862 bis 1864 an einem Siebenzöller an. Er bemerkt, dass die Entfernung des Planeten keinen so bedeutenden Einfluss auf die Beobachtungen hat, sondern dass die Güte derselben viel mehr von der Beschaffenheit der Luft abhängt, eine Bemerkung, die auch von SCHIAPARELLI bestätigt wird.

Aus seinen Beobachtungen construirte KAISER eine Karte des Mars; trotz der Uebeseinstimmungen, welche im wesentlichen zwischen seinen Zeichnungen und denjenigen von LOCKYER, DAWES und J. SCHMIDT stattfindet, und auf welche er pag. 44 seiner Abhandlung hinweist, sind die Unterschiede dennoch nicht ganz unerheblich; viel grösser aber sind die Uebereinstimmungen zwischen der Karte von KAISER und der viel später angefertigten von SCHIAPARELLI, so dass man die KAISER'sche Karte eigentlich als die erste gelungene Marsaufnahme bezeichnen muss. Insbesondere mag darauf hingewiesen werden, dass der grosse Busen *Nylosyrtis*[3]), dann die drei *Sinus Sabaeus, Margaritifer* und *Aurorae*, sowie die Gegenden *Mare Acidalium* und *Lacus Niliacus* (diese beiden allerdings verbunden), weiter der *Solis Lacus*, der *Ausonius Sinus* und rechts davon das *Mare Sirenum*, *Cimmerium* und *Tyrrhenum*, letztere drei durch die Länder *Atlantis* und *Hesperia* getrennt, bereits der Hauptsache nach richtig wiedergegeben sind. Merkwürdig ist, dass an Stelle des Kanalsystems *Tiphon-Orontes* ein tief dunkler Fleck von derselben Krümmung, aber beträchtlicher Breite vorkommt.

---

[1]) Astronom. Nachrichten, Bd. 49, pag. 74.

[2]) l. c., pag. 24.

[3]) In der Bezeichnungsweise von SCHIAPARELLI.

Zur Bestimmung der Umdrehungszeiten zog KAISER möglichst viele der älteren Beobachtungen heran. Er erhielt durch Vergleichung der Beobachtungen

von BEER u. MÄDLER mit LOCKYER, SECCHI, LASSELL, ROSS u. KAISER $24^h 37^m 22^s\cdot531$
HERSCHEL mit KAISER . . . . 22·622
HUYGENS mit BEER und MÄDLER . . . . 22·676[1]).

Das Mittel dieser drei Werthe ist $24^h\ 37^m\ 22^s\cdot61$.

Die Genauigkeit der abgeleiteten Umdrehungszeit ist jedoch noch keineswegs auf $0^s\cdot1$ zu verbürgen. KAISER bemerkt, dass ein Fehler von 10^m in der Beobachtungszeit bei der Vergleichung der letzten beiden Serien noch einen Fehler in der Umlaufszeit von $0^s\cdot05$ herbeiführt, dass aber die Genauigkeit in der Angabe der Beobachtungszeit, welche einer gegebenen Zeichnung entspricht, keineswegs innerhalb dieser Grenzen liegt, sondern selbst bei sehr guten Beobachtungen noch eine Unsicherheit von einer halben Stunde übrig bleibt[2]).

J. SCHMIDT erhält für die Rotationszeit[3]) den Werth $24^h\ 37^m\ 22^s\cdot6$.

Den Untersuchungen von KAISER folgten dann zahlreiche andere, unter denen insbesondere diejenigen von HARKNESS[4]) PROKTOR, LOHSE[5]), insbesondere aber diejenigen von SCHIAPARELLI hervorzuheben sind.

---

[1]) Nach der Neureduction von VALENTINER; KAISER erhielt irrthümlich $22^s\cdot595$; demgemäss ist das Mittel bei KAISER $22^s\cdot59$.

[2]) ibid., pag. 61 und 80.

[3]) Astron. Nachrichten Bd. 82, pag. 332.

[4]) Monthly Notices of the R. Astron. Soc. Bd. 40, pag. 13 eine Karte in MERKATOR'scher Projektion.

[5]) Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam III. Bd., pag. 75, eine ebensolche Karte. In der Bezeichnung der Gegenden schliesst sich LOHSE hierbei an die von PROKTOR gewählte, indem die Namen von hervorragenden Astronomen, die sich um die Marsbeobachtung besonders verdient gemacht hatten, gewählt werden. Auch TERBY hat in seiner Marskarte von 1874 dieses System beibehalten. In einer späteren Arbeit (Publicationen, Bd. 8) schliesst sich aber LOHSE den seither von SCHIAPARELLI vorgeschlagenen Bezeichnungen an, und behält nur die früher gewählte Bezeichnung »Kaiser-See« bei.

Zur besseren Orientirung mögen hier die hauptsächlichsten der von SCHIAPARELLI eingeführten Namen, soweit dieselben hervorragende Punkte der Marsoberfläche bilden, oder im folgenden erwähnt sind, angeführt werden und zur Vergleichung die auf dieselben Gebilde sich beziehenden Namen von PROCTOR beigefügt werden.

Als Nullpunkt der Länge ist der im Aequator gelegene Punkt *Promontorium Aryn* gewählt. Von hier zieht gegen Südwest der *Sinus Sabaeus* (nach PROCTOR: *Herschel-Strasse)* zum weissen Fleck *Hammonis Cornu* (in 325° Länge, — 10° Breite.) Im Aequator, in der Länge 255° bis 280° ist der helle Fleck (Landschaft) *Lybia*, gegen Süden vom *Mare Tyrrhenum* (nach PROCTOR: *Hook-See)* bogenförmig umschlossen. Das *Mare Tyrrhenum* endigt östlich in der *Syrtis Major* (nach PROCTOR: *Kaiser-See)* in 290° Länge und + 5° Breite, sendet westlich von der Landschaft *Lybia* die *Syrtis Minor* (nach PROCTOR: *Gruithuisen-Bai)* nach Norden und zieht weiter südwestlich bis zur Landschaft *Eridania* (Länge 220°, Breite — 45°). Durch den hellen Streifen *Hesperia*, welcher von *Eridania* zum Aequator reicht, ist das *Mare Tyrrhenum* vom *Mare Cimmerium* (nach PROCTOR: *Maraldi-See)* getrennt, welches nordöstlich bis zur Länge 240° und Breite — 10° und südwestlich bis zu einem Punkte, dessen Länge 200° und Breite — 30° ist, reicht. Von demselben gehen in der Länge 220° die beiden dunkelsten Striche auf der Marsoberfläche: *Cyclops* nach Norden ab.

Südöstlich vom *Sinus Sabaeus*, mit diesem parallel, sind zwei durch einen dunkeln Streifen getrennte helle Flecke: *Deucalionis Regio* und *Pyrrhae Regio*. Der sie trennende dunkle Streifen endigt im Aequator in 20° Länge im *Margaritifer Sinus* (nach PROCTOR: *Beer Bay)*. Südlich vom *Pyrrhae Regio* ist das *Mare Erythraeum* (nach PROKTOR: *De la Rue-Ocean* und

Schon aus seinen Beobachtungen 1877 und 1878 hatte SCHIAPARELLI eine genaue Marskarte angefertigt, indem er eine Reihe von Fixpunkten durch

---

Arago-Strasse), an welches sich nordöstlich in der Länge von 50° und Breite — 15° der *Aurorae Sinus* anschliesst. Durch eine dunkle Linie mit diesem verbunden ist in — 5° Breite und 85° Länge der *Tithonius Lacus*; südlich von diesem die Landschaft *Thaumasia* (nach PROCTOR: der südliche Theil *Kepler Land*, der nördliche *Copernicus Land)*, in deren Länge der *Lacus Solis* (nach PROCTOR: *Terby-See)* in 90° Länge und — 25° Breite liegt. Von diesem ziehen gegen Westen die einfache Linie *Nectar* und gegen Süden die ebenfalls einfache Linie *Ambrosia*.

Südlich von *Syrtis major* liegt die Landschaft *Hellas* (nach PROCTOR: *Lockyer-Land)* in 290° Länge und — 40° Breite, nördlich an das *Mare Hadriaticum* (nach PROCTOR: *Dawes-Ocean)* stossend. In *Hellas* ziehen von der Mitte in der Richtung des Parallels nach Westen die einfache Linie *Peneus* und gegen Norden die ebenfalls einfache Linie *Alpheus*. Nordwestlich von *Hellas*, zwischen dem *Mare Hadriaticum* und dem *Mare Tyrrhenum* ist die Landschaft *Ausonia* und südwestlich, von *Hellas* und *Ausonia* durch den von Südost nach Nordwest verlaufenden und an das *Mare Tyrrhenum* stossenden dunklen Streifen *Eurypus* getrennt, ein heller Fleck: *Chersonnes*, der sich im Westen bis zur Landschaft *Eridania* zieht. Südlich von *Eridania* und *Hellas* ist der *Prometheus Sinus*, der südlich an die Landschaft *Thyle II* (220° Länge, — 65° Breite) grenzt.

Südlich vom *Mare Erythraeum* sind die Landschaften *Noachis* (Länge 340°, Breite — 40°) und *Argyre* (Länge 40°, Breite — 50°), welche im Süden an das, den Südpol einschliessende *Mare Australe* grenzen.

Oestlich von *Thaumasia* ziehen die Landschaften *Icaria* (Länge 120°, Breite — 30°) und *Erynnis* (Länge 150°, Breite — 20°); die letztere wird südlich bogenförmig von dem *Mare Sirenum* umgeben, von welchem sich südlich, von *Icaria* durch den dunklen Streifen *Herculis Columnae* getrennt, die Landschaft *Phaëthontis* (Länge 150°, Breite — 45°) findet, welche noch weiter südlich zur Landschaft *Thyle I* (Länge 160°, Breite — 60°) führt.

Von *Phaëthontis Regio* zieht an der Südostgrenze des *Mare Sirenum* ein lichter Streifen, welcher das letztgenannte *Mare* von einem aus zwei dunkeln Streifen bestehenden: *Atlantis* (nach PROCTOR: *Secchi-Continent)* trennt, welcher südlich an die Landschaft *Electris* (Länge 170° Breite — 40°) stösst, welche durch den dunkeln nahe in der Richtung des Meridians in der Länge 200° verlaufenden einfachen Streifen *Scamander* von *Eridania* getrennt ist.

Die nördliche Hemisphäre ist im Gegensatze zur südlichen von einer Reihe von dunkeln, theilweise doppelten Linienzügen durchsetzt. Hier sind zunächst hervorzuheben: der von *Syrtis Major* nach Norden ziehende Bogen *Nilosyrtis* und der von *Margaritifer Sinus* nach Norden ziehende, ihm ganz ähnliche *Indus*.

Vom Nordende von *Nilosyrtis* (Länge 300°, Breite + 40°) zieht nahe im Parallel nach Osten die Doppellinie *Protonilus* zum *Ismenius Lacus* (Länge 330°, Breite + 40°) und von hier die einfache Linie *Deuteronilus* zum nördlichen Ende des *Indus* (Länge 25°, Breite + 35°) an welchen sich der dunkle Fleck *Niliacus Lacus* (Länge 35°, Breite + 35°) anschliesst.

Vom Nordende des *Nilosyrtis* zieht zum *Sinus Sabaeus* die Doppellinie *Physon*, welche in der Länge 330° und Breite + 10° eine von *Syrtis Major* ausgehende verdoppelte Bogenlinie, *Typhonius*, schneidet, von wo in der Richtung des Meridians zum *Ismenius Lacus* die Doppellinie *Euphrates* zieht. Die Fortsetzung von *Typhonius* zum *Promontorium Aryn* ist eine ebenfalls doppelte Linie, *Orontes*.

Von *Nilosyrtis*, *Syrtis Major*, *Sinus Sabaeus* und *Physon* begrenzt, ist die Landschaft *Aëria* zwischen *Physon*, *Euphrates* und *Protonilus* die Landschaft *Arabia*, zwischen *Euphrates* und *Indus* die Landschaft *Eden*.

Zu erwähnen sind hier wegen des folgenden die von *Syrtis Major* zum *Ismenius Lacus* zugehende einfache Linie *Astaboras*; die vom *Ismenius Lacus* zum *Promontorium Aryn* ziehende einfache Linie *Hidekel* und die vom *Promontorium Aryn* parallel mit *Indus* in der Landschaft *Eden* verlaufende Bogenlinie *Gehon*.

Der *Niliacus Lacus* wird mit dem *Aurorae Sinus* verbunden durch die Doppellinie *Jamuna*; zweiter zieht vom *Niliacus Lacus* gegen Südosten die Doppellinie *Nilokeras* zum *Lacus Lunae* (Länge 65°, Breite + 25°) und von diesem zum *Aurorae Sinus* die Doppellinie *Ganges*, in

Messung festlegte[1]). Als Anfangspunkt *(Vertice d'Aryn)* wählte er den von Mädler mit *a* bezeichneten Punkt, welcher in Länge ungefähr in der Mitte zwischen dem

---

welcher sich im Aequator, in der Länge 60° ein besonders dunkler Fleck, der *Fons Juventutis* befindet.

Vom *Lacus Lunae* zieht nach Osten die Doppellinie *Nilus* bis zu einem Punkte, dessen Länge 90° und Breite + 30° ist; von diesem zieht gegen Südosten die Doppellinie *Gigas*, zum östlichen Ende des *Mare Sirenum* und als Fortsetzung des *Nilus*, die in einem flachen Bogen verlaufende einfache Linie: *Phlegethon* zu einem Punkte, dessen Länge 160°, Breite + 35° ist. Von letzterem Punkte verläuft östlich die Doppellinie *Erebus* und südwestlich zur Landschaft *Thaumasia* die Doppellinie *Periphlegethon*, in welcher in der Länge 130°, Breite + 10° (in dem Schnittpunkte mit *Gigas)* der *Nodus Gordii* liegt, durch welchen auch der vom westlichen Endpunkte des *Mare Sirenum* nahe in der Richtung des Meridians nach Norden liegende *Sirenius*, der nur in dem südlichen Theile verdoppelt ist, geht. Zwischen *Gigas* und *Erebus*, mit beiden parallel, ist noch die Doppellinie *Avernus* zu erwähnen, welche sich gegen Nordwesten als einfache Linie *Titan* fortsetzt.

Die Doppellinie *Erebus* endigt im *Trivium Charontis* (nach Proctor: *Oudemans See)* in 195° Länge und + 20° Breite, von welchem südwestlich eine Doppellinie, bis zum *Gigas Orcus* genannt, von hier ab als Fortsetzung *Eumenides* nach *Thaumasia* führt.

Vom *Trivium Charontis* gehen noch aus: Nach Nordosten die breite Linie *Styx* (Endpunkt in 220° Länge, + 45° Breite); gegen das östliche Ende des *Mare Cimmerium* die Doppellinie *Cerberus*, zum Westende des *Mare Cimmerium* die einfache Linie *Hades*, welche auch über *Trivium Charontis* nach Norden weiter zieht; und nach Südosten gegen das Ostende des *Mare Sirenum* der *Tartarus*.

Nördlich vom *Nilacus Lacus*, von diesem durch den *Pons Achillis* getrennt, ist das *Acidalium Mare*, von welchem gegen Nordwesten (gegen 0° Länge, + 60° Breite gerichtet) *Calirrhoe* abzweigt, und nach Osten in der Breite + 50° die einfache Linie *Tanais* und (von der Länge 120° an) in der Fortsetzung die Doppellinie *Cocythus* zum *Propontis* (Länge 180°, Breite + 45°) führt. Vom *Tanais* zweigt in der Länge 90° nach Süden der *Ceraunius* ab, der den *Nilus* an seiner Vereinigung mit *Gigas* schneidet.

Zwischen *Indus* und *Jamuna* liegt die Landschaft *Chryse*; östlich vom *Ganges* liegen die Landschaften *Ophir*, bis zu dem den *Lacus Lunae* und *Lacus Tithonius* verbindenden einfachen *Chrysorrhoas* reichend, und von diesem weiter östlich *Tharsis* (nach Proctor: *Mädler Continent)*, nördlich davon, von der letzteren durch den *Nilus* getrennt, zwischen *Nilokeras, Nilus*, *Ceraunius* und *Tanais* die Landschaft *Tempe* (nach Proctor: *Rosse-Land)* und östlich von *Ceraunius* die Landschaft *Arcadia*.

In der Region zwischen *Trivium Charontis* und *Nilosyrtis* sind noch zu erwähnen: *Hephaestos* (in 240° Länge + 20° Breite), von welchem gegen Südwesten zum Westende des *Mare Cimmerium* eine Doppellinie: im östlichen Theile, zwischen *Hephaestos* und *Cyclops*, *Eunostes* und in der westlichen Fortsetzung *Antaeus*, zieht. Oestlich von *Cerberus, Trivium Charontis* und *Styx* bis zum *Hephaestos* ist die Landschaft *Elysium* (nach Proctor: *Fontana Land)*.

Südlich von der Landschaft *Lybia* zwischen *Hephaestos* und *Syrtis major* ist ein dunkler Fleck, *Lacus Moeris* (in 275° Länge, + 10° Breite), und in dessen unmittelbarster Nähe ein heller, weisser Fleck (in der Karte durch gestrichelte Begrenzung angedeutet): *Nix Atlantica*.

Von der *Propontis* zieht nahe im Parallel nach Osten, zum östlichen Endpunkte des *Styx* der *Boreas* und von diesem in einem kleinen Bogen zu einem Punkte, dessen Länge 265°, Breite + 40° ist, die breite, einfache Linie *Alcyonius* und von dieser, in der Länge 240°, Breite + 50° abzweigend die beiden einfachen Bogen *Heliconius* und *Boreosyrtis* zum nördlichen Ende von *Nilosyrtis*.

Südlich von *Alcyonius* bis zum *Hephaestos* liegt die Landschaft *Aetheria*, von *Elysium* durch die, den östlichen Endpunkt des *Styx* mit dem *Hephaestos* verbindende einfache Linie *Hybraeus* geschieden, und zwischen *Alcyonius* und *Heliconius* die Landschaft *Utopia*.

Der Nordpol wird vom *Oceanus* umspült.

[1]) »Osservationi astronomiche e fisiche sull' asse di Rotazione e sulla Topografia del pianeta Marte«, Reale Academia dei Lincei 1877—78.

nahe kreisrunden dunkeln, in der Mitte eines grösseren ebenfalls nahe kreisförmigen hellen Fleckes gelegenen *Lacus Solis* und dem ebenfalls nahe kreisförmigen *Hellas* liegt. Bei der Bezeichnung der Gegenden wählte er die auch auf dem Monde üblichen Bezeichnungen (*isola, istmo, canale, penisola, promontorio, Lacus* u. s. w.) nur als kurze Bezeichnungen, um Gleichartiges durch gleichartige Namen zu benennen, ohne aber damit eine Analogie mit irdischen, durch die Namen bezeichneten Gebilde ausdrücken zu wollen. Diese Bezeichnungen wurden aber später als sehr zweckmässig allgemein beibehalten, wobei allerdings später der Bezeichnung »Kanal« eine diesem Begriffe entsprechende Bedeutung beigelegt wurde.

Bezüglich des Polarfleckes kommt SCHIAPARELLI ebenfalls zu dem Resultate, dass er mit der Jahreszeit veränderlich ist, und daher wahrscheinlich durch Condensation von Dämpfen entstanden sein muss, demnach, da die spektroscopischen Beobachtungen von VOGEL auf dem Mars Wasserdämpfe nachgewiesen hatten, Schneeflecke[1]. Dass Mars auch eine Atmosphäre haben muss, war hierdurch sowohl, wie durch das Aussehen der Flecke ausser Zweifel gestellt; insbesondere im Marswinter, d. h. auf der von der Sonne (und in der Opposition daher auch von der Erde) abgewendeten Hemisphäre erscheint die Begrenzung der einzelnen Flecke in Folge dieser Atmosphäre matt und verwaschen.

Die im Verhältniss zu ihrer Länge schmalen Flecke, welche von den meist flächenhaft ausgebreiteten Flecken ausgingen, und welche SCHIAPARELLI Kanäle nannte, wurden lange Zeit von niemandem sonst gesehen. Erst im Dezember 1879 gelang es TERBY dieselben wahrzunehmen, und im Jahre 1881 wurden sie auch in Greenwich beobachtet[2].

In der Opposition 1881 sah SCHIAPARELLI eine weit grössere Anzahl von Details, namentlich in dem System der erwähnten Kanäle. Zum Vergleiche sind die Landschaften *Aeria, Arabia, Eden* und *Chryse* nach der älteren und der neueren Karte in Fig. 387 und 388 wiedergegeben. Besonders auffällig ist die Veränderung bei *Gehon*; der nördliche Theil sendet in der älteren Karte einen in der Länge 350° fast genau in der Richtung des Meridians verlaufenden Zug (*Hidekel*), der in der neuen Karte jedoch fehlt. Besonders aber waren auf der südlichen Marshemisphäre eine grössere Anzahl von Details hervorgetreten. In *Hellas* erschien nebst der schon in der ersten Karte verzeichneten, in der Richtung des Meridians verlaufenden dunkeln Linie *Alpheus* noch ein in der Richtung des Parallels gehender Zug, der *Peneus*; ebenso tritt vom *Lacus Solis* ein im Parallel streichender neuer, dunkler Streifen (*Nectaris*) auf; ferner der von *Ausonia* gegen *Hellas* ziehende nahe im Parallel verlaufende *Euripus*.

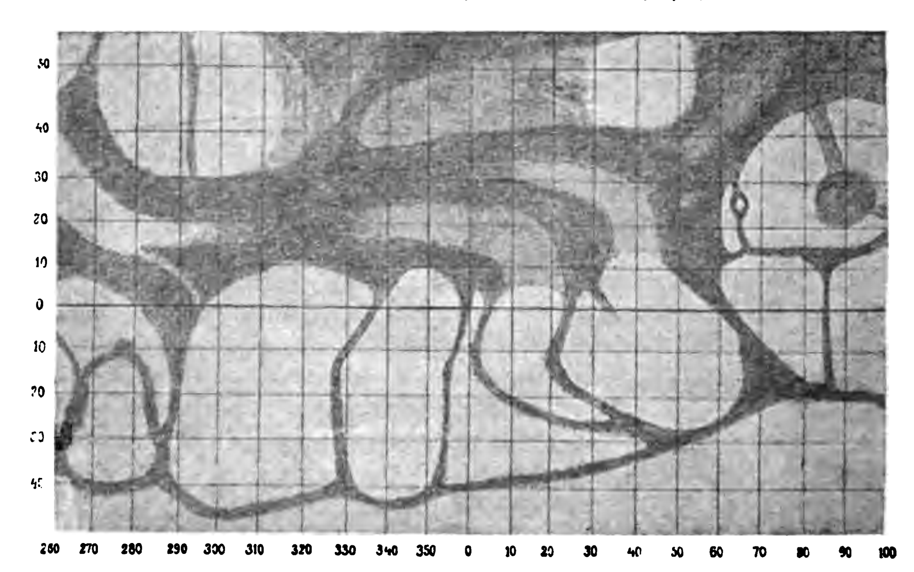
SCHIAPARELLI kommt aber, gemäss dem Gesammtbilde, wenn die neuen Details nur als neu gesehene, nicht aber neu entstandene aufzufassen sind, zu dem Schlusse, dass sich mit Ausnahme von *Hidekel* und dem *Fons Juventutis*, welche verschwunden waren, eine grosse Constanz der Formen zeigt, dass sich aber geringe Veränderungen, mehr oder weniger gute Sichtbarkeit oder Breite einzelner Kanäle, verschiedene Färbung einzelner Gegenden wohl finden, die aber ihre Ursache in der mehr oder weniger grossen Schiefe der Visur haben, welche die Grundformen nicht verändern können. Zu bemerken wäre jedoch, dass in der ersten Karte der Fundamentalpunkt (10) ganz im Festlande liegt; auf der zweiten ist das Mare zwischen *Margaritifer Sinus* und *Aurorae Sinus* herausgerückt, und

---

[1] L. c., pag. 111.

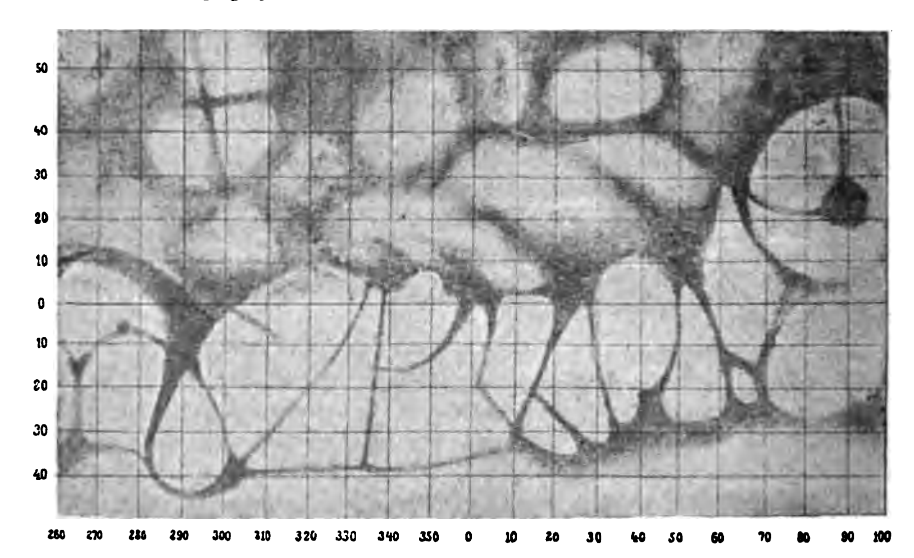
[2] The Observatory 1882, pag. 143.

die etwas hellere *Regio Pyrrhae*, welche auf der ersten Karte mit dem Festlande *Chryse* zusammenhängt, ganz abgedrängt. Bei Punkt (10) geht auf der ersten



Aus der Marskarte von SCHIAPAPELLI.
(Opposition 1878.)
(A. 887.)

Karte der Ganges westlich vom Fundamentalpunkte durch, auf der zweiten Karte östlich; also gleichsam wie eine Ueberfluthung des *Chryse* von Seiten des *Aurorae Sinus*. Auf pag. 59 des zweiten Memoir wird auf diesen Punkt aufmerk-



Aus der Marskarte von SCHIAPARELLI.
(Opposition 1881.)
(A. 888.)

sam gemacht, der Umstand jedoch einer genaueren Aufnahme der zweiten Karte zugeschrieben.

Merkwürdig ist ein weisser Fleck, nordwestlich vom *Lacus Solis*, den SCHIAPARELLI *Nix Olympia* nennt, und den er folgendermaassen beschreibt: »*Era*

bianca, quanta la neve polare, ma estremamente piccola, difficilissima a riconescere[1]).« Dieser Fleck wurde entdeckt am 10. November 1879, gesehen bis 17. November und weiter am 19. und 22. December, also im Ganzen neun Mal; er ist aber weder auf der Karte von 1877 noch auf derjenigen von 1881/2 und wurde auch später nicht wiedergesehen[2]), im Gegensatze zum weissen Flecke *Nix Atlantica* beim *Lacus Moeris*, der in allen drei Karten erscheint.

Eine Veränderung, auf welche SCHIAPARELLI kein besonderes Gewicht legt, wäre noch zu erwähnen. Der *Sirenius* genannte Kanal, welcher das *Mare Sirenum* mit dem *Oceanus* verbindet, erschien wesentlich verbreitert und ebenfalls durch eine helle Linie in zwei Theile getrennt. Diese Erscheinung im Gegensatz zu den Verschmelzungen, welche bei allen anderen Kanälen auftreten, ist wahrscheinlich als eine Verdoppelung des Kanales anzusehen, und derselben Ursache zuzuschreiben, welche in der Opposition 1882 eine ganz ähnliche Erscheinung im *Mare Cimmerium* herbeiführte (s. u.). SCHIAPARELLI bemerkt hierüber:

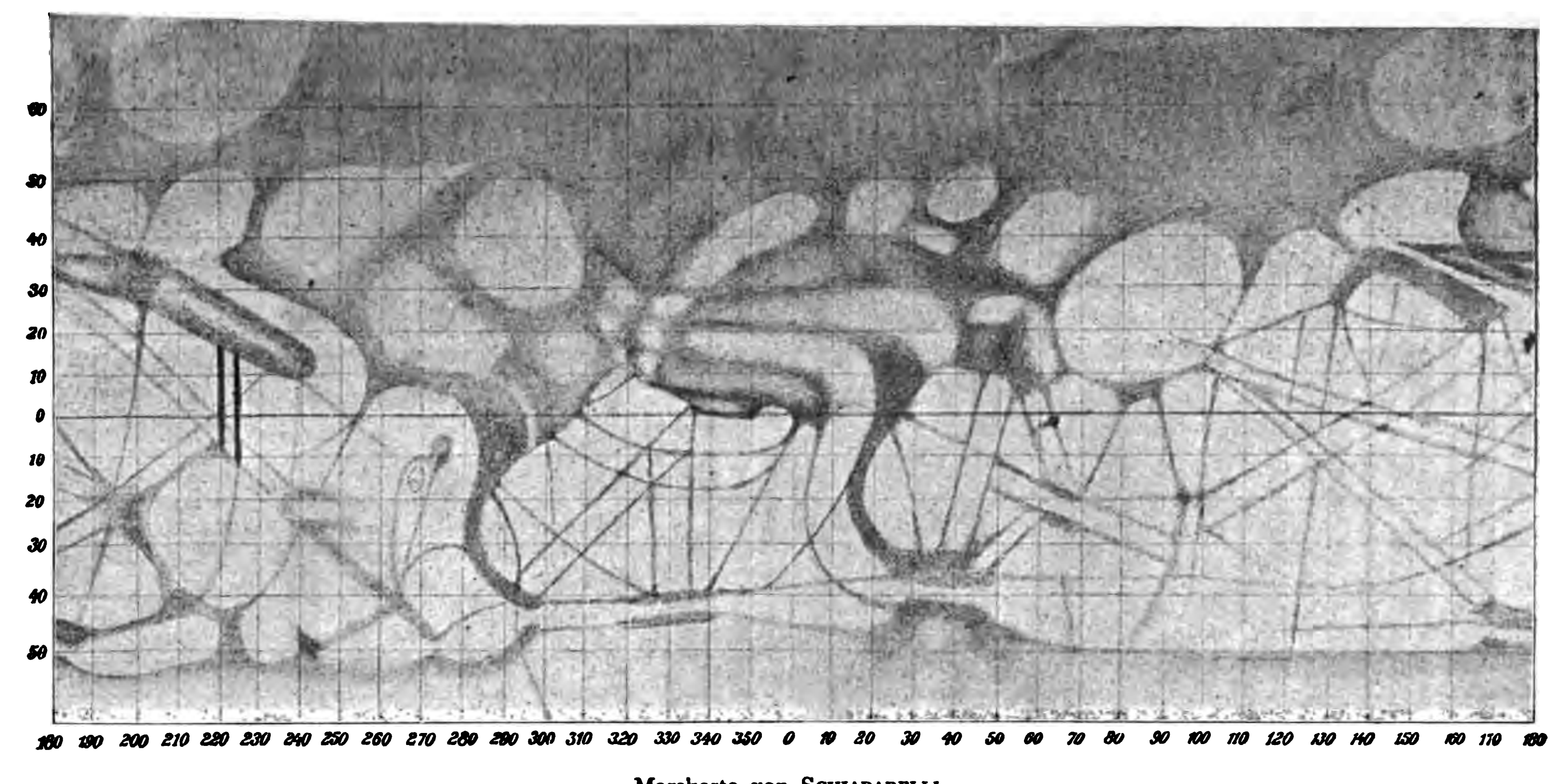
Nelle communi condizioni atmosferiche si allorgave verso il basso in foggia di tromba, come nell' opposizione precedente: se non che, durante le migliori osservazioni che mi sia stato concesso di farne (che furono il 10 a l'11 novembre) questo allorgamento mi parve derivare da una divisione in due rami alquanto divergente, dei quali il piu occidentale scendeva giù diritto all' Oceano, mentre l'altro deviava me poco ad Oriente, per raccogliere un ramo analogo dell Eosforo. In questo luogo lo spazio era certamente di coloie più oscuro, ma non oso decidere, in tanta difficoltà di osservazioni, se quel colore fosse devuto alla confusione ottica e alla vicinanza di più linee scure quasi parallele fra loro, oppere ad una vero diversità di tinta. Questa apparenza fu notata anche il 19 dicembre: ed è certamente degna di essere bene essaminata, perchè qui siamo affato ai limiti della potenza possibile dell' istrumento, dove non è più facile rendersi conti essato di ciò che si è veduto[3]).

Erwähnt muss noch werden, dass in dieser Opposition der südliche Polarfleck gesehen wurde, also die Visirlinie mehr normal gegen die südliche Hemisphäre *(Thaumasia, Hellas, Mare Sirenum)* gerichtet war.

In der Opposition 1882 *(Memoria terza)* waren die atmosphärischen Verhältnisse vorzüglich, so dass fast ausschliesslich die stärkste Vergrösserung von 417 angewendet werden konnte. Mars hatte grosse nördliche Deklination und wandte seine nördliche Hälfte der Erde zu, so dass auf dieser ein grosser Reichthum von Details hervortrat. *Hidekel* und *Fons Juventus* wurden wiedergefunden; zwischen dem *Ceraunius Sinus* und *Alcyonis Sinus* wurden eine Menge neuer Linien gefunden, und gleichzeitig trat die seither so vielbesprochene Verdoppelung der Kanäle (Vergl. die Karte Fig. 389) auf. »*Le vaste estensioni dette Oceano e Golfo Alcionio, che nel 1879 apparivano come sfumature indeterminate, e che sembrava dovessero appartenere alle arce dette mari si risolvettero in viluppi complicatissimi di pure linee. Allora si venne pocco a pocco urlando il fatto curioso ed impreveduto della geminazione dei cosidetti canali, il quale probabilmente narrà mutare d'assai le opinioni correnti sulla costituzione fisica del pianeta*[4]).

Der erste doppelt gesehene Kanal war *Protonilus*, der am 12. November 1881 noch einfach gesehen worden war, am 19. December 1881 verdoppelt[5]). Der

[1]) l. c., zweite Abhandlung, pag. 75.
[2]) Vergl. Memoria terza, pag. 48.
[3]) Memoria seconda, pag. 74.
[4]) Memoria terza, pag. 4.
[5]) ibid., pag. 89.



Marskarte von SCHIAPARELLI.
(Opposition 1882)
(A. 389.)

letzte noch einfach gesehene Kanal war *Sirenius*, der aber schon in einer früheren Opposition durch eine helle Linie getrennt war (s. o.), der noch am 12. Februar 1882 einfach zu sehen war, am folgenden Tage ebenfalls verdoppelt.

Die Verdoppelungen zeigten eine fast geometrische Regelmässigkeit[1]), nämlich genau parallele Linienzüge; eine sonstige Gesetzmässigkeit der Erscheinung zeigte sich nicht, weder nach der areographischen Breite noch nach der Länge, noch nach der Richtung. Bezüglich der Breite unterscheidet SCHIAPARELLI zwei Arten: 1) Solche, bei denen die Breite des Zwischenraumes viel grösser ist, als ihre sehr geringe Dicke; bei diesen erscheinen die einzelnen Componenten in dunkler Farbe, fast schwarz; und 2) solche, bei denen die Componenten breit sind[2]) ohne dass sich jedoch eine strenge Grenze zwischen den beiden Gruppen ziehen liesse. In die erste Klasse gehören: *Physon*, *Euphrates*, *Jamuna*, *Avernus*, *Orcus Antaeus*, in die zweite *Ceraunius*, *Gigas*, *Eumenides*, *Eunostes*, *Hephaestos*.

Im *Mare Cimmerium*, welches SCHIAPARELLI seit 22. November 1881 beobachtet hatte, sah er am 3. Februar mitten im Mare eine Insel[3]). Der Anblick der beigegebenen Karte von SCHIAPARELLI (Fig. 389) zeigt, dass man es hier auch wahrscheinlich mit einer Verdoppelung zu thun hat, da diese Insel als ein Längsstreifen nahe parallel der Richtung des Aequators das ganze Mare durchsetzt.

In der Richtung des Parallels verlaufende Streifen traten auch in dieser Opposition, diesmal auf der südlichen Hemisphäre hervor. In *Electris* traten zwei derartige Streifen auf, der breitere im Parallel, der zweite nahe dem Parallel; ferner ein Streifen in *Argyre* nahe dem Parallel[4])

Die Verdoppelung der Marskanäle wurde wieder lange Zeit nur von SCHIAPARELLI beobachtet. CHRISTIE und MAUNDER widersprachen direkt; die Greenwicher Beobachtungen von 1882 bestätigten die Karte von SCHIAPARELLI von 1879, »*but they seem to be distinctly in opposition to this most recent map*[5]).« Sie hielten die Beobachtungen von SCHIAPARELLI für optische Täuschungen. Im Jahre 1886 aber konnten PERROTIN und THOLLON[6]) die Beobachtungen von SCHIAPARELLI bestätigen. Ihre anfänglichen Beobachtungen vom 6. März bis 15. April lieferten ein negatives Resultat; am 15. April wurden zum ersten Male die Kanäle westlich von *Syrtis major* doppelt gesehen, und von diesem Tage eine Reihe von Kanälen ganz im selben Charakter, wie SCHIAPARELLI sie darstellt: »*Plusieurs de ces canaux sont doubles et composées de lignes rigoureusement parallèles*[7])« und sie schliessen: »*Cette étude, bien qu'incomplète, nous permet de considérer nos observations comme la confirmation des belles découvertes de M. Schiaparelli sur la singulière constitution physique de Mars*[8]).«

PROCTOR hatte noch 1888 diese Kanäle als der Wirklichkeit nicht entsprechend angesehen; auf seiner Karte von 1888[9]) ist auch nichts davon zu sehen; doch finden sich auf derselben eine Reihe von Linien, die in ihrer Art viel Phantasie verrathen: er zeichnet sie, wie die Flüsse auf der Erde: im Ursprunge dünn, an der Mündung viel dicker.

---

1) ibid., pag. 92.
2) ibid., pag. 91.
3) ibid., pag. 53.
4) Besonders zu bemerken wären noch die beiden schwarzen Striche *(bastoni neri) Cyclops*.
5) The Observatory 1882, pag. 143.
6) Bulletin Astronomique Bd. III, pag. 325.
7) ibid., pag. 325.
8) ibid., pag. 329.
9) Monthly Notices of the R. A. S. Bd. 48, pag. 307.

Eine neuerliche Bestätigung brachte die Opposition im Jahre 1888. SCHIAPARELLI sah am 8., 9. und 10. Mai *Erebus*, *Titan*, *Avernus*, *Antaeus*, *Eunostes*, *Gigas*, welche er alle 1881 doppelt gesehen hatte, einfach, ebenso *Jamuna* und *Ganges*, aber so, dass sie an den Rändern etwas dunkler waren[1]. Vom 2. Juni angefangen jedoch sah er wieder die meisten verdoppelt; *Typhonius*, *Orontes* aber einfach. Doppelt sah er ferner die früher einfach gesehenen: *Laestrygon*, *Nepenthes*, *Astaboras*, *Heliconius*, *Calirrhoë*[2]. Auch PERROTIN sah 1888 einen Theil der Marskanäle von 1886 wieder; einige einfach, einige verdoppelt; im allgemeinen blieb der Charakter derselbe, wenn auch einzelne schwächer, andere dafür stärker auftraten. Von besonderen Veränderungen erwähnt er, dass der Continent *Lybia* verschwunden war, und dass nördlich von demselben in der Breite von + 25° ein Kanal parallel zum Aequator aufgetreten war[3].

In der Opposition 1890 sah SCHIAPARELLI am 16. Mai *Phison*, *Euphrates*, *Orontes* einfach, dagegen die nördlich davon gelegene Gegend etwas verändert: der einfache *Euphrates* hatte eine starke, deutlich hervortretende dunkle Verlängerung durch den *Lacus Ismenius*; am 9. Juni 1890 sah SCHIAPARELLI den *Lacus Solis* gespalten; ebenso den *Lacus Tithonius* in zwei Flecke zerlegt (beide durch meridional verlaufende Theilungslinien in einen östlichen und westlichen Theil). In dem Festland *Thaumasia* waren die beiden Kanäle *Ambrosia* und *Nectar* verschwunden und an deren Stelle war eine Reihe anderer getreten, unter denen die merkwürdigsten Verbindungskanäle zwischen dem *Lacus Solis* und *Tithonius* waren.

STANLEY WILLIAMS sah 1890 43 Kanäle, unter diesen aber nur 6 verdoppelt: *Nilokeras*, *Cerberus*, *Erebus*, *Titan*, *Euphrates* und *Gigas*.

Hierzu mag noch die Bemerkung von SCHIAPARELLI[4] erwähnt werden, dass die Verdoppelung der Kanäle in verhältnissmässig kurzer Zeit und in schnellem Wechsel stattfindet, und endlich, was man leicht durch die Berücksichtigung der Stellung der Marsaxe findet, dass das Auftreten dieser Verdoppelungen von der Lage der Marsaxe gegen die Erde abhängt, indem dieselben am deutlichsten dort auftreten, wo die Visur von der Erde die Marsoberfläche möglichst normal trifft.

Von den Erklärungsversuchen mögen nur drei erwähnt werden: derjenige von FIZEAU[5], welcher die Kanäle für den Moränen der grossen Gletscher ähnliche Gebilde hält; eine aus Andeutungen von SCHIAPARELLI entstandene und ziemlich allgemein verbreitete Meinung, wonach aus der grossen Regelmässigkeit (dem Parallelismus) der Kanäle auf die Möglichkeit geschlossen wird, dass dieselben Kunstprodukte einer vorgeschrittenen Civilisation wären und endlich die Ansicht von CERULLI, der die Marskanäle als Truglinien ansieht, und deren Entstehung auf das Bestreben des Auges zur Construction möglichst einfacher Configurationen zurückführt[6].

---

[1]) Ciel et Terre 1888 August 14.

[2]) Die Zeichnungen von HOLDEN, SCHÄBERLE, KEELER aus der Opposition 1888 zeigen so bedeutende Veränderungen selbst im Laufe weniger Stunden, dass an einen Einfluss der terrestrischen oder Marsatmosphäre gedacht werden muss.

[3]) Comptes rendus vom 14. Mai 1888.

[4]) Himmel und Erde I. Bd., pag. 96.

[5]) Compt. rend. 25. Juni 1888.

[6]) Astronom. Nachrichten, No. 3490.

PICKERING protestirte 1890 gegen den Namen »Kanäle«, äussert aber selbst keine Meinung.

Ein einfacher Versuch führt dazu, dass diese sogen. Marskanäle in der That wahrscheinlich keine Kanäle, sondern Bergzüge, und zwar einfache Bergzüge sind, welche sich durch ein Refractionsphänomen verdoppelt darstellen.

Bringt man in einem vollständig verdunkelten kleinen, mit einem stark brechenden Medium gefüllten Kämmerchen in einer Wand ein Fensterchen an und befestigt an der gegenüberliegenden Wand ein Relief, beleuchtet man dieses Relief von aussen und sieht in das Fenster, also nahe normal zum Relief, so werden kleine Erhebungen, so wie Bergadern, je nach der Albedo verschieden hell erscheinen, und es werden die glänzenden Stellen von dunklen Streifen umrandet, also die Bergadern von dunklen Linien umsäumt erscheinen.

Dieser Versuch ist nicht neu; er ist leicht anzustellen und giebt alle Details, welche bei der Marsbeobachtung im Laufe der Jahre auftreten, im Zeitraum von wenigen Stunden bei der Beobachtung des Augenhintergrundes mit dem Augenspiegel.

Der Anfänger sieht hierbei zunächst — nichts; sodann ein verwaschenes Bild von Flecken und Streifen; allmählich mit wachsender Uebung treten in klaren Augenmedien (normalen Augen) die Details des Augenhintergrundes immer deutlicher hervor: die Sehnervenpapille mit ihrer scharfen Begrenzung und den austretenden Gefässen, den Hauptstämmen der Centralarterie und Centralvene; dann allmählich erst die helleren Arterien und dann auch die dunkleren Venen in der Form von durch scharfe, helle Streifen getrennten, verschieden dunklen Doppellinien. Ein veränderter Anblick bietet sich in zwei[1]) für diese Betrachtungen zu erwähnenden Fälle dar: a) Bei Trübungen der Augenmedien (beginnendem Linsenstaar, Hornhaut- oder Glaskörpertrübungen u. s. w.) werden natürlich die Details verwaschen, undeutlich, theilweise auch unsichtbar. b) Bei allgemeiner Gefässverengerung (z. B. bei Glaucom, bei Stauungspapille u. s. w.) werden die stark verengten Gefässe als einfache Linien gesehen.

Da nun aber die Gefässe, wie der anatomische Befund lehrt, einfach verlaufende Stämme sind, deren Verdoppelung daher nur als eine optische Erscheinung aufgefasst werden kann, so kann man auch für den Mars annehmen, dass der verhältnissmässig parallele Verlauf der sogen. Kanäle nur eine optische Erscheinung ist, nämlich das Auftreten eines glänzenden Kammes auf einfachen Bergadern.

Die für das Zustandekommen dieser Erscheinung nöthigen Bedingungen sind:

1) Nebst guten Instrumenten auch eine hinreichende Uebung, die erst durch wiederholte Beobachtung eines bereits wiederholt gesehenen und ziemlich gut bekannten Objectes erlangt werden kann (Schärfung der Sinne für die Wahrnehmung von Details), wie denn auch z. B. auf der MÄDLER'schen Mondkarte noch die meisten Berge und Wälle kreisförmig sind, wo später immer zahlreichere Unregelmässigkeiten hervortraten.

2) Klare und ungetrübte Medien, die die Lichtstrahlen zu passiren haben.

---

1) Natürlich ausgeschlossen die für diese Erklärung belanglosen localen Veränderungen bei Sehnerven-, Netzhaut- oder Aderhautentzündungen u. s. w.

3) Die nahe senkrechte Incidenz und Reflexion, welche sich in der Abhängigkeit des Auftretens der Verdoppelungen von der Stellung der Marsaxe gegen den Beobachter manifestirt.

4) Eine genügende Dichte oder Dicke des brechenden Mediums, durch welches die von den beiden Abhängen reflektirten Lichtstrahlen so abgelenkt werden, dass sie von Punkten zu kommen scheinen, welche von dem Gipfel weiter entfernt sind, wodurch eben die Abhänge weniger hell erscheinen. (Vergl. die Beobachtung von *Jamuna* und *Ganges* im Jahre 1888 als Uebergangsstadium zur vollständigen Verdoppelung).

5) Eine gewisse Höhe des Reliefs, welche für eine genügend starke Ablenkung der von den Abhängen kommenden Strahlen nöthig ist. Nimmt man die Grösse des Augapfels zu 24 *mm* und die Dicke der Gefässe, welche noch deutlich doppelt gesehen werden, zu 50 μ, so würde daraus folgen, dass zu dieser Erscheinung eine Erhebung von etwa $\frac{1}{500}$ des Durchmessers nöthig wäre. Da der Marsdurchmesser etwa 6500 *km* beträgt, so würde sich daraus eine muthmaassliche Höhe der Bergzüge gleich $\frac{6500}{500} = 13$ *km* ergeben.

Endlich folgt hieraus, dass der Mars wahrscheinlich von einer ziemlich dichten Atmosphäre umhüllt ist.

Man wird unschwer in dem oben erwähnten Auftreten von dunklen Linien parallel zum Aequator, in der Erscheinung, welche der *Lacus Solis* und *Lacus Tithonius* und deren Umgebung im Jahre 1890 darboten, eine Folge der durch die geänderte Stellung der Marsaxe bedingten Beleuchtungsänderungen erkennen.

Unter der hier gegebenen Annahme erscheint auch vielleicht *Deucalionis Regio*, nebst deren Verlängerung: dem weissen Streifen zwischen *Gehon* und *Indus* als ein glänzender Kamm; ebenso die Festländer *Atlantis* und *Hesperia* u. a., welche übrigens bereits in der ersten Opposition 1877 von Schiaparelli in dieser Form gesehen worden waren.

Hier muss auch einer Veränderung gedacht werden, welche Schiaparelli 1894 am *Mare Sirenum* bemerkte. Nachdem dasselbe zwischen 1892 bis October 1894 stets den normalen Anblick dargeboten hatte, zeigte es sich am 8. October 1892 durch eine Linie getrennt, die auch wieder am 21. November 1894 sichtbar war. »*Questo fatto et altri analoghi da me veduti nelle passate opposizioni conducono a concludere, che le variazioni anormali delle macchie di Marte non succedono a caso e senza regola, che anzi la medesima variazione puo riprodersi con aspetto identico auche doponu lungo intervallo di tempo*[1]).

Die Deutung der übrigen auf dem Mars constatirten Oberflächenverschiedenheiten hängt nun wesentlich von dem bereits erkannten Vorhandensein einer Atmosphäre ab. Obwohl es nicht ausgeschlossen ist, dass auch feste Körper zur Bildung einer ausgedehnten und ziemlich dichten Atmosphäre Veranlassung geben können, so bleibt es wahrscheinlicher, dass eine solche durch flüssige Körper erzeugt wird. Da nun auch spectroskopisch Wasserdämpfe nachgewiesen sind, so wird man die Verschiedenheit der Helligkeit in verschiedenen Marsgegenden in der That auf Festland und Meere zurückführen können, wodurch die als Mare bezeichneten Gebiete wahrscheinlich wirklich mit irdischen Meeren vergleichbar sind.

Auch die erwähnten Veränderungen des Mars, namentlich der so veränderliche Anblick, welchen verschiedene Darstellungen des Mars im Verlaufe weniger Stunden zeigen (wie dies von den erwähnten Zeichnungen von Holden, Schäberle

---

[1]) Astron. Nachr. Bd. 137, pag. 100.

u. s. w. gilt), mögen ihren Grund in zeitweise durch die Marsatmosphäre bedingten Veränderungen ihren Grund haben. Doch sind wirkliche Veränderungen keineswegs auszuschliessen, im Gegentheil auch schon mit grosser Wahrscheinlichkeit constatirt worden. Eine der auffälligsten war das Verschwinden des Südpolarfleckes Ende October 1894 und das Wiedererscheinen desselben im Juni 1895[1]).

Vermuthungen über Marstrabanten hatte bereits KEPLER im Anschlusse an die von GALILEI mit dem Fernrohre gemachte Entdeckung der Jupitersatelliten geäussert. Diese Vermuthungen kehrten später immer wieder, oft auch in Form von ganz bestimmten Behauptungen; dahin gehören z. B. die Angaben in »Gullivers Reisen« 1755[2]). Es erscheint vielleicht für einen Augenblick merkwürdig, dass dort die Entfernungen derselben vom Hauptplaneten 3 bezw. 5 Marsdurchmesser angegeben sind, während eine blosse Vermuthung nach Analogie mit dem Erdmonde oder wenigstens mit den Jupitermonden auf weit grössere Bahnhalbmesser hätte führen müssen. Theilweise giebt jedoch die Anwendung der KEPLER'schen Gesetze hierüber Aufschluss. Mit Rücksicht auf die Geringfügigkeit der Marsmasse müssten Marsmonde in einer Entfernung von 5·7′ bereits 16 Tage Umlaufszeit haben, in der Entfernung von 30′·8 schon 200 Tage[3]). In der Opposition 1865 suchte d'ARREST mit dem $10\frac{1}{2}$zöller der Kopenhagener Sternwarte in der Umgebung des Mars und fand keinen Trabanten, obgleich ihm nach seiner Meinung Objecte bis zu 12. Grösse nicht entgangen sein konnten[4]). Mit dem CLARK'schen Refractor von 66 *cm* Oeffnung entdeckte HALL in der Herbstopposition am 19. August 1877[5]) zwei Marsmonde, für welche HALL nach dem Vorschlage von MADAN die Namen Phobos und Deimos wählte. Die ersten Elemente wurden von NEWCOMB gerechnet; er fand die Umlaufszeit für Phobos $7^h\,38^m\,5$, für Deimos $30^h\,14^m$; HALL berechnete aus seinen Beobachtungen die Umlaufszeiten 0·31894 bezw. 1·26250 Tage, d. i. $7^h\,39^m{\cdot}3$ bezw. $30^h\,18^m\,0$.

Die Entfernungen sind nach den Rechnungen von PRITCHETT für Phobos 12″·77 und für Deimos 32″·91.

Störungen wurden berechnet von MARTH[6]) und von ADAMS[7]).

PICKERING schloss aus der Grösse der Satelliten auf den Durchmesser von etwa 10 *km*.

Bemerkenswerth ist, dass der innere Satellit für einen Beobachter auf dem Mars im Westen aufgeht und im Osten untergeht; denn da die stündliche Bewegung des Mars nur 14°·62 beträgt, so bleibt derselbe stündlich 32°·44 zurück, der zweite eilt 2°·74 vor; folglich ist die synodische Umlaufszeit des inneren Trabanten in der Richtung Ost-West 11·1 Stunden; er kann also unter Umständen zweimal des Tages aufgehen. Die synodische Umlaufszeit des zweiten ist 131·4 Stunden oder $5\frac{1}{3}$ Marstage.

---

[1]) Astron. Nachr. No. 3374.

[2]) Vergl. die Bemerkung von v. OPPOLZER in den Astron. Nachr. Bd. 91, pag. 303.

[3]) Vergl. d'ARREST in den Astron. Nachr. Bd. 64, pag. 74.

[4]) Später wurden dieselben allerdings auch mit kleineren Instrumenten gesehen, so von ERCK in Sherington am 8. September 1877 mit einem Fernrohr von 17·8 *cm* Oeffnung.

[5]) Compt. rend. Bd. 85, pag. 437; Astron. Nachr. Bd. 90, pag. 190; Monthly Notices Bd. 37, pag. 443.

[6]) Astron. Nachr. Bd. 95, pag. 369.

[7]) Monthly Notices Bd. 40, pag. 10.

Jupiter.

Jupiter ist der grösste der Planeten, und nächst Venus der hellste. Dass derselbe eine merkliche Abplattung besitzt, wurde schon frühzeitig beobachtet. DOM. CASSINI bestimmte sie zu $\frac{1}{15}$, SCHMIDT $\frac{1}{15\cdot6}$. Etwas abweichend ist der Werth von KAISER $(\frac{1}{17\cdot11})$; SECCHI erhielt $\frac{1}{16\cdot01}$. Die Werthe des Aequatorealhalbmessers (reducirt auf die Entfernung 1) schwanken zwischen 18''·8 und 19''·4; diejenigen des Polardurchmessers zwischen 17''·6 und 18''·2. SCHUR erhielt 1891 für $a = 37''\cdot428$, $b = 35''\cdot020$, die Abplattung $\frac{1}{15\cdot54}$ [1]). In den »Astron. Nachr.« Bd. 141, pag. 234 giebt SCHUR die folgende Zusammenstellung [2])

	a	b	Abplattung
BESSEL 1833/34 (Königsberger Beobachtungen Bd. XIX, pag. 102)	37''·66	35''·24	1 : 15·6
JOHNSON 1850/1 (Radcliffe Observatory 1850, pag. 293)	37·31	35·11	1 : 16·9
WINNECKE 1857 (Bonner Heliometer)	37·39	35·20	1 : 17·1
MAIN 1869, 1874 (Radcliffe Observatory 1869, pag. 317; 1874, pag. 240)	37·14	34·94	1 : 10·9
BELLAMY 1874/5 (Radcliffe Observatory 1874, pag. 240)	37·19	35·02	1 : 17·1
SCHUR 1891—1896	37·42	35·10	1 : 16·2
welchen Messungen noch die Resultate KAISERS aus den Jahren 1856—62 hinzuzufügen sind, nämlich	37·67	35·49	1 : 17·11

und zieht daraus das Mittel $a = 37''\cdot40$; $b = 35\cdot16$; Abplattung gleich $\frac{1}{15\cdot8}$.

SCHRÖTER und HARDING haben mehrere Male eine unregelmässige Abplattung des Jupiter, d. h. eine Abweichung von der elliptischen Gestalt zu sehen geglaubt. Dasselbe beobachtete STRUVE am 7. März 1876; allein er fand dieses durch mikrometrische Messungen nicht bestätigt [3]). Besondere Untersuchungen stellte hierüber SCHUR 1891 an [4]); er maass den Durchmesser in acht verschiedenen Positionswinkeln; es zeigten sich wohl Abweichungen in den Messungen, die eine Gesetzmässigkeit verriethen; doch deuteten dieselben auf eine Abhängigkeit von der Auffassung des Beobachters je nach der Lage des Aequators gegen die Horizontale, nicht aber eine Abweichung von der Ellipticität.

Die älteste Massenbestimmung rührt von NEWTON her; er fand aus den Trabantenabständen $\frac{1}{1100}$; LAPLACE fand für die Masse $\frac{1}{1067\cdot09}$; GAUSS erhielt aus den Störungen der Pallas, NICOLAI aus denen der Juno $\frac{1}{1053\cdot924}$ [5]); ENCKE aus den Störungen des seinen Namen tragenden Kometen $\frac{1}{1054\cdot4}$ und aus einer späteren Berechnung $\frac{1}{1048\cdot69}$ [6]). AIRY erhielt aus den Beobachtungen der Elongationen der vier Satelliten in Greenwich $\frac{1}{1045\cdot4}$. BESSEL leitete den Werth $\frac{1}{1047\cdot788}$ ab, von welchem der von MÖLLER aus den Störungen des FAYE'schen Kometen $\frac{1}{1047\cdot879}$ nicht sehr verschieden ist. Etwas grössere Werthe erhielt KRUEGER aus den Störungen der Themis: $\frac{1}{1047\cdot538}$ [7]) und SCHUR aus den Mes-

---

[1]) Astron. Nachr. Bd. 129, No. 3073.

[2]) Der MÄDLER'sche Werth $\frac{1}{20\cdot03}$ (»Beiträge zur physischen Kenntniss der Himmelskörper«, pag. 105/6) ist entschieden zu klein.

[3]) Astron. Nachr. Bd. 5, pag. 16.

[4]) Astron. Nachr. Bd. 129, pag. 14.

[5]) Berliner Astron. Jahrb. für 1826, pag. 226.

[6]) Astron. Nachr. Bd. 9, pag. 339, und Bd. 14, pag. 332.

[7]) Astron. Nachr. Bd. 81, pag. 334.

sungen der Trabantenabstände $\frac{1}{1047\cdot282}$[1]). HILL erhielt aus den Störungen des Saturn $\frac{1}{1047\cdot381}$, NEWCOMB aus den Störungen des Planeten Polyhymnia $\frac{1}{1047\cdot84}$. KEMPF aus den Messungen der Satellitenabstände von AIRY und VOGEL $\frac{1}{1047\cdot610}$. Insbesondere die zuletzt erhaltenen Werthe deuten entschieden auf die Nothwendigkeit einer Vergrösserung der bisher verwendeten BESSEL'schen Jupitermasse. Zieht man das Mittel, so erhält man $\frac{1}{1047\cdot609}$. Der von NEWCOMB gezogene Mittelwerth $\frac{1}{1047\cdot85}$ scheint wohl zu gross, wie auch die von v. HAERDTL abgeleitete Jupitermasse $\frac{1}{1047\cdot17}$ von den übrigen zu weit abweicht.

Die Dichte des Planeten ist sehr gering, ist aber jedenfalls an der Ober fläche noch geringer, da die Dichte nach dem Innern zu zunimmt. (Vergl. den Artikel »Mechanik des Himmels«, II. Bd., pag. 551).

DOM. CASSINI sah 1665 einen Fleck, der bis 1692 sichtbar blieb, und aus dem er die Rotationszeit gleich $9^h\,55^m\,58^s$ ableitete. SCHRÖTER erhielt anfänglich (1785/86) merkwürdiger Weise eine viel kürzere Umlaufszeit ($6^h\,57^m$), später aber nahe denselben Werth wie CASSINI, nämlich $9^h\,56^m\,33^s$. BEER und MÄDLER erhielten aus zwei gut begrenzten Flecken aus Beobachtungen in der Zeit zwischen 4. November 1834 bis 22. Januar 1835: $9^h\,55^m\,30^s{\cdot}08$, aus der Zwischenzeit zwischen 9. Februar 1835 und 19. April 1835 den kleineren Werth $9^h\,55^m\,26^s{\cdot}53$, was nur durch eine Bewegung der Flecke auf der Planetenoberfläche erklärt werden kann[2]). Auf den Umstand der verschiedenen Rotation verschiedener Flecke machte aber in überzeugender Weise erst J. SCHMIDT 1865 aufmerksam, indem er dabei auch auf die Verschiedenheit der Rotationszeit in verschiedenen Breiten Rücksicht nahm[3]). Er war allerdings nicht der erste, der diese Thatsache erkannte, denn SCHRÖTER weist in seinen »Beiträgen zu den neuesten astronomischen Entdeckungen, Berlin 1788« schon darauf hin, dass CASSINI für verschiedene Breiten verschiedene Rotationszeiten erhielt. Allein erst SCHMIDT[4]) und nach ihm OUDEMANS[5]) hatten sich mit der Frage in systematischer Weise beschäftigt.

Die verschiedene Rotationszeit ist natürlich nur erklärlich dadurch, dass die Flecke gegeneinander den Ort wechseln[6]), was wieder nur möglich ist, wenn die Flecke oder wenigstens ein Theil derselben als wolkenartige Gebilde in einer den Planeten einhüllenden Atmosphäre angenommen werden. Die Geschwindigkeit der Flecke ist gemäss der Rotationsdauer zwischen 13·05 und 13·17 *km*; der Unterschied beträgt daher 120 *m* in der Secunde, und zwar im Aequator beschleunigt. SCHRÖTER erklärte diese Beschleunigung durch Passatwinde in den oberen Regionen.

---

[1]) Astron. Nachr. Bd. 104, pag. 83.

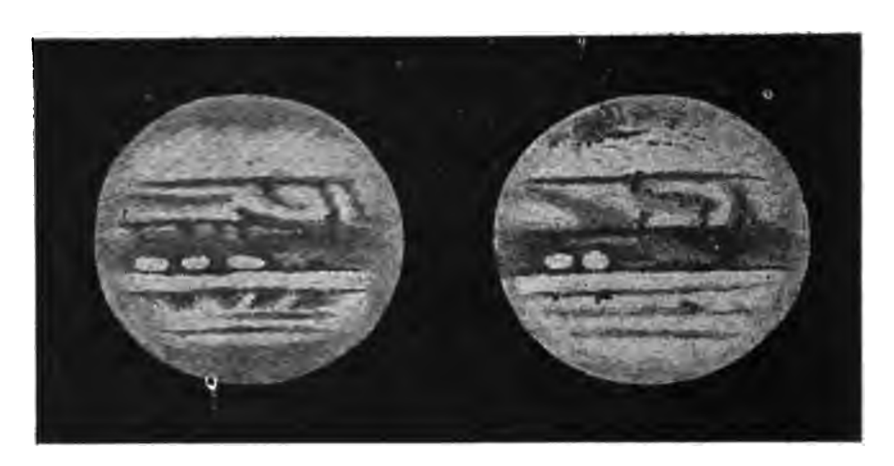
[2]) Astron Nachr. Bd. 12, pag. 265.

[3]) Astron. Nachr. Bd. 65, pag. 81.

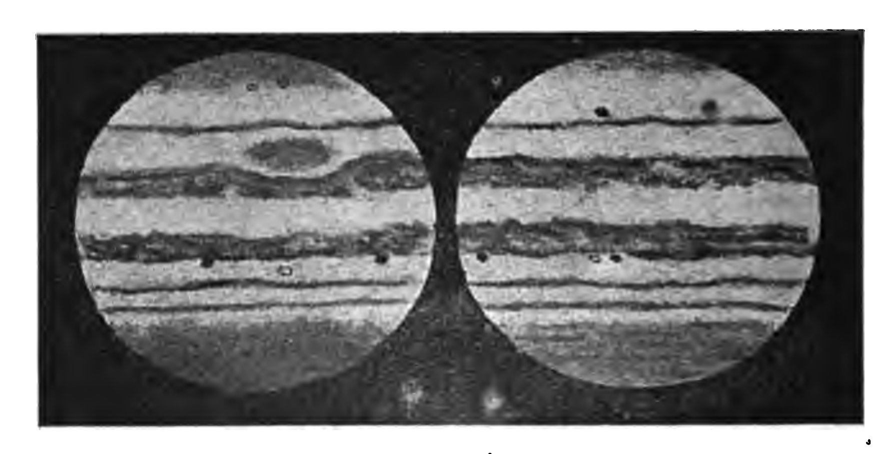
[4]) Vergl. die Untersuchungen von SCHMIDT in den Astron. Nachr. Bd. 65, pag. 85, Bd. 68, pag. 289, Bd. 83, pag. 71, und insbesondere Bd. 99, pag. 1.

[5]) Astron. Nachr. Bd. 143, No. 3401.

[6]) Die Fig. 390—392 geben Beobachtungen des Jupiter zu verschiedenen Zeiten; die Fig. 390 Beobachtungen von LOHSE in Bothkamp 1871 December 21, $10^h\,42^m$ und December 24 $18^h\,16^m$ nach »Beobachtungen der Sternwarte zu Bothkamp«, II. Heft; Fig. 391 Beobachtungen von HOUGH im Dearborne Observatory 1895 März 19 und 1896 Februar 15 (der schwarze Fleck oben ist der dritte Satellit) nach »Astron. Nachr. Bd. 140, pag. 273, Fig. 392 Beobachtungen von FAUTH 1896 Februar 7 und 17 (mit dem Schatten des ersten Trabanten) nach »Astron. Nachr.« Bd. 140, pag. 167.



(A. 890.)
Beobachtungen von LOHSE in Bothkamp.
1871 Dec. 21, $10^h\,42^m$ 1871 Dec. 24, $18^h\,16^m$.



(A. 891.)
Beobachtungen von HOUGH in Dearborne Observatory.
1895 März 19 1895 Februar 15.



(A. 892.)
Beobachtungen von FAUTH.
1895 Februar 7 1895 Februar 17.

Für das Vorhandensein einer Atmosphäre spricht auch der mitunter beobachtete Farbenwechsel der Flecke. Schön 1787 sah SCHRÖTER, später 1788/9 GRUITHUISEN das Auftreten von auffallend rothen Flecken. 1870 und 1871 sahen BROWNING und LOHSE[1]) die Aequatorealstreifen besonders in einem rothen Lichte. LOHSE erklärt dieses dadurch, dass sich in der Jupiteratmosphäre Wasserdampf vorfindet, und sieht eine Bestätigung dieser Ansicht in dem Umstande, dass bei starker Condensation und dadurch bedingter Vermehrung der Wolken die röthliche Farbe abnimmt.

Ein auffallend rother Fleck wurde 1878 September 25 von TROUVELOT und derselbe 1879 Juni 5 von LOHSE und 1879 September 8 von BREDICHIN auf der südlichen Halbkugel des Jupiter beobachtet[2]).

Zu bemerken ist noch das Auftreten von weissen Flecken. DAWES sah solche im Frühjahr 1849 und LASSELL im März 1850; 1857 September 16 bis November 18 sah DAWES eine grössere Anzahl derselben (bis zu sechs) in der Aequatorealzone und zwar meist in der Nähe des südlichen Aequatorealstreifens. 1880 September 18 wurde wieder, ebenfalls in der Nähe des Aequators, zuerst von DENNING ein auffallend weisser Fleck beobachtet.

Trotz der grossen Veränderlichkeit des Anblickes, welchen der Planet uns bietet, zeigt sich doch auch eine gewisse Constanz der Formen, welche sich in erster Linie in der Aequatorealzone oder am sogen. Aequatorealstreifen ausspricht. Ueber diese äussert sich LOHSE[3]) folgendermaassen: »Im Verlaufe elfjähriger unausgesetzter Beobachtungen des Jupiter hat sich mir die Aequatorealgegend des Planeten stets als eine dem Auge besonders markante Zone dargestellt, die sich nahe gleich breit von der Aequatoreallinie nach Nord und Süd erstreckt. Die nördliche und südliche Grenzlinie dieser Zone zeichnet sich zumeist durch eine intensivere Färbung aus, während weiter nach der Mitte hin Wolkenzüge beobachtet wurden, die den röthlichen Ton, welcher der Zone eigen ist, partiell verdecken. Andere Beobachter haben diese Verhältnisse so aufgefasst, dass sie zwei isolirte — einen nördlichen und einen südlichen — äquatorealen Streifen annehmen, denen, wie den übrigen Streifen des Planeten, nur vorübergehende Existenz zuerkannt wurde. Diese Auffassung habe ich nie getheilt, da mir in den angewendeten, grösstentheils mächtigen Instrumenten der Aequatorealgürtel als eine einheitliche Erscheinung von beträchtlicher Stabilität erschienen ist, wie denn auch die Photographie des Planeten diese Auffassung bestätigte, indem die chemische Wirksamkeit des von der Aequatorealzone ausgesendeten Lichtes stets wesentlich von derjenigen der anderen Theile des Planeten deutlich unterschieden ist«.

Es ist aber bisher noch nicht gelungen, die constanten und variablen Elemente, welche die Oberfläche des Jupiter darbietet, vollständig auseinander zu halten. A. C. RANYARD hat auf die Möglichkeit eines Zusammenhanges der Veränderlichkeit der Jupiterflecke mit der Sonnenfleckenperiode hingewiesen[4]), und auch LOHSE[5]) hält die Möglichkeit, dass die Veränderungen in der Jupiteratmosphäre periodisch stattfinden würden, nicht für ausgeschlossen.

---

[1]) Bothkamper Beobachtungen, II. Heft, pag. 90.

[2]) Astron. Nachr. Bd. 95, pag. 383, und Bd. 96, pag. 17.

[3]) Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, III. Bd. 1. Stück, pag. 1.

[4]) Monthly Notices, Bd. 31, pag. 34 und 224.

[5]) l. c., pag. 91.

Die Bestimmung der Lage der Jupiteraxe geschieht natürlich aus den beobachteten Bewegungen der Flecken selbst (vergl. den Artikel »Mechanik des Himmels«, II. Bd., pag. 460), wobei die Flecken die Stelle rund um den Jupiter in der Entfernung gleich seinem Halbmesser umkreisender Körper einnehmen. Die Genauigkeit der Bestimmung scheitert wesentlich an der Inconstanz und dem Ortswechsel der Flecke; doch folgt aus den Beobachtungen, dass die Neigung des Jupiteräquators gegen seine Bahn nur sehr klein (etwa 3°) ist. Eine Veränderlichkeit der Jahreszeiten, wie auf der Erde, ist daher bei Jupiter nicht vorhanden.

Die bereits von GALILEI entdeckten vier Jupitersatelliten waren schon im Anfange des Jahrhunderts Gegenstand ausgedehnter theoretischer Untersuchungen. Ueber die aus der Commensurabilität der mittleren Bewegungen derselben folgenden Eigenthümlichkeiten der drei mittleren wurde ausführlich in der »Mechanik des Himmels« gesprochen, und braucht daher hier nicht weiter darauf eingegangen zu werden.

Am 9. September 1892 wurde von BARNARD am Mount Hamilton ein fünfter Satellit als ein Stern 13. Grösse entdeckt[1]), dessen Umlaufszeit $11^h\,49^m{\cdot}6$ ist, so dass gemäss der allgemein üblichen Reihenfolge, welche die Nummerirung gemäss den Entfernungen und nicht nach der Zeit der Entdeckung festsetzt (wie dieses am deutlichsten bei den Saturntrabanten hervortritt), dieser Satellit als der erste, und der äusserste daher als der fünfte zu bezeichnen ist, wie dies auch in dem Artikel »Mechanik des Himmels« schon durchgeführt ist.

Der hellste von den fünf Satelliten ist der vierte; in den günstigen Oppositionen wird er von 5·6 Grösse und tritt nur wegen seiner grossen Nähe zu Jupiter nicht wie ein anderer Stern derselben Grössenklasse hervor.

Die scheinbaren Durchmesser der Satelliten wurden schon von MARALDI 1734 aus der Zeit des Eintrittes in die Jupiterscheibe zu bestimmen versucht. Dieselbe Methode verfolgten SCHRÖTER und HARDING: sie erhielten für die vier äusseren Satelliten die Werthe:

	1″·06	0″·87	1″·54	1″·07
STRUVE erhielt[2])	1·02	0·91	1·49	1·28
BESSEL[3]) . .	1·03	0·93	1·38	1·22

mit Rücksicht auf die Kleinheit der zu bestimmenden Werthe in sehr guter Uebereinstimmung.

Trotz der relativen Kleinheit der Satelliten gelang es, auf denselben Flecken zu constatiren. Die Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins derselben ist ausser Zweifel gestellt durch die Veränderlichkeit der Lichtstärke derselben. AUWERS und ENGELMANN haben besonders beim äussersten Satelliten eine Regelmässigkeit im Wechsel der Lichtintensität bemerkt, welche auf eine Rotation des Trabanten hindeutet, so dass die Rotationszeit wahrscheinlich mit der Umlaufszeit identisch ist. BARNARD und BURNHAM sahen den zweiten Jupitersatelliten am 8. September 1890 deutlich doppelt, und zwar die beiden Componenten senkrecht zur Richtung der Jupiterstreifen; der Schatten war dabei vollständig kreisrund[4]). Hierfür sind nun zwei Erklärungen möglich; entweder der Satellit ist in Wirklichkeit doppelt, welche Annahme aber mit dem Gesammtbilde nicht ver-

[1]) Astron. Nachr. Bd. 130, pag. 375, Bd. 131, pag. 73.
[2]) Astron. Nachr. Bd. 5, pag. 16.
[3]) Königsberger Beobachtungen Bd. 35, pag. 276.
[4]) Astron. Nachr. Bd. 124, pag. 318.

einbar ist[1]), oder aber, die anscheinende Duplicität entsteht durch einen weissen Streifen, der parallel zur Richtung der Jupiterstreifen über den Satelliten zieht.

Die Schwierigkeit, mit welchen Details auf den Nebenplaneten, trotz der relativ grossen Instrumente unserer Zeit, wahrgenommen werden, lässt die mannigfachen Beobachtungen SCHRÖTER's, welcher am 24. August und dann nochmals am 13. und 14. October 1796 einen schwarzen Fleck von 0''·6 Durchmesser am vierten Satelliten, und am 9. November 1796 einen noch dunkleren Fleck von 0''·75 auf dem fünften Satelliten gesehen hatte, dennoch etwas zweifelhaft erscheinen. Von demselben Gesichtspunkte bleibt auch seine Aeusserung zu beurtheilen[2]): »Mit Vergnügen kann ich vorläufig versichern, dass wir (SCHRÖTER und HARDING) nun in jedem der vier Jupitertrabanten, selbst in den beiden kleinsten, im ersten und zweiten, mit völliger Gewissheit dunkle Flecke und zwar wiederholt, wahrgenommen haben. Ungeachtet sie vornehmlich von atmosphärischer Beschaffenheit und vergänglich, einem zufälligen Wechsel unterworfen sind, so geben sie mir mit völliger Ueberzeugung das längst vermuthete Resultat, dass alle diese Trabanten ohne Ausnahme während eines synodischen Umlaufes einmal um ihre Axe rotiren.«

Die Neigung der Bahnebene der Satelliten ist gegen die Jupiterebene nur sehr gering; daher kommt es, dass die Satelliten bei jedem Umlaufe vor dem Jupiter gesehen werden, und auch bei jedem Umlaufe hinter dem Jupiter in dessen Schatten verschwinden (Trabantenverfinsterungen). Wegen der bedeutenden Nähe der Satelliten zum Hauptplaneten reicht übrigens der Schattenkegel bis an die Oberfläche des Jupiter, so dass man bei jedem Umlaufe einmal den Schatten des Satelliten auf der Jupiterscheibe als schwarzen Fleck sieht.

Die Satelliten erscheinen bei ihrem Vorübergange auf der Jupiterscheibe anfangs hell auf dunklem Grunde (an dem Rande der Jupiterscheibe); ihre relative Helligkeit gegen den Hintergrund nimmt dann ab, und in der Mitte der Jupiterscheibe erscheinen sie als kleine, dunkle Scheibchen. Die Ursache liegt darin, dass die Albedo des Jupiter bedeutend grösser ist, als diejenige der Satelliten. Sie beträgt nach ZÖLLNER 0·6238 für Jupiter, während diejenige der Satelliten nach ENGELMANN zwischen 0·0792 (für den fünften) und 0·2665 (für den dritten) beträgt. Da der Jupiter daher mindestens dreimal so viel von dem auf ihn fallenden Lichte zurückwirft, so muss seine Scheibe bedeutend heller als diejenige der Satelliten, daher diese auf dem Jupiter dunkel erscheinen. Dies gilt jedoch nur für die Mitte; dass sich das Verhältniss am Rande umkehrt, hat seinen Grund in der Atmosphäre des Jupiter, welcher seine Scheibe am Rande dunkel erscheinen lässt.

Saturn.

Bedeutend kleiner als Jupiter, ist Saturn dennoch durch das ihn umgebende Ringsystem jedenfalls der merkwürdigste der Planeten. Auch er zeigt eine sehr beträchtliche Abplattung. Die zahlreichen Messungen des Aequatoreal- und Polardurchmessers können hier nicht im Detail angeführt werden; die Resultate für den Aequatordurchmesser schwanken zwischen 17''·0 und 18''·8, für den Polardurchmesser zwischen 15''·3 und 16''·5. Die Gestalt des Planeten erschien zeitweise nicht einfach abgeplattet, sondern in der Mitte des Quadranten etwas ausgebuchtet, mehr viereckig. Diese Erscheinung wurde zum ersten Male von HERSCHEL am 12. April 1805 wahrgenommen; er schreibt: »Die Abplattung scheint

[1]) ibid. Bd. 134, pag. 231.

[2]) Berliner Astron. Jahrb. für 1801, pag. 126.

anders, wie beim Jupiter, und erst in höheren geographischen Breiten schneller abzunehmen«[1]). Diese Erscheinung wurde auch am 18. und 19. April, am 13. 26. und 27. Mai bemerkt. Stets war die grösste Krümmung nahe bei 45°. Am 27. Mai 1805 machte HERSCHEL eine Messung und fand für den Durchmesser der grössten Krümmung 11″·88, für den Aequatorealdurchmesser nur 11″·44; als Ursache dieser Abweichung des Saturn von der genauen sphäroidischen Gestalt nimmt HERSCHEL die Anziehung des Ringes auf den Saturn an.

Dieselbe Erscheinung sah AIRY am 15. September 1848[2]); er bezeichnet die Form als *square shouldered*; am 16. und 17. hingegen erschien der Planet einfach, elliptisch. DENNING hingegen fand durch Messung diese von ihm ebenfalls gesehene eigenthümliche Gestalt nicht bestätigt und erklärt die Erscheinung als eine optische Täuschung, hervorgerufen durch das Aneinanderhängen der hellen Ringcontouren an die Planetenscheibe[3]).

Die Masse des Saturn wurde ebensowohl aus den Störungen in der Bewegung des Jupiter und Uranus, als aus den Entfernungen der Satelliten bestimmt. Die jetzt allgemein angenommene Masse $\frac{1}{3501{,}6}$ kann als bereits sehr nahe richtig angesehen werden. Eine genauere Bestimmung derselben ist von geringerer Wichtigkeit wie für Jupiter, da sein Einfluss auf die Bewegung anderer Himmelskörper, namentlich der kleinen Planeten sowohl seiner geringeren Masse, als seiner grösseren Entfernung wegen minder gross ist.

Flecken und Streifen wurden auf dem Saturn schon von CASSINI im März 1683 gesehen, der auch die Rotationszeit ableitete. HERSCHEL sah[4]) auf dem Saturn einen fünffachen Streifen und schloss aus den Veränderungen desselben auf eine Rotationszeit von $10^h\,16^m\,0^s{\cdot}4$; LAPLACE erhielt für dieselbe $10^h\,16^m\,17^s{\cdot}2$[5]). HALL beobachtete vom 7. December 1876 bis 2. Januar 1877 einen grossen Fleck von 2—3″ Durchmesser, von glänzend weisser Farbe und scharfer Begrenzung, und leitete daraus die Rotationszeit $10^h\,14^m\,23^s{\cdot}8$ ab[6]).

Der interessanteste Theil des Saturn, durch welchen derselbe gegen die übrigen Planeten besonders merkwürdig ist, ist jedoch sein Ringsystem.

Der Ring wurde schon von GALILEI 1610 gesehen, ebenso von FONTANA, GASSENDI, HEVEL u. a.; doch sind die von den älteren Beobachtern gegebenen Zeichnungen untereinander sehr abweichend; es sind kleine, kreisförmige oder auch längliche, eiförmige Anhänge, dann halbmondförmige Henkel u. s. w. Eine Zusammensellung dieser Beobachtungen gab RICCIOLI in seinem »*Almagestum novum*«, I. Bd., pag. 488. Seine eigene Darstellung von 1648 October 15 und 1649 Ende März und Juli 20 kommt der Wahrheit schon ziemlich nahe: die beiden halbmondförmigen Henkel vereinigen sich an den Polen des Saturn und bilden so einen in der Ebene der Scheibe gelegenen ovalen Ring.

HUYGENS sah 1655 den Saturn ebenfalls mit zwei Henkeln, die aber im Frühjahr 1656 verschwanden. Bei ihrem Wiedererscheinen 1656 kam er auf die richtige Lösung, welche er in einem Anagramm publicirte, dessen Lösung »*Annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato*« war.

---

[1]) Berliner Astron. Jahrb. für 1809, pag. 197.

[2]) Greenwich Observations 1848, V. Abtheilung, pag. 44.

[3]) Monthly Notices Bd. 41, pag. 84.

[4]) Berliner Astron. Jahrb. für 1798, pag. 90.

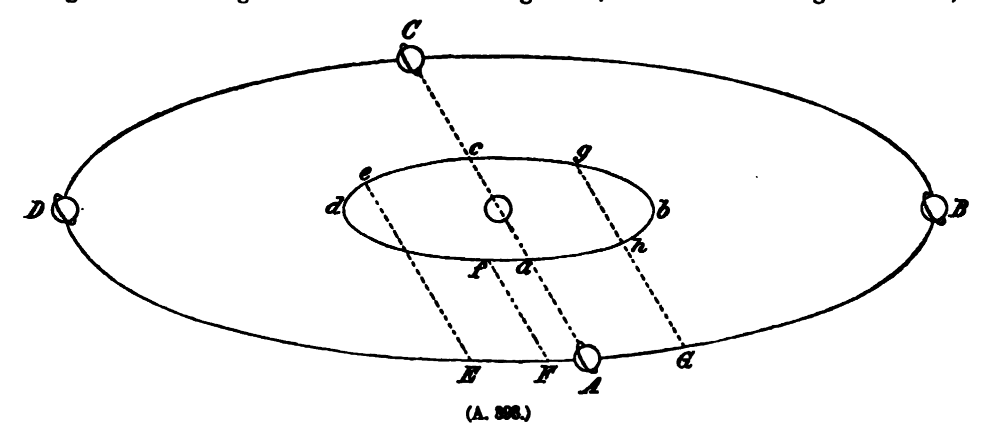
[5]) Exposition du système du monde; der angegebene Werth ist 0·428 Tage.

[6]) Astron. Nachr. Bd. 90, pag. 149.

Damit war das Phänomen auch allseitig erklärt: es ist ein dünner, ebener, den Planeten frei umgebender, gegen die Bahnebene geneigter Ring.

Die Sichtbarkeit desselben hängt von zwei verschiedenen Umständen ab, nämlich von der Stellung der Sonne und von derjenigen der Erde gegen die Ringebene.

1) Die Stellung der Sonne beeinflusst die Helligkeit des Ringes. Da dieser, wenigstens sehr nahe, in einer Ebene liegt, so wird er von keiner Seite beleuchtet, wenn die Sonne sich in der Ebene des Ringes befindet. Ist ☊ die Lage des aufsteigenden Knotens der Ringebene, so wird der Ring unsichtbar,



(A. 393.)

wenn ♄ = ☊ und ♄ = 180° + ☊ ist. Nimmt man an, dass der aufsteigende Knoten sich in *A* befinde (Fig. 393), so ist der linke Theil der Ringebene über der Saturnsbahn, d. i. auf der Seite des Nordpols derselben, der rechte Theil auf der Seite des Südpols. Es wird daher von *A* über *B* nach *C* die untere, südliche Fläche des Ringes, von *C* über *D* nach *A* die obere, nördliche Fläche der Ringebene von der Sonne beleuchtet sein[1]). Aus diesem Grunde verschwindet daher der Saturnsring bei jedem Umlaufe des Planeten zweimal; dieses findet statt, wenn die Länge des Planeten 168° bezw. 348° ist (Oppositionen im März und September). Saturn hatte die Länge 168° Anfang 1892; wegen seiner langsamen Bewegung blieb daher der Ring um diese Zeit ziemlich lange nur als feine Linie (für schwache Vergrösserungen gar nicht) sichtbar. Dieselbe Erscheinung tritt ungefähr alle 14½ Jahre auf. Ist der Planet um 90° von diesen Punkten entfernt, also etwa 7 Jahre später, so liegt die Ebene des Ringes so, dass dieselbe, von der Sonne gesehen (daher in der Opposition auch von der Erde gesehen) seine grösste Oeffnung erreichen kann; dieser Fall tritt gegenwärtig ein, wenn die Oppositionen im Juni oder December stattfinden. Aus dem Verhältniss der Halbaxen kann man dann auf die Neigung der Ringebene schliessen.

2) So lange die Verlängerung der Knotenlinie die Erdbahn *abcd* schneidet, wird nun aber in Folge der Bewegung der Erde diese zweimal in die Ebene des Ringes kommen; in diesem Falle wird aber der Ring, wenn nicht gleich-

---

[1]) Nach BESSEL (Astron. Nachr. Bd. 12, pag. 167) sind die Elemente der Ringebene gegen die Ekliptik

$$☊ = 166° 58' 8''{\cdot}9 + 46''{\cdot}462 (T - 1800)$$
$$i = 28 \quad 10 \; 44{\cdot}7 - 0{\cdot}350 (T - 1800).$$

Nach HALL (Saturn and its Ring) ist die Neigung $i = 28° 7' 40''$.

zeitig Sonne und Erde durch die Ringebene gehen, von der Sonne beleuchtet sein, aber so oft die Erde in der Ringebene sich befindet, von einem Beobachter auf der Erde als geradlinig wahrgenommen werden, also wieder verschwinden. Aber auch dann, wenn sich die Erde ausserhalb der Ebene des Ringes befindet, aber die Ringebene zwischen Sonne und Erde durchgeht, so dass die von der Sonne beleuchtete Seite des Ringes von der Erde abgewendet ist, und daher nur der im Schatten befindliche oder dunkle Theil des Ringes sich darbietet, wird der Ring nicht gesehen. Befindet sich daher der Saturn in G, so wird der Ring von allen Punkten der Erde bei ihrer Bewegung von g über cda bis h gesehen, hingegen in dem Theile der Bewegung von h über b nach g wird der Ring nicht gesehen. Ist dabei der Saturn während der Zeit, während welcher die Erde den Weg $gcdah$ zurückgelegt hat, durch A hindurchgegangen, so wird der Ring dabei ebenfalls auf einige Zeit verschwinden. Es möge beispielsweise der Saturn den Weg EG zurückgelegt haben, während die Erde von e über da nach g kam. Steht die Erde in e (vor dem Durchgang des Saturn durch A), so ist der Ring sichtbar; steht die Erde in e, der Saturn in E (wobei eE parallel der Richtung der Knotenlinie der Ringebene ist), so verschwindet der Ring und bleibt unsichtbar (weil die Erde auf den von der Sonne abgewendeten, nicht beleuchteten Theil der Ringebene sieht), bis die Erde in f, Saturn in F angekommen ist. Im weiteren Verlaufe bleibt die Ringebene sichtbar, bis Saturn in A angekommen ist; wo immer dann die Erde steht, wird der Ring unsichtbar. Da dann die Erde und die Sonne aber wieder auf entgegengesetzten Seiten der Ringebene stehen, so ist der Ring auch weiter unsichtbar, bis die Erde in g, Saturn in G angekommen ist, worauf dann der Ring wieder sichtbar wird.

1665 sah zuerst der englische Astronom WILLIAM BALL eine dunkle Linie auf dem Ring[1]), welche 1675 von CASSINI und MARALDI als eine Trennungslinie erkannt wurde[2]). Durch diese sogen. CASSINI'sche Trennungslinie ist der helle Saturnsring in zwei Ringe getheilt, welche nach W. STRUVE[3]) als Ring A (der äussere Ring) und als Ring B (der innere Ring), bezeichnet werden.

1825 December 17 sah KATER[4]) den äusseren Ring wie durch eine grössere Anzahl von sehr eng aneinanderliegender Theilungslinien getrennt. 1826 Januar 16 und 17 konnte er die Theilungen nicht mit Bestimmtheit wiedererkennen, Februar 26 sah er nichts; 1828 Januar 22 sah er die Theilungen ebenfalls nicht. KATER berichtet aber, dass SHORT diese Theilungen öfters gesehen hat und dass QUETELET dieselben schon 1813 gesehen und LAPLACE davon Mittheilung gemacht habe. In den Mémoirs of the Royal Society, Bd. IV, pag. 383 bemerkte er jedoch, dass unter den zahlreichen Theilungslinien eine von besonderer Stärke sich hervorhob, die die Breite des Ringes nahe halbirte.

Am 25. April 1837 sah ENCKE eine den Ring A durchsetzende Theilungslinie[5]). Aus seinen Messungsresultaten, welche in der folgenden Tafel aufgenommen sind, folgt übrigens, dass er bereits die CASSINI'sche Theilung als

---

[1]) Philos. transact. I. Bd., pag. 151.

[2]) Journ. des Savants 1677 März 1.

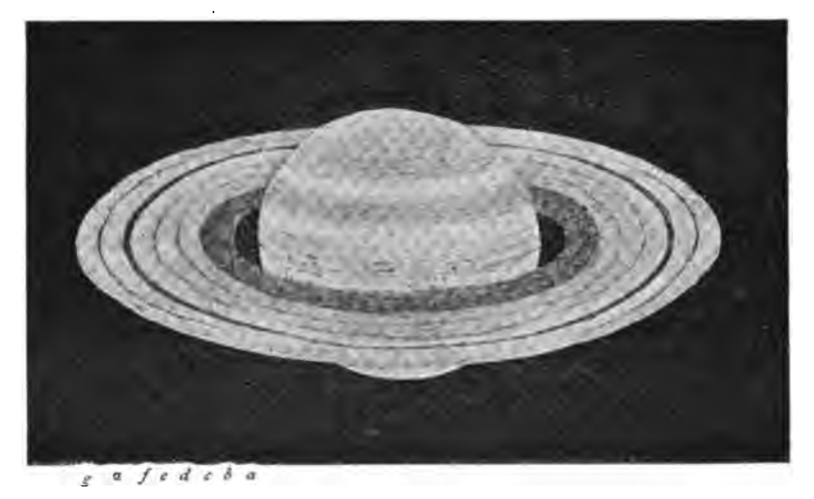
[3]) »Sur les dimensions des anneaux de Saturne«, Mém. de l'academie impérial de St. Petersbourg, VI. Serie Bd. VII. Sciences physiques et mathématiques Bd. V, pag. 439.

[4]) »On an appearance of divisions in the exterior ring of Saturn«; Monthly Notices Bd. I, pag. 178.

[5]) Astron. Nachrichten Bd. 15, pag. 17.

einen dunklen Zwischenraum von ziemlicher Breite wahrnahm. Für die Lage der Theilungslinie α ergab sich nach ENCKE's Messungen, dass dieselbe näher dem inneren Rande des Ringes *AA*, und zwar in etwa $\frac{1}{3}$ der ganzen Ringbreite sich befand. Die Theilung wurde erst wieder 1843 September 7 von LASSELL und DAWES in Starefield bei Liverpool mit einem 9 zölligen Refraktor bei 450 facher Vergrösserung bemerkt. Die Lage derselben war nach DAWES so, dass die Breite des äusseren Theiles sich zur Breite des inneren wie 1:3 verhielt; nach LASSELL war der äussere Theil kaum $\frac{1}{3}$ der ganzen Ringbreite, aber die Theilung jedenfalls nach der Aussenseite von der Mitte gelegen[1]).

Auch am Ringe *B* wurden mehrfache Theilungslinien wahrgenommen; so von BOND am 20. Oktober 1851[2]), während er an diesem Tage die Theilung des äusseren Ringes nicht wahrnahm, DAWES sah 1851 sowohl die ENCKE'sche Theilung des Ringes *A*, als auch eine Theilung am Ringe *B*[3]). Später wurden von ANTONIADI im Ringe *B* zwei feine Theilungslinien gesehen, welche auch FAUTH 1896 Mai 11 $10^h\ 42^m$ deutlich wahrnahm. Fig. 394 ist nach der Zeichnung



(A. 394.)

Saturn nach einer Zeichnung von FAUTH.

1896 Mai 11, $10^h\ 42^m$

von FAUTH[4]) reproducirt Auch TROUVELOT hat zeitweise sechs Ringe deutlich von einander getrennt gesehen.

1838 sah GALLE als Fortsetzung des Ringes *B* nach innen einen diesem anhängenden Schleier. Ueber diese Beobachtung berichtete ENCKE bereits in den Memoiren der Berliner Academie der Wissenschaften von 1838 und in den Astron. Nachrichten, Bd. 15, pag. 17. Der Abhandlung in den Berliner Mémoiren sind zwei Zeichnungen beigegeben, bei denen jener dunkle Ring sich wie ein Schatten über die Saturnskugel erstreckt; da aber der Schatten des Ringes auf den Planeten damals nicht so gesehen werden konnte[5]), so ist diese Zeichnung unzweifelhaft auf den Ring *C* zu beziehen. GALLE sah aber keine Theilung

1) Monthly Notices Bd. 6, pag. 11.
2) ibid. Bd. 12, pag. 155.
3) ibid. Bd. 14, pag. 8.
4) Astron. Nachrichten Bd. 141, pag. 401.
5) Vergl. DAWES in den Astron. Nachrichten Bd. 32, pag. 381.

zwischen den Ringen *B* und *C*, sondern dieselben unmittelbar ineinander übergehen. Er bemerkt hierzu 1851 April 1 ausdrücklich[1]): »Doch betrachte ich diesen Schleier nicht als einen besonderen Ring, sondern als eine Fortsetzung des inneren Ringes irgend welcher Art, bin auch jetzt noch von der Trennungslinie nicht völlig überzeugt, da der Contrast im Raume zunächst am Ringe diesen viel dunkler erscheinen lässt, als derselbe wirklich ist.« Die in der Tabelle eingetragenen Messungsresultate sind Mittel aus Messungen von 1838 Juni 11, 24, 27, Juli 2 und 1839 Januar 11.

Diese Beobachtungen konnten wegen der darauf folgenden grossen südlichen Deklination des Saturn nicht weiter verfolgt werden, und so kam es, dass erst 12 Jahre später dieser dunkle Ring am selben Tage (3. December 1850) von BOND[2]) und LASSELL wieder entdeckt wurde. Beide bezeichnen ihn als *a crape veil*, ein dunkler Schleier, durch welchen man die Saturnsscheibe ganz deutlich hindurchsehe. DAWES hatte schon früher (1850 November 29) diesen Ring als eine dunkle Linie an der Innenseite des Ringes *B* (*a shading, like twilight at the inner position of the ring*« um $6^h 45^m$ und »*an exceeding narrow black line on the ball . . . like a shadow*« um $8^h 40^m$ gesehen. Auch diese drei Beobachter bemerkten diesen dunklen Ring *C* ohne bestimmte Trennungslinie von messbarer Breite sich an *B* anschliessen. Nach BOND und LASSELL war die Breite des Ringes *C* zur Zeit seiner Entdeckung etwa den fünften Theil des Abstandes des Ringes *B* von der Saturnkugel.

Am 14. August 1851 sah BOND den Ring *C* in Pulkowa viel breiter als im Vorjahre in Cambridge U. S. Ueberdiess war er deutlich von *B* getrennt.

Die Messungen von OTTO STRUVE ergeben $bd : ad = 0{\cdot}56$. Ferner sah STRUVE[3]) den Ring *C* durch eine äusserst feine Trennungslinie, die aber nur in der Nähe der äussersten Enden der Ringe bemerkt wurde, in zwei Theile von gleicher Helligkeit getrennt. Der äussere der beiden Theile (zwischen *c* und *d*) war von *B* durch keine deutliche Trennungslinie geschieden, sondern nur durch den grossen Helligkeitsunterschied kenntlich. Dieser äussere dunkle Ring, oder eigentlich die Trennungslinie *c* wurde von LASSELL nie gesehen[4]); hingegen konnte STRUVE die ENCKE'sche Theilung nicht oder doch nur sehr vorübergehend sehen[5]).

Dass der Ring *C* nach GALLE nicht gesehen wurde, war aus dem südlichen Stande des Saturn erklärlich. Hingegen war zu untersuchen, ob der Ring nicht schon früher gesehen worden war. O. STRUVE gelangt zu dem Resultate, dass HERSCHEL am Cap und BESSEL ihn zwischen 1830 und 1837 sicher nicht gesehen hatten, vielleicht wegen nicht genügend grosser Instrumente. Aber auch W. STRUVE hatte ihn 1826 sicher nicht gesehen, woraus O. STRUVE schliesst, dass die Bildung dieses Ringes möglicherweise zwischen 1826 und 1838 fällt. Doch findet sich schon bei W. STRUVE die Angabe, dass der innere Rand des Ringes *B* weniger scharf begrenzt war, welches man vielleicht als die erste Bildung des

---

1) Astron. Nachrichten Bd. 32, pag. 187.

2) Monthly Notices Bd. 11, pag. 20 und 24.

3) l. c., pag. 443; in Fig. 394 bedeutet *a* die Begrenzung der Saturnskugel, *b* die innere, *c* die äussere Grenze des Ringes *C*, *d* die innere, *e* die äussere Begrenzung des Ringes *B*, *f* die innere und *g* die äussere Begrenzung des Ringes *A*; die von STRUVE beobachtete Trennungslinie *c* zwischen *b* und *d* fehlt in der FAUTH'schen Zeichnung. *α* ist die ENCKE'sche Trennungslinie.

4) Monthly Notices Bd. 13, pag. 12.

5) ibid. Bd. 13, pag. 444.

Ringes auffassen könnte. In den Astron. Nachrichten Bd. 5, pag. 13 schreibt W. STRUVE: »Auffallend ist, dass der äussere Ring bedeutend weniger Glanz hat, als der innere. Auch der innere scheint nach der Seite des Planeten zu weniger scharf begrenzt und etwas matter zu sein, so dass ich vermuten möchte, diese innerste Begrenzung sei weniger regelmässig als die andere.« Gegen diese Annahme aber spricht nach STRUVE[1]), dass schon CASSINI einen dunklen Streifen auf dem Saturn in Berührung mit dem Ringe und von schwächerer Krümmung wie die Aequatorealstreifen sah[2]), und eine ähnliche Beobachtung findet sich bei HADLEY, der im Jahre 1720[3]) eine dunkle Linie im Anschlusse an den Ring B bemerkte, die er aber 1723 wesentlich verbreitert sah, Im Gegensatze hierzu bemerkt SCHRÖTER[4]), dass der Zwischenraum zwischen dem Ring und der Saturnskugel absolut dunkel ist; »die Saturnskugel schwebt . . . . von ihrem Ringe umgeben, so deutlich vor Augen, als wenn man sie greifen wollte. Die Schärfe, womit man dann den am Himmel gleich dunklen Zwischenraum am Ringe ringsum sieht, ist dann recht überraschend.«

Verschiedene Beobachter haben beim Verschwinden des Ringes einen dunkeln Aequatorealstreifen gesehen; dies wird schon von MARALDI berichtet; dasselbe sah auch SCHMIDT in Bonn 1848[5]), woraus STRUVE schliesst, dass der Ring C wahrscheinlich dicker ist, als die hellen Ringe[6]).

Messungsresultate.

a) Von dem Rande a der Saturnkugel bis . . .	b	c	d	e	f	a	g
W. STRUVE 1826 . . .	—	—	4·336	8·242		8·649	11·052
O. STRUVE 1851 vorausgehender Rand . . .	1·61	2·98	3·70	8·35	8·78	—	11·06
O. STRUVE 1851 folgender Rand	1·62	2·60	3·60	8·19	8·75	—	11·07
b) Vom Mittelpunkte der Saturnkugel							
ENCKE 1837	—	—	26·756	34·749	36·038	37·471	40·445
GALLE 1838	22·106	—	26·356	34·184		—	40·899
HALL 1885	20·52	—	25·75	34·11	34·95	—	40·45.

Dass die Ringe nicht in einer Ebene liegen, hatte schon MARALDI ausgesprochen; es wird dies durch verschiedene Beobachtungen bestätigt. Zur Zeit des Verschwindens des Ringes wurde derselbe wiederholt als eine Lichtlinie mit deutlicher Lichtanhäufung, Lichtknoten beobachtet; so von SCHRÖTER, OLBERS[7]), ebenso von BOND 1848[8]).

Mehrfach wurden auch Flecke auf dem Ringe gesehen, aus denen auch auf die Rotation des Ringes geschlossen wurde. MARALDI sprach schon 1715 die Vermutung aus, dass der Ring rotire. LAPLACE hatte die Rotationszeit des Ringes zu $10^h\,29^m\,16^s{\cdot}8$ angegeben, HERSCHEL $10^h\,32^m\,15^s$[9]). SCHWABE[10]) schloss aus

[1]) ibid. pag. 447.

[2]) Mémoires de l'Academie des Sciences de Paris 1715, pag. 46.

[3]) Philosoph. Transact. 1723, No. 378.

[4]) Berliner Astron. Jahrbuch für 1800, pag. 167.

[5]) Astron. Nachrichten, No. 650.

[6]) l. c., pag. 450.

[7]) Astron. Nachrichten, No. 241.

[8]) Monthly Notices, Bd. 10, pag. 16.

[9]) Philosoph. Transactions für 1790.

[10]) Astron. Nachrichten, Bd. 58, pag. 248.

einer Reihe von Beobachtungen des Saturnsringes von 1862 Februar 7 bis Mai 13, dass die Rotationszeit von 10^h mit den Beobachtungen nicht vereinbar sei, und sprach seine Ueberzeugung dahin aus: »dass der Ring, wie zuerst SCHRÖTER fand, nicht rotirt.« Die Resultate von SCHRÖTER über die Rotationszeit sind aber ziemlich widersprechend; aus knotigen Verdickungen, hervortretenden Ungleichheiten am Ringe hatte er auf eine Rotationszeit von 24, 12 oder 8^h geschlossen, während er etwas später[1]) angiebt, dass der Ring entweder gar nicht, oder in 30 Jahren einmal um Saturn rotire. Auch BOND bemerkte übrigens, dass die erwähnten, die Lichtlinien unterbrechenden Lichtanhäufungen nicht mit dem Ringe zu rotiren scheinen[2]).

Flecke auf dem Saturnsring beobachtete wiederholt MASCARI[3]); TERBY sah 1889 März 6 einen weissen Fleck auf dem Ringe[4]), der, so lange er ihn verfolgte, eine Ortsveränderung nicht zeigte; dieser Fleck wurde auch von ELGER, MAC LEOD gesehen, hingegen erwähnen SCHIAPARELLI, KNORRE, KNOPF, H. STRUVE ausdrücklich, dass sie denselben nicht wahrnehmen konnten.

Wäre der Ring eben, so müsste natürlich der Schatten der Saturnskugel auf demselben stets eine Ellipse, also gegen den Saturn zu concav, nach aussen convex sein. Dieses ist auch im allgemeinen der Fall; doch finden sich auch, allerdings sehr selten, Ausnahmen. KAISER sah im Jahre 1850 den Schatten des Saturn auf den Ring mit der Convexität gegen den Saturn[5]); ebenso DAWES[6]) 1854 September 29 und December 7; ferner SECCHI und RESPIGHI[7]) am 28. Januar und 7. Februar 1855. Dieselbe Erscheinung sah HALL 1876 October 18 und 1878 December 19; er prüfte die Richtigkeit auch objectiv durch Anlegen eines Fadens tangential an die Schattengrenze[8]). Ferner erwähnt TERBY[9]) 1889 März 6, dass der Schatten vielleicht etwas concav nach aussen wäre.

HALL führt das Phänomen auf die Beeinträchtigung der Beobachtung bei schlechtem Wetter zurück[10]). SECCHI erklärte diese anomale Krümmung des Schattens durch die Form des Ringes, dessen Querschnitt sich als eine Ellipse darstellt, deren kleine Achse senkrecht zur Ringebene und ungefähr $\frac{1}{12}$ der in der Ringebene gelegenen grossen Achse wäre[11]).

Der Mittelpunkt des Ringes fällt nicht mit dem Mittelpunkte der Saturnskugel zusammen. Diese Bemerkung wurde zuerst von GALLET[12]) gemacht, aber später, 17. December 1827, von SCHWABE neu entdeckt[13]). Der östliche Zwischenraum zwischen Kugel und Ring ist stets grösser als der westliche, aber der Unterschied ist nicht immer von derselben Grösse (vergl. auch die Messungen von STRUVE in der vorangehenden Tabelle).

---

1) Berliner Astron. Jahrbuch für 1806, pag. 160, 164 und 249.
2) Monthly Notices, Bd. 10, pag. 16.
3) Astron. Nachrichten, Bd. 139, pag. 81.
4) ibid. Bd. 121, pag. 109.
5) S. OUDEMANNS, »der Sternhimmel«, I. Bd., Tafel IV, Fig. 1.
6) Astron. Nachrichten, Bd. 41, pag. 165.
7) ibid. Bd. 41, pag. 348.
8) »Saturn and its Ring«; Washington Observations 1885, Append II.
9) Astron. Nachrichten Bd. 121, pag. 110.
10) l. c., pag. 17. Er hat wohl stets die CASSINI'sche, nie aber die ENCKE'sche Theilung sehen können, und sah ebenso wenig eine Grenze zwischen den Ringen *B* und *C*.
11) Astron. Nachrichten Bd. 36, pag. 180.
12) Journal des Savants für 1684, pag. 198.
13) Astron. Nachrichten Bd. 19, pag. 1.

Aus allem folgt, dass der Ring ein in seiner Form constantes, aber in seinen feineren Details etwas veränderliches Gebilde ist. Durch das fortwährende Auftreten und Verschwinden von neuen Theilungen schlossen PEIRCE und BOND auf eine flüssige Constitution des Ringes. Dass diese Annahme unzulässig ist, wurde schon von LAPLACE aus mechanischen Gründen festgestellt (vergl. den Artikel »Mechanik des Himmels, II. Bd., pag. 563).

Schon CASSINI hatte auf die Möglichkeit hingewiesen, dass der Saturnsring aus discreten Partikelchen bestehe. Später hatten MAXWELL und HIRN diese Ansicht zur Grundlage ihrer Theorie gemacht. SEELIGER bemerkt mit Recht[1]),dass die MAXWELL'sche Theorie, welche über die Constitution des Ringes ganz specielle Voraussetzungen macht, die mit der wirklichen Constitution wohl kaum auch nur eine entfernte Aehnlichkeit haben, als Begründung für die nicht homogene Constitution durchaus nicht beweisend sei. Er untersucht nun die Erscheinungen, die ein staubförmiger Ring in photometrischer Hinsicht darbieten würde, und erhält eine »so nahe Uebereinstimmung mit den beobachteten Thatsachen, dass in ihnen vielleicht der stärkste Beweis, der für diese spricht, erblickt werden kann.«

Hierfür spricht auch die Durchsichtigkeit des dunklen Ringes, welche gleich bei den ersten Beobachtungen auffiel, aber insbesondere von BARNARD 1889 November 1, 2 anlässlich des Durchganges des Japetus durch den Schatten des Saturnsystems beobachtet wurde. Nachdem der Trabant aus dem Schatten des Saturn herausgetreten war, war er bei dem Durchgange durch den Zwischenraum hell, und zwar von ziemlich gleicher Helligkeit. Beim Eintritt hinter den dunklen Ring verlor er nach und nach, aber nur wenig an Helligkeit, bis er an den hellen Ring kam, in welchem er schliesslich verschwand[2]). Hierbei zeigte sich also, dass der dunkle Ring in seinen dem Planeten zunächst liegenden Theilen fast alles Licht durchlässt und dass seine Undurchsichtigkeit mit der Annäherung an den hellen Ring successive zunimmt.

Nebst den Veränderungen innerhalb der einzelnen Ringe, welche sich durch das Auftreten und Verschwinden von Theilungen darbieten, sind jedoch auch Veränderungen in der Grösse der Ringe selbst beobachtet worden. Aus der allerdings nicht unanfechtbaren Zusammenstellung von O. STRUVE (vergl. den Briefwechsel zwischen O. STRUVE und F. KAISER aus dem Jahre 1855 über diesen Gegenstand) geht hervor, dass der Durchmesser des ganzen Ringsystems sich allmählig zu verkleinern scheint, wenn auch bei der Ungenauigkeit der älteren Bestimmungen das Resultat nicht sehr sicher ist. Auffälliger tritt die Annäherung der inneren Grenze des Ringes B an den Saturn hervor. Die STRUVE'sche Zusammenstellung giebt die folgenden Resultate:

	$ad:dg$		$ad:dg$
HUYGENS 1657 .	1·41	W. STRUVE 1826 . . .	0·64
CASSINI 1695 .	1·18	ENCKE und GALLE 1838	0·57
BRADLEY 1719 .	0·95	O. STRUVE 1851 . . .	0·49
HERSCHEL 1799 .	0·86		

Hierzu kommt noch die Messung von SECCHI[3]) 0·53.

Die Annäherung ist jedoch nicht gleichmässig, sondern etwas beschleunigt, und scheint auch die Ringe A und B ungleichmässig zu betreffen. Es ist nach:

---

[1]) »Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen, insbesondere des Saturnsringes«, Abhandlungen der königl. bayerischen Academie der Wissenschaften, I. Klasse XVIII. Bd., 1. Abtheilung, pag. 29.

[2]) Astron. Nachrichten Bd. 137, pag. 245.

[3]) Astron. Nachrichten Bd. 16, pag. 50.

	die Breite von A	von B	Zwischenraum
W. Struve 1826	2″·40	3″·91	0″·41
Encke 1837 . .	2·62	4·00	0·77
O. Struve 1851	2·30	4·62	0·49
Secchi 1852 . .	2·79	—	—

so dass sich die Verbreiterung wesentlich auf den Ring B bezieht, während der Ring A nicht oder doch nur sehr wenig an Breite zunimmt.

Saturn wird von acht Satelliten umkreist. Der zuerst bekannte, der Reihenfolge der Entfernung vom Hauptplaneten nach der sechste, Titan, wurde von Huygens am 25. März 1655 entdeckt. Der zunächst gesehene war der äusserste, Japetus, welcher von Cassini im October 1671 entdeckt wurde. Cassini fand bald darauf, 1672 December 23, den fünften, Rhea, und im März 1684 den dritten, Tethys, und vierten, Dione. Die beiden innersten, Mimas und Enceladus, fand Herschel 1789 August 28 und September 17. Der letzte, kleinste (der siebente), Hyperion, wurde erst 1848 September 16 von Bond in Cambridge und unabhängig von diesem zwei Tage darauf (September 18) von Lassell in Starfield bei Liverpool entdeckt[1]).

Elemente der Satelliten wurden mehrfach berechnet. Für Titan waren die Untersuchungen von Bessel grundlegend, und sind die Elemente desselben auch noch heute zu allen Untersuchungen über die Bewegung der Saturnsatelliten vollständig ausreichend. Die Bahnen der übrigen können noch nicht als definitiv angesehen werden.

Eingehendere Untersuchungen über die gegenseitigen Einwirkungen der Satelliten erstrecken sich hauptsächlich auf das System Mimas-Tethys einerseits und Enceladus-Dione andererseits, deren mittlere Bewegungen in einem commensurabeln Verhältniss stehen. Untersuchungen dieser Art wurden von H. Struve[2]) veröffentlicht. Ueber die Störung in der Bewegung des Hyperion s. den Artikel »Mechanik des Himmels«, II. Bd., pag. 464. Die von d'Arrest angegebene Periode von 465¾ Tagen, innerhalb deren die vier innersten Satelliten bezw. 494, 340, 247 und 170 Umläufe vollführen, hat, vorläufig wenigstens, praktisch keine Bedeutung, da die Coëfficienten von höherer Ordnung in den Excentricitäten sind.

Die Satelliten zeigen periodische Veränderungen in der Lichtintensität. Jaques Cassini bemerkte, dass Titan auf der Ostseite des Saturn an Intensität abnimmt, und Herschel[3]) und Schröter[4]) machten dieselbe Bemerkung für die übrigen Satelliten, so dass der Wechsel der Lichtintensität sich innerhalb eines

---

[1]) Bemerkt mag hier eine Notiz von Bode aus dem Berliner Astr. Jahrbuch für 1789 pag. 174 werden, nach welcher in einer Tübinger gelehrten Zeitung vom März 1754 zu lesen war, dass ein gewisser Hieronymus Altobelli am 17. April 1610 von Padua an Galilei schrieb: »*che cinque pianete si aggiorno a Saturno.*« Bode fügt hinzu: Merkwürdig bleibt es immer, dass Altobelli ein halbes Jahrhundert zuvor, ehe die sämmtlichen Saturnstrabanten entdeckt wurden, solche auch selbst der Anzahl nach zu errathen das Glück hatte.« Heute allerdings kann man hinzufügen, dass es wahrscheinlich nur eine Folge der damals bekannten »sämmtlichen 5 Saturnsatelliten« war, dass eine solche Notiz in der Tübinger gelehrten Zeitung erschien.

Die jetzt gebräuchlichen Namen erhielten die Saturnsatelliten von Herschel (Astr. Nachrichten Bd. 28, pag. 24).

[2]) Astron. Nachrichten, Bd. 123, pag. 257 und Bd. 125, pag. 97.

[3]) Berliner Astron. Jahrbuch für 1796, pag. 94.

[4]) Berliner Astron. Jahrbuch für 1800, pag. 169.

synodischen Umlaufes vollzieht, woraus wieder geschlossen werden kann, dass die Rotationszeit der Satelliten gleich ihrer Umlaufszeit um den Hauptplaneten ist.

Untersuchungen über die absolute Helligkeit, um daraus auf die Grösse der Satelliten zu schliessen, wurden von PICKERING vorgenommen. Hiernach schwanken die Halbmesser zwischen 310 *km* (Hyperion) bis 2200 *km* (Titan). Direkte Messung des Durchmessers des Titan ergab für diesen $\frac{1}{2}''$, daher für den absoluten Durchmesser etwa 3500 *km*, ein Werth, der in Folge der Unsicherheit in der Messung so kleiner Winkel kaum sicherer ist, wie der aus photometrischen Bestimmungen abgeleitete.

Uranus.

Der erste, nicht zu den im Alterthume bekannten Planeten gehörige ist Uranus. Er wurde am 13. März 1781 von W. HERSCHEL in Bath als ein Stern sechster Grösse in den Zwillingen entdeckt, dessen Scheibe bei stärkeren Vergrösserungen zunahm, während die Lichtintensität abnahm. HERSCHEL hielt ihn für einen Kometen. Aus den ersten Beobachtungen von HERSCHEL, dann von MASKELYNE am 17. März und LALANDE am 16. April wurde auch zunächst eine parabolische Bahn abzuleiten versucht. Als die mehrfachen Versuche ein positives Resultat nicht ergaben, und LAPLACE einen sich den Beobachtungen weit besser anschmiegenden Kreis fand, wurde die planetarische Natur des neuen Himmelskörpers, welche übrigens aus dem Aussehen desselben schon früher von BODE vermuthet worden war, sichergestellt. HERSCHEL nannte den neuen Stern *Georgium Sidus*; von LALANDE wurde der Name des Entdeckers vorgeschlagen; bald aber fand der von BODE vorgeschlagene Name Uranus allgemeinen Eingang.

Da der Planet unter günstigen Umständen bis zur sechsten Grösse werden kann[1]), so lag es nahe zu vermuten, dass schon früher Beobachtungen des Gestirns angestellt worden waren, ohne dass die Natur des beobachteten Objektes erkannt worden wäre. Die Untersuchungen zeigten in der That, dass bereits eine grössere Anzahl von Beobachtungen des Uranus vorlagen. Chronologisch geordnet sind dieselben:

1690 September 23, nachweislich die erste Beobachtung des Uranus; von FLAMSTEED (der von ihm als 34 ♉ bezeichnete Stern). Von BODE im Berl. Astr. Jahrbuch für 1787, pag. 243 mitgetheilt.

1712 März 22 (April 2 n. S.); ebenfalls von FLAMSTEED durch einen merkwürdigen Zufall, indem er ein Paar Minuten zu früh an das Fernrohr kam, wo er ρ Leonis beobachten wollte. Von BURCKHARD in der Connaissance des Temps für 1820, pag. 408 mitgetheilt. Dieser Beobachtung wurde von BURCKHARD eine besondere Bedeutung beigemessen, da sie von einer anderen Beobachtung von LALANDE vom 13. April 1796 um einen vollen Umlauf entfernt war.

1715 März 4, 5, 10, ebenfalls von FLAMSTEED beobachtet; mitgetheilt von BURCKHARD ibid.

1748 Okt. 21 und 1750 Sept. 13 von BRADLEY. Mitgetheilt von BREEN in den Astron. Nachr., Bd. 61, pag. 367.

1750 Okt. 14 und December 3 von LE MONNIER. Mitgetheilt von BOUVARD im Berliner Astr. Jahrbuch für 1822, pag. 143.

1756 Sept. 25 von T. MAYER. Mitgetheilt von BODE im Berl. Astr. Jahrbuch für 1787, pag. 243.

---

1) HEIS sah ihn 1848, SCHMIDT 1874 mit freiem Auge.

1768 Dec. 23 und 30, 1769 Januar 15, 16, 20, 21, 22, 23 und später 1771 Dec. 18 von LE MONNIER. Mitgetheilt von BOUVARD im Berliner Astr. Jahrbuch für 1822, pag. 143. Nur durch den Umstand, dass LEMONNIER seine über einen Monat vertheilten 8 aufeinanderfolgenden Beobachtungen aus dem December 1768 und Januar 1769 nicht sofort reducirte, hatte er die Ortsveränderung des Gestirns nicht erkannt.

Ueber die Gestalt und Grösse des Uranus sind zahlreiche Messungen ausgeführt worden. Eine erschöpfende Zusammenstellung giebt SEELIGER[1]). Zieht man zu diesen Messungen noch diejenigen von DOBERCK aus dem Jahre 1868[2]), ferner die Beobachtungen von SEELIGER und diejenigen von SCHIAPARELLI[3]) aus dem Jahre 1884 hinzu, so erhält man als Mittelwerth $3''\cdot782$.

Eine Abplattung wurde wiederholt angegeben. Schon HERSCHEL hat eine solche bemerkt; er giebt sie zu $\frac{1}{10}$ an; die Messungen von MÄDLER ergaben $\frac{1}{9\cdot49}$ bis $\frac{1}{10\cdot85}$ SCHIAPARELLI fand 1883: $\frac{1}{10\cdot9}$ und 1884: $\frac{1}{13}$. Die Messungen von SEELIGER ergaben kein positives Resultat.

Die Masse des Planeten wurde bald nach der Entdeckung der Satelliten bestimmt; der jetzt adoptirte Werth $\frac{1}{22600}$ ist der von NEWCOMB berechnete.

Flecken und Streifen wurden auf dem Uranus von einzelnen Beobachtern gesehen; aus den bisherigen Beobachtungen ist kein sicherer Schluss auf eine Rotation zu ziehen.

Sechs Jahre nach der Entdeckung des Uranus, am 11. Januar 1787, gelang es W. HERSCHEL, zwei Satelliten des Uranus zu entdecken[4]); es sind die beiden äusseren Titania und Oberon; sie können nur mit grösseren Fernrohren gesehen werden. 1790 und 1794 glaubte HERSCHEL noch vier andere Satelliten gesehen zu haben; doch erklärte er dies später als eine Täuschung. Die zwei inneren, Ariel und Umbriel wurden von LASSELL am 24. October 1851 entdeckt[5]). Spätere Untersuchungen mit den grossen Refraktoren ergaben, dass es ausser diesen vier keine mit Instrumenten der jetzigen Grösse sichtbare Uranusmonde giebt. Die beiden inneren gehören zu den am schwierigsten zu beobachtenden Objecten; die beiden äusseren wurden von VOGEL in Bothkamp mit einem Refraktor von 29·5 *cm* Oeffnung beobachtet.

PICKERING suchte auf photometrischem Wege die Durchmesser der Satelliten festzustellen. Er fand für Titania den Durchmesser 940, für Oberon 870 *km*.

Besonders bemerkenswerth ist, dass die Satelliten des Uranus sich nicht in der Ebene des Hauptplaneten oder in einer zu dieser wenig geneigten Ebene bewegen, sondern dass die Neigungen ihrer Bahnebenen sehr gross, nahe 90° sind.

Neptun.

Ueber die Entdeckung des Neptun mag hier nur in Kürze das Folgende zusammenfassend recapitulirt werden:

Schon BOUVARD machte 1821 darauf aufmerksam, dass sich die Uranusbeobachtungen vor 1781 und diejenigen nach 1781 nicht durch dasselbe Elementensystem darstellen liessen. Später hatte AIRY gezeigt, dass die Beobach-

---

[1]) Ueber die Gestalt des Planeten Uranus; Sitzungsber. der mathematisch-physikal. Klasse der königl. bayerischen Academie der Wissenschaften, 1884, Heft 2, pag. 267.

[2]) Astron. Nachr. Bd. 92, pag. 159.

[3]) Astron. Nachr. Bd. 109, pag. 242.

[4]) Conn. des Temps für 1789, pag. 378.

[5]) Astron. Nachr. Bd. 33, pag. 259.

tungen aus den Oppositionen zwischen 1833 bis 1837 die Nothwendigkeit einer Vergrösserung der Radienvectoren gegenüber den Tafelwerthen anzeigten, welche bedeutender als die Entfernung des Mondes von der Erde wäre. Und schon BOUVARD 1834 und MÄDLER 1840 äusserten die Meinung, dass dieses die Folge von Störungen durch einen ausserhalb der Uranusbahn sich bewegenden Planeten wäre. Die Fehler der BOUVARD'schen Tafeln betrugen 1830 bereits 20", 1840 waren dieselben auf 90", 1844 auf 120" angewachsen.

BESSEL veranlasste schon 1838 Untersuchungen über die Ursachen dieser Störungen, die aber nach seinem Tode nicht fortgeführt wurden. Erst 1843 unternahm ADAMS, angeregt durch eine Rede AIRY's und 1845 LE VERRIER auf Veranlassung von ARAGO ausgedehnte Untersuchungen. 1846 Aug. 4 und 12 wurde nun von CHALLIS an einem nach den Berechnungen von ADAMS bestimmten Orte ein sonst nicht beobachtetes Object gefunden; die Reduction der Beobachtungen, welche den planetarischen Charakter des Objects ergeben hätten, wurden aber nicht sofort vorgenommen, und so kam es, dass inzwischen am 23. September desselben Jahres GALLE den Planeten an dem von LE VERRIER berechneten Orte als Stern 8. Grösse mit der eben fertiggestellten, aber noch nicht ausgegebenen Berliner akademischen Sternkarte hora XXI fand. ARAGO, dem LE VERRIER die Benennung des neuen Planeten übertragen hatte, wollte ihn mit dem Namen Le Verrier benennen; doch wurde der Name Neptun, nachdem sich CHALLIS, ADAMS, STRUVE u. a. für diesen entschieden hatten, allgemein angenommen.

Auch Neptun war bereits früher beobachtet worden:

1795 Mai 8 und 10 von LALANDE; erwähnt von PETERSEN Astr. Nachrichten, Bd. 25, pag. 306,

1845 Oktober 25, 1846 Sept. 7 und 11 von LAMONT; erwähnt von HIND, Monthly Notices, Bd. 10, pag. 42 und Bd. 11, pag. 11;

die sofortige Reduction hätte auch hier den planetarischen Charakter des beobachteten Objects unmittelbar feststellen lassen.

Der Durchmesser des Planeten wurde von HIND, CHALLIS, MÄDLER, BOND, LASSELL, O. STRUVE, KAISER u. a. gemessen. Im Mittel ergiebt sich für die Entfernung 1 der Werth 2"·761.

Die Masse des Neptun wurde aus der Umlaufszeit seines Trabanten bestimmt. PEIRCE fand[1]) $\frac{1}{18700}$; O. STRUVE[2]) $\frac{1}{14500}$; HIND[3]) $\frac{1}{17900}$; NEWCOMB $\frac{1}{19380}$[4]). SAFFORD berechnete die Masse aus den Störungen des Uranus gleich $\frac{1}{20000}$[5]).

Eine Abplattung des Neptun wurde bisher nicht beobachtet. Die von LASSELL am 3. Oktober 1846 gemachte Beobachtung eines Ringes[6]), obwohl auch anfänglich von CHALLIS wahrgenommen[7]), hat sich nicht bestätigt.

Ueber Flecke, Rotationsdauer und Axenlage ist bisher nichts bekannt.

Schon 1846 Oktober 10, November 11, 30, December 3 sah LASSELL ein den Neptun begleitendes kleines Sternchen; aber erst im folgenden Jahre, 1847 Juli 7, 8, 22, erhielt er die Gewissheit, dass es ein Satellit des Neptun wäre[8]).

---

1) Monthly Notices Bd. 8, pag. 128.

2) Astr. Nachr. Bd. 27, pag. 74; Compt. rend. Bd. 25, pag. 814.

3) Monthly Notices Bd. 9, pag. 202.

4) Astr. Nachr. Bd. 36, pag. 208.

5) Monthly Notices Bd. 22, pag. 144.

6) Astr. Nachr. Bd. 25, pag. 197.

7) Astr. Nachr. Bd. 25, pag. 231.

8) Astr. Nachr. Bd. 26, pag. 165.

BOND glaubte bald darauf einen zweiten Satelliten gesehen zu haben[1]) und auch LASSELL vermuthete (Beobachtung vom 13. August 1850) einen zweiten[2]). Doch bestätigte sich die Vermuthung nicht, und später[3]) wird immer nur noch von einem Satelliten gesprochen, und im Jahre 1853[4]) sprach er sich ganz entschieden dahin aus, dass ein zweiter Satellit, der mit dem einen sicher vorhandenen an Lichtstärke und Grösse vergleichbar wäre, gewiss nicht vorhanden ist.

Während der Beobachtungen des Jahres 1862 hatte LASSELL den Eindruck gewonnen. als ob der Satellit in verschiedenen Theilen seiner Bahn verschieden hell wäre[5]), doch ist über eine Rotation noch nichts Gewisses bekannt.

Die ersten Elemente des Satelliten rechnete PEIRCE unter der Annahme einer direkten Bewegung. STRUVE[6]) liess die Frage noch unentschieden. HIND vermuthete eine retrograde Bewegung und berechnete Elemente[7]) unter dieser Voraussetzung. Sie wurde auch durch die späteren Untersuchungen von NEWCOMB bestätigt[8]). Die Neigung der Bahn des Neptunssatelliten weicht von der direkten Bewegung noch stärker ab, wie diejenige der Uranussatelliten; sie ist für jenen 144°.

Nach PICKERING's photometrischen Untersuchungen beträgt der Durchmesser des Satelliten etwa 3600 *km*.

Intramercurieller und transneptunischer Planet.

Die von LE VERRIER gefundene Nichtübereinstimmung der empirisch gefundenen Secularbewegung des Mercurperihels mit der aus theoretischen Untersuchungen sich ergebenden (vergl. die hierüber bereits gemachten Bemerkungen im II. Bande, pag. 396) führten LE VERRIER zu der Ansicht, dass innerhalb des Mercur noch entweder ein einzelner Planet, oder aber eine grössere Anzahl von Körpern um die Sonne kreisen müssten, durch deren Wirkung jene Störung hervorgerufen würde. Je nach der Nähe dieser Körper zur Sonne werden dieselben eine verschieden rasche Bewegung, also Umlaufszeit haben, und je nach der Lage ihrer Bahn auch zu gewissen Zeiten vor der Sonnenscheibe oder bei Finsternissen in der Nähe der Sonne gesehen werden müssen. Die Nachforschungen nach einem solchen intramercuriellen Planeten erstreckten sich daher nach diesen zwei Richtungen.

Körper vor der Sonnenscheibe wurden schon früher wiederholt gesehen. Nur blieb dabei die Frage offen, ob es wirklich Körper vor der Sonnenscheibe (die Sonne umkreisende Himmelskörper) oder auf der Sonnenscheibe (Sonnenflecke) waren. Letztere legen ihren Weg auf der Sonnenoberfläche (von einem Rande zum andern) in 13 Tagen zurück, Planeten müssen diesen Weg natürlich in viel kürzerer Zeit (in wenigen Stunden) zurückgelegt haben.

C. H. F. PETERS beobachtete mehrere Körperchen, die vor der Sonne vorübergingen; er sah aber auch solche vor dem Monde, und glaubt, dass es vorüberfliegende Zugvögel waren[9]).

---

1) ibid. Bd. 26, pag. 290.
2) Astr. Nachr. Bd. 31, pag. 143.
3) ibid. Bd. 32, pag. 241 u. Bd. 36, pag. 93.
4) ibid. Bd. 63, pag. 372.
5) Astr. Nachr. Bd. 36, pag. 95.
6) Astr. Nachr. Bd. 27, pag. 73.
7) Astr. Nachr. Bd. 39, pag. 134.
8) Monthly Notices Bd. 36, pag. 208.
9) Astr. Nachr. Bd. 74, pag. 29.

Eine Zusammenstellung der als Vorübergänge von Himmelskörpern vor der Sonnenscheibe gedeuteten Beobachtungen gab LE VERRIER[1]), welcher die folgenden Daten entnommen sind:

1) 1761 Juni 6; SCHEUTEN in Crefeld bei Düsseldorf; vom Beobachter als der Vorübergang eines Venusmondes vor der Sonne gedeutet.
2) 1762 Ende Februar; JOH. CHRIST. STAUDACHER in Nürnberg.
3) 1762 November 19; von LICHTENBERG mit freiem Auge gesehen; eine Sehne von 70° wurde auf der Sonnenscheibe in 3 Stunden zurückgelegt.
4) 1764 Mai 1 bis 5; von HOFMANN in Georgenthal bei Gotha.
5) 1777 Juni 17; MESSIER. Die Beobachtung erstreckte sich nur über 5 Minuten, giebt also über den Ort des Körpers keinen Aufschluss.
6) 1798 Januar 18; d'ANGOS.
7) 1800 März 29; Pastor FRITSCH zu Quedlinburg. In 6 Stunden wurden $\frac{3}{4}$ der Sonnenscheibe passirt.
8) 1802 Oktober 10; Pastor FRITSCH zu Quedlinburg.
9) 1818 Januar 6; Capt. LOFT in Ipswich.
10) 1819 Juni 26; STARK in Augsburg. Auch von GRUITHUISEN beobachtet; vergl. No. 16.
11) 1819 Oktober 9; STARK in Augsburg.
12) 1820 Febr. 12; STEINHEIL und STARK.
13) 1823 December 23; PONS (durch Sonnenflecke zu erklären).
14) 1826 Juli 31; STARK.
15) 1831; WARTMANN (vergl. v. OPPOLZER in »Astr. Nachr.« Bd. 97, pag. 253).
16) 1834 und 1836; PASTORFF und BUCHHOLZ. In den »Compt. rend.« Bd. 49, pag. 810 führt HERRICK noch eine grössere Anzahl von angeblich einem Planeten angehörigen Beobachtungen von PASTORFF und BUCHHOLZ an; ferner eine vom 26. Juni 1819 von GRUITHUISEN, welche wahrscheinlich mit No. 10 identisch ist.
17) 1839 Oktober 2; DECUPPIS am Collegio Romano.
18) 1845 Mai 11; CAPOCCI (Monthly Notices, No. 549).
19) 1847 Ende Juni und Anfang Juli; SCOTT und WRAY.
20) 1847 Oktober 11; JUL. SCHMIDT.
21) 1849 März 12; SIDEBOTHAM.
22) 1855 Juni 11; RITTER in Porta Danzo bei Neapel.
23) 1857 Sept. 12; OHRT in Wandsbeck (Holstein).
24) 1859 März 26; LESCARBAULT in Orgère (Dep. Eure et Loire). Eintritt $4^h 8^m 11^s$ M. Z. Paris im Positionswinkel 302° 37'·5; Austritt $5^h 25^m 18^s$ M. Z. Paris im Positionswinkel 94° 15'·0.
25) 1862 März 20; LUMMIS in Manchester. In 20^m wurde ein Weg von 12' zurückgelegt.
26) 1865 Mai 8; COUMBARY in Constantinopel. Ein Fleck, der in 48^m von einem Rand zum andern kam.
27) 1869 Juli 5; WEBER in Pekeloh Meteore vor der Sonne (Wochenschrift für Astronomie 1869, pag. 279).
28) 1876 April 4; WEBER (einfache Sonnenflecke).

Insbesondere der Beobachtung von LESCARBAULT am 26. März 1859[2]) wurde wegen ihrer grossen Ausführlichkeit ein bedeutendes Gewicht beigelegt, und

[1]) Compt. rend. Bd. 50, pag. 583.
[2]) Compt. rend. Bd. 50, pag. 43.

ARAGO nannte den vermeintlichen Planeten in seiner Anzeige im Bulletin international de l'Observatoire de Paris 1860: »Planète Lescarbault.«

LE VERRIER rechnete sofort unter der Annahme einer Kreisbahn[1]) Elemente und später[2]) mit Hinzuziehung auch der übrigen Beobachtungen mehrere Bahnen. Wie natürlich ergaben sich verschiedene Bahnen, je nachdem verschiedene von den sehr zahlreichen Beobachtungen combinirt wurden. Die Ursache konnte aber ebensowohl darin gelegen sein, dass die Beobachtungen thatsächlich verschiedenen intramercuriellen Planeten angehörten, als auch dem Umstande, dass sie überhaupt keinem intramercuriellen Planeten angehörten. Diese Frage blieb unentschieden und die Realität des oder der Planeten wurde mehrfach angezweifelt. NEWCOMB[3]) bemerkte 1861, dass ein einzelner Planet von der Albedo des Saturn und $\frac{1}{400}$ seines Durchmessers in der Entfernung 0·15 von der Sonne so glänzen müsste, wie Saturn in der Opposition. Mit der Dichte gleich 120 mal der Saturnsdichte wäre seine Masse noch $\frac{1}{500000}$ der Saturnsmasse. Aber ein Planet, der die von LE VERRIER angezeigte Bewegung des Mercurperihels erzeugen würde, müsste in dieser Entfernung eine Masse gleich $\frac{1}{650}$ der Saturnsmasse besitzen. Es erschien daher wahrscheinlicher, dass man es mit einer grösseren Anzahl kleinerer Planeten zu thun habe, deren Zahl aber dann mehrere hundert betragen müsste. Diese aber würden dann eine Bewegung im Knoten von 34° erzeugen. 1869 machte er dann den Vorschlag[4]), während der Finsternisse die Sonnencorona und die Sonnenumgebung zur Aufsuchung dieses vermeintlichen, Vulcan genannten Planeten zu durchforschen.

Dieser Vorschlag führte 1878 Juli 29 zur vermeintlichen Entdeckung eines bis dahin nicht beobachteten Sternes durch WATSON und SWIFT[5]), wodurch die Lösung der Frage neuerdings in Fluss kam. Zunächst gab GAILLOT[6]) Elemente des Vulcan, und bald darauf[7]) beschäftigte sich auch v. OPPOLZER mit der Frage.

Die Untersuchungen waren aber von einem durchweg negativen Erfolg begleitet, und ist bis jetzt etwas sicheres über einen intramercuriellen Planeten nicht bekannt.

Auch jenseits des Neptun hat man bereits einen weiteren Planeten vermuthet: FORBES in Glasgow aus Störungen von Kometen; BABINET[8]) glaubte, dass die Störungen des Uranus sich durch die Annahme einer einzigen störenden Masse (des Neptun) nicht erklären liessen. Ferner liegen zwei Beobachtungen eines Sternes vom 16. und 22. October 1850 von FERGUSSON vor, welchen dieser bei Gelegenheit seiner Hygieabeobachtungen fand, der aber später nicht wiedergesehen wurde. D'ARREST meinte nun[9]), dass sich dessen Eigenbewegung mit einem Planeten diesseits des Jupiter nicht vereinigen liesse, und dass, wenn die angegebenen Positionen wirklich nicht mit Fehlern behaftet sind, der Planet jenseits des Neptun liegen müsse.

---

1) ibid. Bd. 50, pag. 46.

2) ibid. Bd. 50, pag. 623, 647 und 723.

3) Astronomical Journal Bd. VI, pag. 162.

4) American Journal of Sciences and Arts, II. Serie Bd. 47, pag. 413.

5) Compt. rend. Bd. 87, pag. 427 und 515; Astron. Nachrichten Bd. 93, pag. 161.

6) Compt. rend. Bd. 87, pag. 485.

7) Compt. rend. Bd. 88, pag. 26.

8) Compt. rend. Bd. 27, pag. 202.

9) Astron. Nachrichten Bd. 33, pag. 406.

Allein bisher liegt keinerlei Grund vor, einen Planeten jenseits des Neptun vorauszusetzen. Bei den Schlüssen von BABINET ist, wie LE VERRIER andeutet, die Einbildungskraft viel zu sehr betheiligt, wobei auch, wie aus seiner sehr oberflächlichen Schlussweise folgt, der fehlende Ueberblick über die Grenzen, innerhalb welcher Elemente eines Planeten, der nur in einem sehr kleinen Theile seiner Bahn beobachtet worden, geändert werden können, ohne dass die Beobachtungen wesentlich schlechter dargestellt werden, eine bedeutende Rolle spielt; und bezüglich der Beobachtungen von FERGUSSON scheint der Schluss von D'ARREST, da er sich auf nur zwei Beobachtungen stützt, doch kaum genügend begründet.

Auch NEWCOMB fand bei seinen späteren Untersuchungen, dass man vorläufig die Uranus- sowie die Neptunsorte ohne jedwede Hypothese genügend darstellen kann[1]).

Planetoiden.

Die grosse Lücke zwischen Mars und Jupiter wurde Veranlassung einer Vereinigung von Astronomen unter v. ZACH und SCHRÖTER, welche es sich zum Ziele setzte, die Gegend der Ekliptik systematisch nach dem noch fehlenden Gliede des Sonnensystemes zu suchen. Vierundzwanzig Astronomen sollten sich in diese Aufgabe theilen, und einer derselben war PIAZZI, der brieflich von v. ZACH benachrichtigt wurde. Ehe er aber noch den Brief erhielt, hatte er bereits am 1. Januar 1801 einen Stern achter Grösse gefunden, den er bis zum 11. Januar verfolgte. Am 23. Januar benachrichtigte er ORIANI, am folgenden Tage BODE. Die Briefe kamen aber in Folge der Kriegsunruhen erst am 20. März, bezw. am 5. April an, und so kam es, dass das Gestirn in diesem Jahre nicht weiter beobachtet werden konnte. Anfänglich wurde dasselbe für einen Kometen gehalten; da aber eine Parabel den Beobachtungen nicht genügte, sich hingegen eine Kreisbahn finden liess, welche die Beobachtungen genähert darstellte, so wurde die Annahme, dass man es mit einem Kometen zu thun habe, bald fallen gelassen. Die Kreisbahn versetzte das neue Gestirn zwischen Mars und Jupiter und so war man überzeugt, nunmehr das fehlende Glied in der Kette der Planeten gefunden zu haben[2]). In Folge der Verspätung der Briefe waren die Beobachtungen nur wenig zahlreich und mit Rücksicht auf die Schwäche des Planeten war die Voraussetzung der Wiederauffindung des Gestirnes äusserst gering. Es gelang jedoch GAUSS mit Hilfe seiner zu diesem Zwecke ersonnenen Methode der Bahnbestimmung aus den wenig zahlreichen, und auf einen geringen Theil des Umkreises vertheilten Beobachtungen eine elliptische Bahn zu berechnen, mit Hilfe welcher die Vorausberechnung der Ephemeride den Planetenort so nahe ergab, dass OLBERS den Planeten, welcher den Namen *Ceres* erhielt, gerade ein Jahr nach seiner Entdeckung (am 1. Januar 1802) wieder fand.

Nicht lange Zeit nachher, am 28. März 1802 fand OLBERS ein zweites Gestirn, für welches GAUSS sofort auch nach seiner Methode die Bahn berechnete;

---

[1]) Vergl. die Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft I. Bd., pag. 228.

[2]) Es mag auch hier auf das eigenthümliche Missgeschick hingewiesen werden, welches einen der grössten Scholastiker des neunzehnten Jahrhunderts durch diese Planetenentdeckung betraf. HEGEL glaubte nämlich auf dem von ihm betretenen philosophischen Wege den Beweis liefern zu können, dass die Bemühungen der Astronomen zur Auffindung eines Planeten zwischen Mars und Jupiter aussichtslos seien. Das Werk wurde in Bonn 1801 gedruckt, als unglücklicherweise für den Autor bereits die Existenz des als unmöglich zu erweisenden Objektes am Himmel erwiesen war.

auffällig war hierbei die grosse Neigung der Bahn (nahe 35°), welche dieses Gestirn scheinbar doch von den übrigen Planeten trennte. Da aber trotz der grossen Neigung dieser neue Planet, *Pallas*, dem früher entdeckten sehr nahe kam, so nahm Olbers an, dass es sich in diesem Falle um zwei Fragmente eines und desselben durch äussere Kräfte zertheilten Planeten handelte, wodurch auch das Vorhandensein zweier Planeten an einer Stelle, wo doch nach aller Voraussetzung nur ein Planet hingehörte, gerechtfertigt erschien. Als aber Harding am 1. September 1804 einen dritten Planeten, *Juno* genannt, entdeckte und Olbers am 29. März 1807 einen vierten, *Vesta*, von denen wohl noch der dritte, keinesfalls aber der vierte als Bruchstücke desselben Körpers aufgefasst werden konnte, musste doch die Ansicht von der ursprünglichen Existenz nur eines Planeten zwischen Mars und Jupiter aufgegeben werden. Indessen, die Erwartung, dass es noch andere zu dieser Gruppe gehörige Planeten geben könne, blieb vorerst unerfüllt, und durch die nächstfolgenden 38 Jahre gewöhnte man sich daran, den Ring zwischen Mars und Jupiter durch die Bahnen von vier Himmelskörpern eingenommen zu denken.

Erst Ende des Jahres 1845, am 8. Dezember gelang eine neue Planetenentdeckung. Sie wurde von Hencke in Driesen gemacht, und zwar zum ersten Male nach der bereits erwähnten, bis in die neueste Zeit stets befolgten Methode: durch Vergleich von Sternkarten mit dem Himmel. Von da ab mehrten sich die Entdeckungen von Planetoiden (dieses der Name, welchen die mitunter überaus kleinen Gestirne zwischen Mars und Jupiter erhielten; auch der Name Asteroiden ist vielfach für dieselbe zur Anwendung gekommen) ausserordentlich rasch, so dass deren Zahl bis Ende 1896, mit Ausschluss der nur ein oder zweimal beobachteten, deren Bahn nicht bestimmt werden konnte, auf 436 angewachsen ist. Es wurden entdeckt:

1845	1	1859	1	1872	11	1884	9
1847	3	1860	5	1873	6	1885	9
1848	1	1861	10	1874	6	1886	11
1849	1	1862	5	1875	17	1887	7
1850	3	1863	2	1876	12	1888	10
1851	2	1864	3	1877	10	1889	6
1852	8	1865	3	1878	12	1890	15
1853	4	1866	6	1879	20	1891	21
1854	6	1867	4	1880	8	1892	30
1855	4	1868	12	1881	1	1893	26
1856	5	1869	2	1882	11	1894	22
1857	9	1870	3	1883	4	1895	11.
1858	5	1871	5				

Der erste auf photographischem Wege entdeckte Planet war der von Wolf in Heidelberg am 22. December 1891 entdeckte (323) *Brucia*.

Im Anfange wurden die Planetoiden mit Namen belegt, und jedem, so wie den acht Hauptplaneten ein Zeichen gegeben. In Folge der grossen Zunahme ihrer Zahl erwies sich die von Encke zuerst im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1854 gewählte Bezeichnung derselben durch in einen kleinen Kreis eingeschlossene Zahlen sehr vortheilhaft. Encke begann dabei die Zählung mit der 1845 von Hencke entdeckten *Astraea*, welche ursprünglich die Bezeichnung

(1) erhielt. Später wurde der Vorschlag von GOULD, die Zählung von *Ceres* anzufangen[1]) adoptirt, so dass *Astraea* die Nummer (5) erhielt.

Die Zahlen geben im allgemeinen die Reihenfolge der Entdeckung. Da aber ein am 9. September 1857 von GOLDSCHMIDT entdeckter Planet für (41) gehalten wurde, und keine neue Nummer erhielt, dieser Irrthum aber erst Ende 1858 bemerkt worden war, als bereits neue andere Planeten die Nummern (47) bis (55) erhalten hatten, so bekam dieser Planet, *Melete*, die Nummer (56). Später wiederholte sich dieser Vorgang, wie aus der am Ende des Handwörterbuches beigegebenen Tafel der kleinen Planeten ersichtlich ist, noch einige Mal.

Im Anschlusse an die im Artikel »Kometen und Meteore« gegebene Zusammenstellung über die Kometen wurde bereits zum Vergleiche eine ähnliche Zusammenstellung für die Planetoiden, und zwar ebenfalls der bis Ende 1895 entdeckten, gegeben[2]). Nur bezüglich der mittleren Bewegungen mag noch das folgende erwähnt werden: Sie sind

	kleiner als		500″	für	5	Planeten
zwischen	500″	und	599″·9	„	11	„
„	600	„	699·9	„	101	„
„	700	„	799·9	„	118	„
„	800	„	899·9	„	78	„
„	900	„	999·9	„	65	„
„	1000	„	1099·9	„	27	„
über	1100	„		„	4	„

Die Grösse und Helligkeit der einzelnen Planeten ist sehr verschieden. Direkte Bestimmungen von Durchmessern wurden wohl auch mehrfach vorgenommen, doch sind die Bestimmungen in Anbetracht der Kleinheit derselben sehr ungenau.

Die Helligkeit der Planeten hängt (abgesehen von der Phase) von der Entfernung der Planeten von der Sonne und Erde ab. Für die Helligkeit war das Verhältniss

$$H = \frac{H_0}{r^2 \Delta^2}$$

angegeben, wobei H_0 die Helligkeit in der Entfernung 1 von der Sonne und von der Erde bedeutet. Ebenso erhält man für die Helligkeit des Planeten in der Entfernung a (halbe grosse Axe) von der Sonne und $a - 1$ von der Erde, d. i. in der mittleren Opposition, wenn man diese als Einheit annimmt

$$H_1 = 1 = \frac{H_0}{a^2 (a - 1)^2},$$

demnach

$$H = \frac{a^2 (a - 1)^2}{r^2 \Delta^2}.$$

An Stelle der Helligkeit des Planeten wird aber die Grösse desselben angegeben. Um die Helligkeit in dieser Skala auszudrücken, ist es erforderlich, das Verhältniss h der Helligkeit zweier aufeinanderfolgender Sternklassen zu kennen.

---

1) Astronomical Journal 1852, pag. 80.

2) Vergl. II. Bd., pag. 80—82; für 2 im Jahre 1895 entdeckte Planeten, für welche seither elliptische Elemente berechnet wurden, fallen die Neigungen zwischen 5 und 10°; von den Excentricitäten ist eine zwischen 0° und 5°, eine zwischen 5° und 10°.

Nun ist allerdings die Grösse des Sternes ein relativer Begriff, und die Grössenschätzungen verschiedener Beobachter stimmen nicht vollkommen überein, so dass z. B. HERSCHEL Sterne der zwanzigsten Grössenklasse angiebt, während man mit den grössten Fernröhren unserer Zeit etwa bis zur fünfzehnten Grösse gelangt. Die HERSCHEL'sche Skala ist aber von der jetzt allgemein angewendeten, von ARGELANDER in seiner »Bonner Durchmusterung« aufgestellten, etwas verschieden. Für das zuletzt verwendete System ist das Verhältniss der Helligkeit h zweier aufeinanderfolgender Grössenklassen derart, dass[1])

$$\log h = 0{\cdot}40$$

ist. Ist nun m_0 die Grösse des Planeten, welche der Helligkeit 1 entspricht, d. i. die mittlere Oppositionsgrösse, und M die Grösse in der Entfernung r von der Sonne, und Δ von der Erde, so wird

$$m_0 - M = \frac{\log H}{\log h}$$
$$M = m_0 - 2{\cdot}5 \log H$$

oder wenn man für H seinen Werth einsetzt:

$$M = m_0 + 5 \log r\Delta - 5 \log a(a-1).$$

Bezeichnet man die Constante

$$m_0 - 5 \log a(a-1) = g,$$

so wird

$$M = g + 5 \log r\Delta.$$

Der Werth von g kann aus den Beobachtungen selbst nach

$$g = M - 5 \log r\Delta$$

bestimmt werden, und damit erhält man dann die mittlere Oppositionsgrösse m_0 aus:

$$m_0 = g + 5 \log a(a-1).$$

Nebst den Elementen der kleinen Planeten giebt das »Berliner Astron. Jahrbuch« auch die Grössen g und m_0; die mittlere Oppositionsgrösse m_0 giebt einen ungefähren Maassstab für die Grösse der Planeten. Der hellste Planet ist (4) mit $m_0 = 6{\cdot}5$; hierauf folgen:

(1) mit	$m_0 = 7{\cdot}4$	(15) mit	$m_0 = 8{\cdot}6$
(2) „	8·0	(3) „	8·7
(7) „	8·4	(8) „	8·9
(6) „	8·5	(9) „	8·9;

Ferner 23 Planeten, für welche m_0 zwischen 9·0 und 9·9 ist; alle anderen sind schwächer als 10^m.

Die Masse der Planetoiden ist demgemäss auch nur sehr gering; daher auch die durch denselben bewirkten Störungen in der Bewegung der nächst gelegenen grossen Planeten Mars und Jupiter und noch viel mehr der übrigen. In ihrer Gesammtheit jedoch bilden die kleinen Planeten ein System, dessen störende Wirkung auf die grossen Planeten, wenigstens bei den secularen Störungen, merkliche Beträge geben könnte[2]). Hierzu aber würde nach dem jetzigen Stande

---

[1]) Vergl. v. OPPOLZER, »Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen«, 2. Aufl. I. Bd., pag. 265.

[2]) Vergl. LE VERRIER, Compt. rend. Bd. 37, pag. 793.

der Dinge zunächst eine umfassende Bearbeitung des Gesammtmateriales erforderlich sein.

Die Berechnung der Bahnen, die Vorausberechnung der Ephemeriden für die grosse Zahl der kleinen Planeten, erfordert selbstverständlich einen nicht unbedeutenden Aufwand an Zeit und Arbeitskraft, sodass an eine zusammenfassende Bearbeitung des Gesammtmaterials bisher nicht gedacht werden konnte. F. TIETJEN hat im »Berliner Astr. Jahrbuch« für 1890 den ersten Schritt zu einer Sichtung gethan, indem er unter der grossen Zahl der kleinen Planeten zunächst drei Gruppen, als zur Bearbeitung zunächst wichtig, hervorhob; nämlich 1) diejenigen, welche der Erde sehr nahe kommen, und sich zur Bestimmung der Sonnenparallaxe besonders eignen; 2) solche, welche dem Jupiter besonders nahe kommen, und zur Bestimmung der Jupitersmasse dienen können, und endlich 3) Planeten, welche eine grosse Helligkeit erlangen und zu photometrischen Untersuchungen geeignet sind. Einen ausführlicheren Plan hat sodann BAUSCHINGER[1]) für die Arbeit aufgestellt. Es sind 129 Planeten, welche bis 1896 in mindestens 6 Oppositionen beobachtet waren, die durch vollständige Störungsrechnungen verbunden sind (Gruppe *A*), 30 andere, welche genügend beobachtet, aber nicht genügend durch die Rechnung verfolgt sind (Gruppe *B*), sodann 113, für welche noch weitere Beobachtungen erforderlich sind (Gruppen *C* und *D*); endlich 57 Planeten, die erst in einer Opposition beobachtet waren (Gruppe *E*); diese sämmtlichen, nebst 14 Planeten, die ebenfalls nur in einer Opposition beobachtet waren aber seither als verloren anzusehen sind, sowie in derselben Weise die meisten der weiteren neu zu entdeckenden Planeten, bilden eine Gruppe, die an sich wenigstens nach dem bisherigen Stande der Frage keine Besonderheiten darbieten, und für welche die Rechnungen durch Bestimmung guter definitiver Elemente, eventuell Tafeln, so weit geführt werden soll, dass ihre Wiederauffindung ohne besondere Mühe jederzeit gesichert wäre. Für 13 Planeten (Gruppe *G*) sind bereits Tafeln berechnet, und 58 Planeten (Gruppe *H*)[2]) bieten insofern ein erhöhtes Interesse, als sie entweder dem Jupiter oder dem Mars sehr nahe kommen, oder aber eine sehr starke Neigung oder Excentricität haben, oder deren mittlere Bewegung in einem nahe commensurabeln Verhältniss zu derjenigen des Jupiter stehen.

1) Dem Jupiter kommen sehr nahe: 153, 190, 279, 334.
2) Dem Mars kommen sehr nahe: 149, 244, 254, 270, 281, 352.
3) Grosse Neigungen haben: 2, 31, 148, 164, 176, 183, 247.
4) Grosse Excentricität haben: 33, 164, 183.
5) Das Verhältniss der mittleren Bewegung zu derjenigen des Jupiter ist nahe 2 für die Planeten: 65, 76, 92, 106, 108, 121, 122, 154, 168, 175, 176, 184, 199, 225, 229, 260, 286, 300, 318, 325, 381.
6) Dieses Verhältniss ist nahe gleich 3 für die Planeten: 11, 17, 19, 42, 46, 79, 89, 118, 126, 138, 170, 178, 189, 198, 232, 248, 262, 292, 329, 335.

Hierzu wären noch die folgenden zehn[3]) hinzuzuziehen:

7) Diejenigen, deren mittlere Bewegung nahe die Hälfte derjenigen des Mars ist: 67, 142, 182.

---

1) Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft Bd. 31, pag. 284.

2) Nebst einem Planeten aus Gruppe *G*.

3) Nebst einem bereits unter 6 angeführten; HALL (Astron. Nachrichten Bd. 86, pag. 327) empfiehlt übrigens für die Bestimmung der Marsmasse die Planeten 20, 60, 83 und 118.

8) Diejenigen, deren mittlere Bewegung nahe der dritte Theil derjenigen des Mars ist: 106, 176, 199, 316.

Für diese Planeten wird eine fortgesetzte Verfolgung durch Beobachtung und Rechnung zur Lösung wichtiger theoretischer Fragen nöthig. Neue Gesichtspunkte eröffneten sich jedoch kürzlich durch die am 13. August 1898 erfolgte Entdeckung eines kleinen Planeten 1898 *DQ*, dessen Bahn zum grössten Theil innerhalb der Marsbahn liegt.

Der Planet, dem der Name Eros gegeben ist, wurde auf photographischem Wege von G. Witt in Berlin[1]) und fast gleichzeitig von Charlois in Nizza[2]) entdeckt. Schon die ersten Beobachtungen zeigten eine auffallend grosse Bewegung in Rectascension, so dass sich bald nach seiner Entdeckung viele Sternwarten mit seiner Verfolgung beschäftigten. Die alsbald von Berberich[3]) gerechneten Elemente sind:

Planet (433), Eros.

Epoche 1898 August 31·5, Mittl. Zeit Berlin.

$M = 220° 14' 3''·7$	$\varphi = 13° 13' 3''·8$
$\omega = 178\ 28\ 26·2$	$\mu = 2010''·131$
$\Omega = 303\ 48\ 53·0$	$\log a = 0·164521$
$i = 11\ 6\ 57·1$	$U = 644·7$ Tage.

Hiernach ist seine grosse Halbaxe 1·46057, seine grösste Entfernung von der Sonne 1·7945, seine kleinste 1·2654 Erdbahnhalbaxen, so dass er sich der Erde auf 0·265 Erdbahnhalbaxen nähern kann, während die kleinste Entfernung des Mars von der Erde 0·365 Erdbahnhalbaxen beträgt.

Bemerkenswerth ist noch, dass der Planet in seinen Periheloppositionen der Sonne bedeutend näher steht als Mars, und seine Bewegung dann rechtläufig bleibt. Seine Bahn liegt innerhalb der Bahnen aller anderen bisher bekannten Planetoiden und kreuzt nur in der Nähe des Aphel die Bahn des Planeten (228) in deren Perihel.

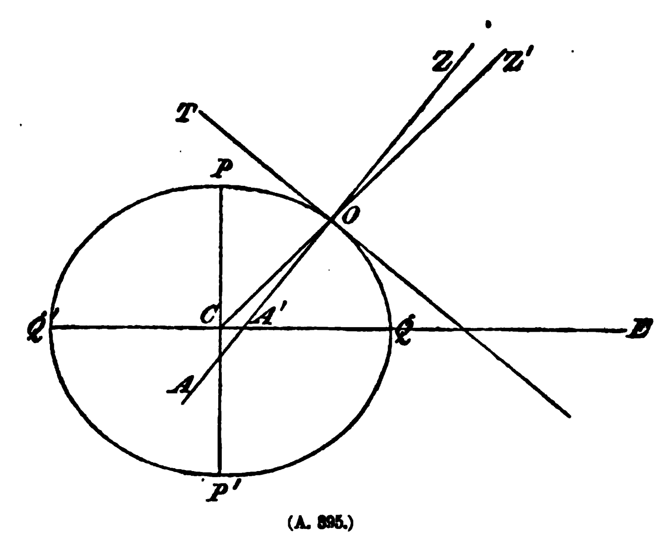
Der Planetoid kann in seiner Erdnähe ziemlich hell werden, und es drängt sich unwillkürlich die Frage auf, warum derselbe früher nicht gesehen wurde. Die Ursache liegt daran, dass er bei der relativ sehr grossen Neigung seiner Bahn in der Erdnähe beträchtlich ausserhalb desjenigen Gürtels steht, in welchem man gewöhnlich die Planetoiden zu suchen pflegte; dieser Grund lässt es wohl auch nicht unwahrscheinlich erscheinen, dass es noch andere Planeten geben könnte, welche sich in ähnlicher Weise der Erde bedeutend nähern können, so dass die Nachforschungen der Astronomen in Zukunft sich auf diese Gegenden werden erstrecken müssen. Denn gerade diese Planetoiden, vorerst also der betrachtete Planet (433), werden in Zukunft ein wichtiges Mittel zur genaueren Bestimmung der Sonnenparallaxe liefern, indem sie den Vortheil der grossen Erdnähe mit dem Mars theilen, diesem gegenüber aber den grossen Vortheil haben, dass sie sich als leicht zu pointirende Punkte, und nicht wie Mars, in Scheibenform darbieten. Wesentlichen Nutzen aus den Beobachtungen der kleinen Planeten wird die Astronomie daher erst in Zukunft schöpfen.

N. Herz.

---

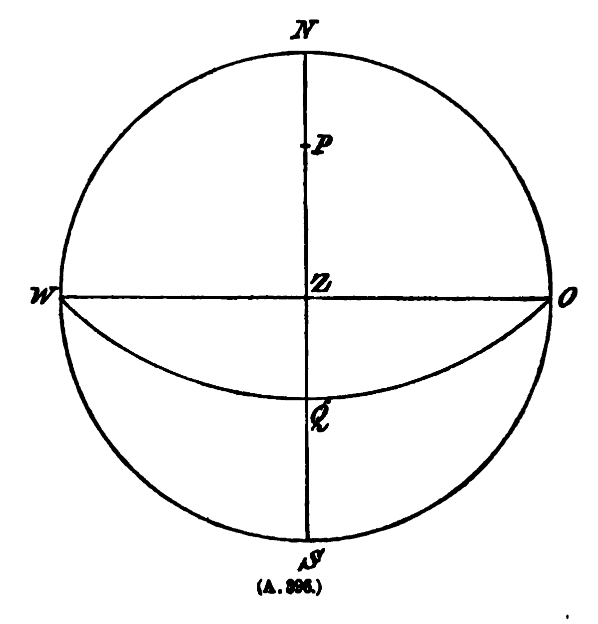
[1]) Astronom. Nachrichten Bd. 147, pag. 141.
[2]) Astronom. Nachrichten Bd. 147, pag. 175.
[3]) Astronom. Nachrichten Bd. 147, pag. 223.

Polhöhe und Polhöhenbestimmung. Die Polhöhe eines Ortes ist gleich der Deklination des Zenithes. Sie ist der Winkel, den die Richtung der Lothlinie mit der Ebene des Aequators bildet und der geographischen Breite gleich. Da die Erde keine vollkommene Kugel ist, sondern ein an den Polen abgeplattetes Sphäroid, so haben wir die geographische von der geocentrischen Breite zu unterscheiden. Da ferner die Lothlinie häufig in Folge von Unregelmässigkeiten in der Dichte und Gestalt der Erde von der Richtung der Normalen abweicht, so ist die geodätische von der astronomischen Breite zu unterscheiden. Hier handelt es sich um die astronomische Breite, welche, wie eben gesagt, die Deklination des durch die Lothlinie angezeigten scheinbaren Zenithes ist. Den Unterschied der geocentrischen und geographischen Breite, welcher bei den parallactischen Rechnungen in Betracht kommt, erläutert Fig. 395. Sei in derselben *O* ein Punkt der Erdoberfläche, *TO* die Tangente an den Meridian im Punkt *O*, *AO* senkrecht auf *OT* die Normale im Punkt *O*; eine die Erdoberfläche in *O* berührende Ebene ist, wie wir wissen, der Horizont und es giebt daher die Linie *AO*, senkrecht auf jener Ebene die Verticalrichtung, die Lothlinie im Punkt *O* an. Sie fällt, wie leicht ersichtlich, mit dem Radius nur am Aequator und an den Polen zusammen. Verlängern wir nun die Linien *CO*, *AO*, *CQ* bis sie die Sphäre in *Z*, *Z'*, *E* treffen, so haben wir zunächst in *Z* das scheinbare oder geographische Zenith, in *Z'* das geocentrische, ferner den Winkel *ZA'E* die Deklination des Zenithes oder die geographische Breite, dagegen *Z'CE* die Deklination des geocentrischen Zenithes oder die geocentrische oder reducirte Breite.



(A. 395.)

Ferner sei in Fig. 396 *NPZS* der Meridian, *N*, *S* Nord- und Südpunkt, *W*, *O* West- und Ostpunkt, *WQO*



(A. 396.)

der Aequator, P der Pol desselben, dann ist die Deklination des Zenithes Z gleich der geographischen Breite $ZQ = 90° - PZ = PN =$ der Höhe des Pols über dem Horizont.

Zur Bestimmung der Polhöhe dienen sehr verschiedene Methoden. In dem sphärischen Dreieck Pol, Zenith, Stern, wo die einzelnen Seiten $90° - \varphi$, $90° - \delta$, z, und die gegenüberliegenden Winkel q, $180° - a$ und t sind, indem wie üblich

φ die Polhöhe des Beobachtungsortes
δ die Deklination des Sterns
z die Zenithdistanz des Sterns
t den Stundenwinkel des Sterns
a das Azimuth des Sterns
q den parallactischen Winkel des Sterns

bedeuten, haben wir die zwei Gleichungen

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t \qquad (1)$$

$$\sin z \cos a = - \sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t \qquad (2)$$

In ihnen sind die Beziehungen zwischen der Polhöhe und Deklination, Stundenwinkel, Zenithdistanz und Azimuth eines bekannten Sterns gegeben. Differenziren wir zuerst Gleichung (1) um zu untersuchen, unter welchen Verhältnissen die Beobachtung am günstigsten wird, d. h. wann ein Fehler in δ, t, z den geringsten Einfluss hat, so kommt

$$- \sin z\, dz = (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t)\, d\delta$$
$$- (\sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta)\, d\varphi - \cos \varphi \cos \delta \sin t\, dt$$

woraus unter Benutzung anderer Formeln des gleichen Dreiecks

$$dz = \cos a\, d\varphi - \cos q\, d\delta + \sin a \cos \varphi\, dt$$

oder

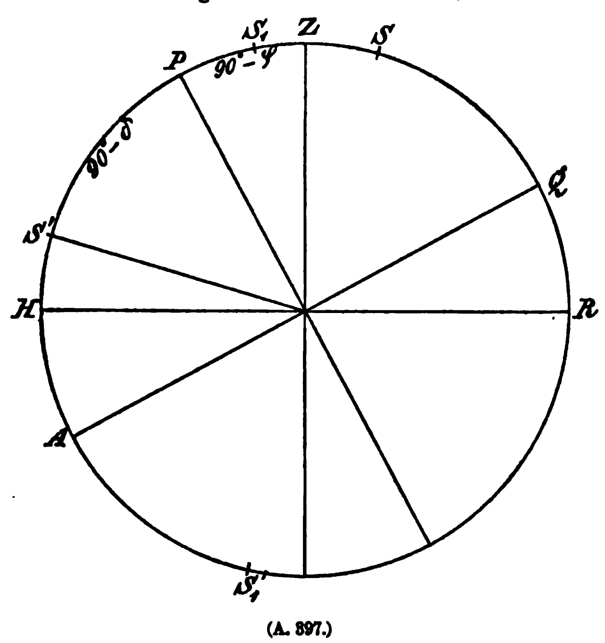
$$d\varphi = dz \sec a + \cos q \sec a\, d\delta - \tang a \cos \varphi\, dt \qquad (3)$$

folgt. Diese Gleichung zeigt nun zunächst deutlich, dass wir in der Bestimmung von φ die etwaigen Fehler auf ihr kleinstes Maass bringen, wenn wir die Sterne im Meridian beobachten, alsdann erreicht $\sec a = \pm 1$ ihr Minimum, und $\tang a$ wird $= 0$, sodass wir von der Zeit (auch von der Rectascension des Sternes) vollkommen unabhängig sind. Setzen wir in der Gleichung (1) $t = 0$, so kommt

$$\cos z = \cos (\varphi - \delta)$$
$$z = \varphi - \delta = \delta - \varphi.$$

Messe ich also an einem genau im Meridian aufgestellten Instrument, insbesondere an einem Meridiankreis die Zenithdistanz eines Sterns mit bekannter Deklination, so ergiebt sich daraus die Polhöhe. Der Fehler im Sternort geht dabei vollständig ins Resultat über. Die Zenithdistanz muss ans Nadir angeschlossen oder der Horizontpunkt auf dem Kreis durch Collimatoren ermittelt werden, und es wird die Unsicherheit in der Beobachtung der Zenithdistanz (durch die Ablesung am Kreise, Theilfehler, Biegung und Refraction) noch durch die der Nullpunktsbestimmung anhaftende Unsicherheit beeinflusst. Man kann sich aber durch eine geeignete Combination der Beobachtungen vom Sternort und auch vom Nullpunkt unabhängig machen. Wie aus Fig. 397 ersichtlich, in welcher der Kreis $PZQRH$ den Meridian, P den Pol des Aequators AQ, Z das Zenith, HR den Horizont, S den Stern bei seinem Meridiandurchgang in oberer Culmination, S' denselben Stern bei seiner unteren Culmination bezeichnen, hat man die Zenithdistanz z in oberer Culmination $= ZS = \varphi - \delta$, die Zenith-

distanz z' in unterer Culmination $= ZS' = (180 - \varphi - \delta)$. Die halbe Differenz $\frac{1}{2}(z' - z)$, giebt dann $90° - \varphi$. Hier ist also die Declination herausgefallen, aber die Nullpunkts- bezw. Nadirbeobachtung ist nicht vermieden, da zur Ermittlung von z, z' bei der langen Zwischenzeit jedes Mal an sie angeschlossen werden muss; bei dieser Bestimmung wird zugleich, wenn man Polsterne mit beträchtlicher Poldistanz beobachtet, der Einfluss der Refraction erhöht, da bei solchen Sternen die untere Culmination in geringer Höhe eintritt. Wenn wir nun aber denselben Stern bei dem gleichen Meridiandurchgang direkt und reflektirt also im Verlauf kürzester Zwischenzeit beobachten, in dem wir das Fernrohr auf einen das Bild des Sternes zurückwerfenden horizontalen Spiegel (Quecksilbergefäss) richten, so wird dabei die Nadirbestimmung unnöthig. Bezeichnet in der Fig. 397 S_1 den Stern bei direkter Beobachtung, S_1' denselben Stern, wie er im Quecksilberspiegel erscheint, so haben wir im ersten Fall die Zenithdistanz $z_1 = S_1 Z = 90° - \varphi - p$ (wo p die Poldistanz des Sterns $= 90° - \delta$), im zweiten Fall $z_1' = S_1'Z = 90° + \varphi + p$; die halbe Differenz, $\frac{1}{2}z_1' - z_1$, ist dann gleich $\varphi + p$.



(A. 397.)

Die Bestimmung im Augenblick des Meridiandurchgangs ist aber natürlich nur eine ganz beschränkte. Die Verbindung der reflektirten und direkten Beobachtungen bei demselben Meridiandurchgang kann überhaupt nur bei den langsam bewegten Polsternen Erfolg haben, aber auch hier muss man die Einstellungen auf die nächste Nähe des Meridians beschränken. Man wird dann Circummeridianzenithdistanzen messen, die auf den Moment des Meridiandurchgangs reducirt werden müssen. Ueberhaupt sind solche Beobachtungen in der Praxis auf den Meridiankreis beschränkt und hier kommt dann die eingehende Behandlung und Untersuchung des Meridiankreises und der mit ihm anzustellenden oder angestellten Beobachtungen in Betracht, wofür der Artikel »Meridiankreis« die nöthigen Directiven giebt. In der Regel, abgesehen also von festen Sternwarten, wird man auf die Benützung transportabler Instrumente (Universal- bezw. Passageninstrument) angewiesen sein, bei denen eine Vervielfältigung der Beobachtung in noch höherem Grade als beim festen Meridiankreis sowohl zur Förderung der Genauigkeit überhaupt, als auch insbesondere zur Elimination des Zenithpunkts verlangt wird. Wir gehen daher auf die Bestimmung der Polhöhe an den genannten transportablen Instrumenten über und behandeln zunächst die Messungen der Zenithdistanzen am Universalinstrument.

Wenn wir die Differentialformel (3) betrachten, so ergiebt sich, dass der Fehler in der Zeit vollständig eliminirt wird, wenn die Einstellungen gleichmässig

östlich und westlich vom Meridian gemacht werden, da alsdann der Coëfficient von dt entgegengesetztes Zeichen erhält. Die Formel lehrt ferner, dass die Fehler in der Zenithdistanz (auch die constanten Fehler am Instrument — Biegung — und die Refraction) grösstentheils aufgehoben werden, wenn mehrere Sterne so ausgesucht werden, dass sie in gleicher Weise nördlich und südlich vom Zenith liegen, wo dann $\sec a$ entgegengesetzte Zeichen erhält. Für den Einfluss des Fehlers in der angenommenen Deklination des Sternes müsste $q = 90°$ und $\sec a$ nicht gleichzeitig unendlich sein, was allerdings nicht im Meridian eintreten kann. Je grösser aber die Deklination ist, desto kleiner bleibt bekanntlich a, selbst in der grössten Digression, und ein Polstern, speciell der Polarstern, wird sich zur Bestimmung der Polhöhe sehr geeignet erweisen. So wird es sich empfehlen, eine Combination aus Zenithdistanzen von Sternen in der Nähe des Aequators bei kleinen Stundenwinkeln auf beiden Seiten des Meridians, und des Polarsternes in jedem Stundenwinkel zu nehmen. Wie gross der Einfluss der Fehler in z, δ, t überhaupt in verschiedenen Stundenwinkeln und Deklinationen für eine mittlere Polhöhe (50°) ist, zeigen am deutlichsten folgende Täfelchen, in denen

$$\text{für } \frac{d\varphi}{dz} = \sec a \qquad dz = 1''$$

$$\text{„ } \frac{d\varphi}{d\delta} = \cos q \sec a \qquad d\delta = 1''$$

$$\text{„ } \frac{d\varphi}{dt} = -\tan a \cos\varphi \qquad dt = 1^s$$

gesetzt ist und wo die in einzelnen Columnen gemachten Striche anzeigen, dass an dieser Stelle die Differentialausdrücke extreme Werthe annehmen, die einen regelmässigen Gang der Differenzen nicht mehr erkennen lassen.

1) $\frac{d\varphi}{dz}$ für $dz = 1''$

t \ δ	−30°	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+45°	+50°	+55°	+60°	+70°	+80°	+85°	+90°
0^h	1″·00	1″ 00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00
1	1·03	1·04	1·05	1·06	1·08	1·12	1·22	1·63	2·81	—	1·76	1·22	1·03	1·00	1·00	1·00
2	1·11	1·14	1·19	1·25	1·35	1·53	1·98	4·05	—	4·89	2·20	1·50	1·10	1·01	1·00	1·00
3	1·26	1·35	1·47	1·64	1·93	2·51	4·24	—	6·64	3·31	2·13	1·59	1·15	1·03	1·01	1·00
4		1·72	2·01	2·47	3·36	5·86	—	5·65	3·63	2·47	1·91	1·55	1·18	1·04	1·01	1·00
5			3·39	4·97	11·00	—	5·66	2·76	2·39	1·97	1·67	1·45	1·17	1·04	1·01	1·00
6				—	8·83	4·38	2·87	2·11	1·85	1·64	1·47	1·34	1·15	1·04	1·01	1·00
7							1·97	1·65	1·52	1·42	1·32	1·24	1·11	1·03	1·01	1·00
8							1·52	1·37	1·31	1·25	1·20	1·16	1·08	1·02	1·01	1·00
9								1·19	1·16	1·14	1·11	1·09	1·05	1·01	1·00	1·00
10								1·08	1·07	1·06	1·05	1·04	1·02	1·01	1·00	1·00
11								1·02	1·02	1·01	1·01	1·01	1·01	1·00	1·00	1·00
12								1·00	1·00	1·00	1·00	1·00	1·00	1·00	1·00	1·00

2) $\frac{d\varphi}{d\delta}$ für $d\delta = 1''$

t \ δ	−30°	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+45°	+50°	+55°	+60°	+70°	+80°	+85°	+90°
0	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	1″·00	−1″·00	−1″·00	−1″·00	−1″·00	−1″·00	−1″·00
1	1·01	1·02	1·03	1·04	1·05	1·06	1·10	1·25	1 54	1·00	−0·68	−0·83	−0·92	−0·95	−0·96	−0·97
2	1·05	1·08	1·11	1·15	1·21	1·31	1·52	2·35	—	1·00	−0·11	−0·44	−0·72	−0 80	−0·84	−0·87
3	1·12	1·20	1·29	1·41	1·60	1·95	2·93	—	1·69	1·00	+0·31	0·04	−0·39	−0·59	−0·65	−0·71
4		1·43	1·66	2·00	2·63	4·33	—	3·19	1·71	1·00	0·56	+0·28	−0·09	−0·33	−0·42	−0·50
5			2·67	3·86	—	—	3·86	1·69	1·35	1·00	0·73	0·52	+0·20	−0·05	−0·16	−0·26
6					6·72	3·27	2·06	1·42	1·19	1·00	0·84	0·68	0·43	+0·21	+0·11	0·00
7							1·51	1·23	1·11	1·00	0·90	0·80	0·62	0·45	0·35	+0·26
8							1·26	1·12	1·06	1·00	0·94	0·89	0·76	0·64	0·57	0·50
9								1·06	1·02	1·00	0·97	0·94	0·87	0·79	0·75	0·71
10								1·02	1·01	1·00	0·99	0·98	0·96	0 91	0·89	0·87
11								1·01	1·00	1·00	1·00	0·99	0·99	0·98	0·97	0·97
12								1·00	1·00	1·00	1·00	1·00	1·00	1·00	1·00	1·00

3) $\frac{d\varphi}{dt}$ für $dt = 1^s$

t \ δ	−30°	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+45°	+50°	+55°	+60°	+70°	+80°	+85°	+90°
0	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00	0″.00	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00
1	2·25	2·56	2·92	3·38	3·98	4·94	6·76	12·42	—	—	13·95	6 69	2·48	0·84	0·38	0·00
2	4·67	5·37	6·21	7·28	8·76	11·24	16·50	—	—	46·20	18·90	10·73	4·47	1·62	0·72	0·00
3	7·47	8·79	10·38	12·59	15·91	22·17	39·75	—	—	30·39	18·15	11·93	5·56	2·19	0·99	0 00
4		13·53	16·80	21·79	30·90	45·73	—	—	33·60	21·78	15·60	11·43	6 05	2·56	1·02	0·00
5			—	—	—	—	—	24·80	21·00	16·40	12·90	10·19	5·94	2·70	1·03	0·00
6							25.95	17·88	16·20	12·59	10·50	8·67	5·46	2·64	1·03	0·00
7							16·35	12·63	11·10	9·66	8·40	7·10	4·74	2·43	1·02	0·00
8							11·07	9·06	8·10	7·28	6·45	5·58	3·90	2·07	1·01	0·00
9								6·80	5·70	5·22	4·65	4·13	2·95	1·64	0·86	0·00
10								4·01	3·75	3·38	3·00	2·72	1·98	1·12	0·60	0·00
11								1·95	1·80	1·65	1·50	1·35	0·99	0·57	0·31	0·00
12								0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0 00	0·00	0·00

Um nun die in der Nähe des Meridians vor und nach dem Durchgang des Sternes durch den Meridian selbst gemachten Zenithdistanzen auf den Durchgang zu reduciren, setzen wir in der Gleichung (1) $\cos t = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} t$, dann kommt

$$\cos z = \cos z_0 - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t,$$

wo z_0 die Zenithdistanz im Meridian, $\varphi - \delta$, bedeutet. Setzen wir hier

$$2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t = y,$$

so ist

$$\cos z = \cos z_0 - y,$$

wo z_0 constant und z eine Function von y ist. Auf diese Formel die MACLAURIN-sche Reihe angewandt, erhalten wir die Reihe

$$z_0 = z - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin z_0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin 1''} + \left(\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin z_0}\right)^2 \frac{2 \operatorname{cotang} z_0 \sin^4 \frac{1}{2} t}{\sin 1''} -$$

$$- \left(\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin z_0}\right)^3 \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{1 + 3 \operatorname{cotang}^2 z_0}{\sin 1''}\right) \sin^6 \tfrac{1}{2} t + \ldots\ldots,$$

welche zuerst von DELAMBRE gegeben wurde. Setzen wir in derselben

$$m = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin 1''} \qquad n = \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} t}{\sin 1''}$$

$$A = - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin z_0} \qquad B = A^2 \operatorname{cotang} z_0,$$

so haben wir für die Reduction auf den Meridian mit Vernachlässigung der Glieder höherer Potenz als der vierten von $\sin \frac{1}{2} t$ folgende gebräuchliche und bequeme Formel

$$z_0 = z + Am + Bn.$$

Diese Vernachlässigung kann man sich aber, wie gleich gezeigt werden wird, immer erlauben, wenn man t klein genug, d. h. im allgemeinen nicht grösser als 10 Minuten in Zeit östlich und westlich wählt. Mit einem genähert bekannten φ berechnet man sich nun leicht z_0 und damit die Ausdrücke A, B, die für den Beobachtungsort Constanten sind. Für m und n (manchmal $\frac{1}{2}m$) bezw. die Logarithmen dieser Grössen sind mehrfach Tafeln gerechnet, die die Reduction ausserordentlich einfach machen. Sie finden sich auch im Anhang dieses Werkes.

Passirt der Stern den Meridian in unterer Culmination, so hat man in der obigen Gleichung für $\cos t$ nur $-\cos t$ zu setzen, im übrigen bleiben die Substitutionen genau dieselben und die Formel für die Reduction auf den Meridian in unterer Culmination lautet

$$z_0 = z - Am + Bn.$$

Es ist nun beim wiederholten Einstellen, wo man das Fernrohr im Azimuth, also um die Verticalaxe nachzudrehen hat, manchmal angenehm, die Zenithdistanz bezw. das Azimuth an den Kreisen einstellen zu können, sodass man den Stern dann gleich wieder im Gesichtsfeld hat. Abends wird zwar in der Regel das langsame Weiterdrehen des Fernrohrs im Sinne der scheinbaren täglichen Bewegung genügen, um den beobachteten Stern wieder zu finden, da er seine Zenithdistanz in der Nähe des Meridians langsam ändert, am Tage aber kann man das oft lichtschwache Sternchen dabei leicht verlieren, insbesondere beim Umlegen oft kostbare Zeit einbüssen. Man erhält nun aus dem obigen sphärischen Dreieck

$$\sin a = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin z}$$

und indem man, in der Nähe des Meridians $z = \varphi - \delta$, dann für $\sin a$ und $\sin t$ die Bögen selbst setzt

$$a = \frac{\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} t^m.$$

Will man dann a in Bogenminuten haben, so hat man den in Zeitminuten ausgedrückten Stundenwinkel noch mit 15 zu multipliciren. Ebenso giebt die

Formel für die Reduction der Zenithdistanzen auf den Meridian, wenn wir nur das zweite Glied berücksichtigen, und auch hier für den Sinus des halben Stundenwinkels den Bogen setzen, ausserdem alles in Bogenminuten ausdrücken

$$z = \varphi - \delta + \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \, \frac{t^{m2} \sin 1'}{2} \cdot 15^2,$$

wenn wir das letzte Glied in Bogensecunden haben wollen, ist der Werth desselben noch mit 60 zu multipliciren.

Folgende beiden Täfelchen geben diese genäherten Werthe der Einstellung für verschiedene Polhöhen. Hat man z. B. für die Polhöhe 49° (Karlsruhe), und den Stern α Tauri (+ 16° 18′) und α Can. maj. (— 16° 34′) bei 10 m Stundenwinkel einzustellen, so findet man für ersteren $a = 26'{\cdot}7 \times 10 = 4°\,27'$ und $z = 32°\,42' + 2''{\cdot}29 \times 100 = 32°\,45'{\cdot}8$, für letzteren $a = 15{\cdot}8 \times 10 = 2°\,38'$ und $z = 65°\,34' + 1''{\cdot}36 \times 100 = 65°\,36'{\cdot}3$.

$15 \cos\delta \operatorname{cosec}(\varphi - \delta) \cdot t^m$ in Bogenminuten.

δ \ φ	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°
−20°	16·3	16·1	16·0	15·8	15·7	15·5	15·4	15·3	15·2	15·1	15·0	14·9	14·8	14·7	14·7	14·6	14·5
18	16·8	16·6	16·5	16·3	16·2	16·0	15·9	15·7	15·6	15·5	15·4	15·3	15·2	15·1	15·0	14·9	14·8
16	17·4	17·2	17·0	16·8	16·6	16·5	16·3	16·2	16·0	15·9	15·8	15·7	15·5	15·4	15·3	15·3	15·2
14	18·0	17·8	17·6	17·4	17·2	17·0	16·8	16·6	16·5	16·3	16·2	16·1	15·9	15·8	15·7	15·6	15·5
12	18·6	18·4	18·1	17·9	17·7	17·5	17·3	17·1	16·9	16·8	16·6	16·5	16·3	16·2	16·1	15·9	15·8
10	19·3	19·0	18·7	18·5	18·3	18·0	17·8	17·6	17·4	17·2	17·1	16·9	16·7	16·6	16·4	16·3	16·2
8	20·0	19·7	19·4	19·1	18·8	18·6	18·4	18·1	17·9	17·7	17·5	17·3	17·1	17·0	16·8	16·7	16·5
6	20·7	20·4	20·1	19·8	19·5	19·2	18·9	18·7	18·4	18·2	18·0	17·8	17·6	17·4	17·2	17·1	16·9
4	21·5	21·2	20·8	20·5	20·1	19 8	19·5	19·3	19·0	18·7	18·5	18·3	18·0	17·8	17·6	17·5	17·3
2	22·4	22·0	21·6	21·2	20·8	20·5	20·2	19·9	19·6	19·3	19·0	18·8	18·5	18·3	18·1	17·9	17·7
0	23·3	22·9	22·4	22·0	21·6	21·2	20·8	20·5	20·2	19·9	19·6	19·3	19·0	18·8	18·5	18·3	18·1
+ 2	24·3	23·8	23·3	22·8	22·4	22·0	21·6	21·2	20·8	20·5	20·2	19·9	19·6	19·3	19·0	18·8	18·5
4	25·5	24·9	24·3	23·8	23·3	22·8	22·4	21·9	21·5	21·2	20·8	20·5	20·1	19·8	19·5	19·3	19·0
6	26·7	26·0	25·4	24·8	24·2	23·7	23·2	22·7	22·3	21·9	21·5	21·1	20·7	20·4	20·1	19·8	19·5
8	28·0	27·3	26·6	25·9	25·3	24·7	24·1	23·6	23·1	22·6	22·2	21·8	21·4	21·0	20·6	20·3	20·0
10	29·5	28·7	27·9	27·1	26·4	25·7	25·1	24·5	24·0	23·5	23·0	22·5	22·1	21·7	21·3	20·9	20·5
12	31·2	30·3	29·3	28·5	27·7	26·9	26·2	25·6	25·0	24·4	23·8	23·3	22·8	22·4	21·9	21·5	21·1
14	33·2	32·1	31·0	30·0	29·1	28·3	27·5	26·7	26·0	25·4	24·8	24·2	23·6	23·1	22·6	22·2	21·7
16	35·4	34·1	32·9	31·8	30·7	29·7	28·8	28·0	27·2	26·5	25·8	25·1	24·5	24·0	23·4	22·9	22·4
18	38·1	36·5	35·1	33·7	32·5	31·4	30·4	29·4	28·5	27·7	26·9	26·2	25·5	24·9	24·3	23·7	23·2
20	41·2	39·3	37·6	36·1	34·7	33·4	32·2	31·0	30·0	29·1	28·2	27·4	26·6	25·9	25·2	24·6	24·0
+21	43·0	40·9	39·1	37·4	35·8	34·5	33·2	32·0	30·8	29·8	28·9	28·0	27·2	26·4	25·7	25·0	24·4
22	45·0	42·7	40·7	38·8	37·1	35·6	34·2	32·9	31·7	30·6	29·6	28·7	27·8	27·0	26·2	25·5	24·9
23	47·2	44·7	42·4	40·4	38·5	36·9	35·3	33·9	32·7	31·5	30·4	29·4	28·5	27·6	26·8	26·1	25·3
24	49·7	46·9	44·3	42·1	40·1	38·2	36·6	35·1	33·7	32·4	31·3	30·2	29·2	28·3	27·4	26·6	25·9
25	52·5	49·3	46·5	44·0	41·8	39·8	37·9	36·3	34·8	33·4	32·2	31·0	29·9	29·0	28·0	27·2	26·4
26	55·7	52·1	48·9	46·1	43·6	41·4	39·4	37·6	36·0	34·5	33·1	31·9	30·7	29·7	28·7	27·8	27·0
27	59·4	55·3	51·6	48·5	45·7	43·2	41·0	39·1	37·3	35·7	34·2	32·9	31·6	30·5	29·4	28·5	27·6
28	63·7	58·9	54·7	51·2	48·3	45·3	42·9	40·7	38·7	37·0	35·4	33·9	32·5	31·3	30·2	29·2	28·2
29	68·8	63·1	58·3	54·2	50·7	47·6	44·9	42·5	40·3	38·4	36·6	35·0	33·6	32·2	31·0	29·9	28·9
30	74·8	68·1	62.5	57·7	53·7	50·2	47·1	44·4	42·0	39·9	38·0	36·2	34·7	33·2	31·9	30·7	29·6

$2 \cdot 15^2 \cdot \cos\varphi \cos\delta \operatorname{cosec}(\varphi - \delta) t^{m\,2} \sin 1'$ in Bogensecunden.

δ \ φ	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°
−20°	1·63	1·59	1·55	1·51	1·48	1·44	1·40	1·37	1·33	1·30	1·26	1·23	1·19	1·16	1·13	1·10	1·06
18	1·69	1·64	1·60	1·56	1·52	1·48	1·44	1·41	1·37	1·33	1·30	1·26	1·22	1·19	1·15	1·12	1·09
16	1·74	1·70	1·65	1·61	1·57	1·53	1·49	1·45	1·41	1·37	1·33	1·29	1·25	1·22	1·18	1·15	1·11
14	1·80	1·76	1·71	1·66	1·62	1·57	1·53	1·49	1·44	1·40	1·36	1·32	1·28	1·25	1·21	1·17	1·13
12	1·87	1·82	1·76	1·71	1·67	1·62	1·57	1·53	1·48	1·44	1·40	1·36	1·32	1·28	1·24	1·20	1·16
10	1·93	1·88	1·82	1·77	1·72	1·67	1·62	1·57	1·52	1·48	1·44	1·39	1·35	1·31	1·26	1·22	1·18
8	2·00	1·94	1·89	1·83	1·77	1·72	1·67	1·62	1·57	1·52	1·47	1·43	1·38	1·34	1·29	1·25	1·21
6	2·08	2·01	1·95	1·89	1·83	1·78	1·72	1·67	1·61	1·56	1·51	1·47	1·42	1·37	1·33	1·28	1·24
4	2·16	2·09	2·02	1·96	1·90	1·84	1·78	1·72	1·66	1·61	1·56	1·51	1·45	1·41	1·36	1·31	1·26
2	2·25	2·17	2·10	2·03	1·96	1·90	1·83	1·77	1·71	1·66	1·60	1·55	1·49	1·44	1·39	1·34	1·29
0	2·34	2·26	2·18	2·11	2·03	1·96	1·90	1·83	1·77	1·70	1·65	1·59	1·53	1·48	1·43	1·38	1·32
+ 2	2·44	2·35	2·27	2·19	2·11	2·03	1·96	1·89	1·83	1·76	1·70	1·64	1·58	1·52	1·46	1·41	1·36
4	2·55	2·46	2·37	2·28	2·19	2·11	2·03	1·96	1·89	1·82	1·75	1·69	1·62	1·56	1·50	1·45	1·39
6	2·68	2·57	2·47	2·37	2·28	2·19	2·11	2·03	1·95	1·88	1·81	1·74	1·67	1·61	1·54	1·49	1·43
8	2·81	2·69	2·58	2·48	2·38	2·28	2·19	2·11	2·02	1·94	1·87	1·79	1·72	1·65	1·59	1·53	1·46
10	2·96	2·83	2·71	2·60	2·49	2·38	2·29	2·19	2·10	2·02	1·93	1·85	1·78	1·71	1·64	1·57	1·50
12	3·13	2·99	2·85	2·73	2·61	2·49	2·39	2·28	2·19	2·09	2·01	1·92	1·84	1·76	1·69	1·62	1·55
14	3·33	3·17	3·02	2·87	2·74	2·62	2·50	2·39	2·28	2·18	2·09	1·99	1·91	1·82	1·74	1·67	1·59
16	3·56	3·37	3·20	3·04	2·89	2·75	2·62	2·50	2·38	2·27	2·17	2·07	1·98	1·89	1·80	1·72	1·64
18	3·82	3·61	3·41	3·23	3·07	2·91	2·76	2·63	2·50	2·38	2·27	2·16	2·06	1·96	1·87	1·78	1·70
20	4·13	3·89	3·66	3·45	3·26	3·09	2·92	2·77	2·63	2·50	2·37	2·26	2·14	2·04	1·94	1·84	1·76
+21	4·31	4·04	3·80	3·58	3·37	3·19	3·01	2·85	2·70	2·56	2·43	2·31	2·19	2·08	1·98	1·88	1·79
22	4·51	4·22	3·96	3·72	3·50	3·29	3·11	2·94	2·78	2·63	2·49	2·36	2·24	2·13	2·02	1·92	1·82
23	4·74	4·41	4·13	3·87	3·63	3·41	3·21	3·03	2·86	2·71	2·56	2·42	2·30	2·18	2·06	1·96	1·86
24	4·99	4·63	4·31	4·03	3·77	3·54	3·33	3·13	2·95	2·79	2·63	2·49	2·35	2·23	2·11	2·00	1·89
25	5·27	4·87	4·52	4·21	3·93	3·68	3·45	3·24	3·05	2·87	2·71	2·56	2·41	2·28	2·16	2·04	1·93
26	5·59	5·15	4·76	4·41	4·11	3·83	3·58	3·36	3·15	2·96	2·79	2·63	2·48	2·34	2·21	2·09	1·97
27	5·96	5·46	5·02	4·64	4·30	4·00	3·73	3·49	3·27	3·06	2·88	2·71	2·55	2·40	2·27	2·14	2·02
28	6·39	5·82	5·33	4·90	4·52	4·19	3·90	3·63	3·39	3·17	2·98	2·79	2·62	2·47	2·33	2·19	2·07
29	6·89	6·23	5·67	5·19	4·77	4·41	4·08	3·79	3·53	3·29	3·08	2·89	2·71	2·54	2·39	2·25	2·12
30	7·50	6·73	6·08	5·53	5·06	4·65	4·29	3·97	3·68	3·43	3·20	2·99	2·80	2·62	2·46	2·31	2·17

Es ist nun von Wichtigkeit, einen genauen Anhalt zu haben, wie weit man ausserhalb des Meridians die Beobachtungen anstellen darf, um die oben angezeigte Vernachlässigung begehen, eventuell sich auf das Glied 2. Ordnung beschränken zu dürfen. Bezeichnen wir zunächst das Glied 4. Ordnung oder Bn mit b, dann ist

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2} b \tan z_0 \sin 1''}}{A}.$$

Nehmen wir nun für b einen bestimmten Werth an, so können wir für die verschiedenen φ und δ die Grösse $\sin^2 \frac{1}{2} t$ oder t berechnen. Ebenso ergiebt sich, wenn wir das Glied 6. Ordnung von $\sin \frac{1}{2} t$, oder

$$\tfrac{1}{3} \left(\frac{1 + 3 \cot^2 z_0}{\sin 1''} \right) A^3 \sin^6 \tfrac{1}{2} t$$

mit c bezeichnen

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{1}{A} \sqrt[3]{\frac{3 c \sin 1''}{4(1 + 3 \cot^2 z_0)}}.$$

Sei b und $c = 0''\cdot01$, so zeigen folgende beide Täfelchen, welche mit dem Argument Polhöhe und Zenithdistanz den Werth von t angeben, wie weit man im Stundenwinkel gehen darf, wenn man keinen merkbaren Fehler durch Vernachlässigung von b bezw. c begehen will.

Tafel I, für b

φ \ z	75°	65°	55°	45°	35°	25°	15°	5°	5°	15°	25°	35°	45°
35°	9^m·8	7^m·8	6^m·5	5^m·4	4^m·4	3^m·4	2^m·4	1^m·1	1 ·2	2^m·9	4^m·8	7^m·7	12^m·9
45	10·0	8·1	6·8	5·7	4·8	3·8	2·7	1·3	1·4	3·5	7·0	11·4	
55	10·6	8·8	7·5	6·4	5·4	4·4	3·2	1·5	1·7	5·0	9·7		
65	12·1	10·1	8·8	7·6	6·5	5·4	4·0	2·0	2·2	7·7			

Tafel II, für c

φ \ z	75°	65°	55°	45°	35°	25°	15°	5°	5°	15°	25°	35°	45°
35°	31^m·7	2[illegible]·4	23^m·6	19^m·6	15^m·9	12^m·2	8^m·2	3^m·4	3^m·6	9^m·9	17^m·1	27^m·2	46^m·8
45	32·0	28·4	24·8	20·9	17·3	13·4	9·2	3·9	4·3	12·1	22·3	41·7	
55	34·2	30·8	27·3	23·4	19·6	15·5	10·8	4·7	5·4	16·2	34·6		
65	39·0	35·6	32·1	28·0	23·8	19·2	13·8	6·3	7·6	26·5			

Man muss also in der That in der Auswahl der zu beobachtenden Sterne recht vorsichtig sein, in den wenigsten Fällen wird man das Glied b unberücksichtigt lassen, dagegen sich von den Gliedern c und gar höherer Ordnung unschwer frei machen können.

Was nun Beobachtungen auf der Nordseite des Meridians betrifft, so eignet sich ganz besonders der Polarstern zu den Polhöhenbestimmungen, einmal seiner grossen Deklination wegen, in Folge deren er sich stets nur wenig vom Meridian entfernen kann, sodann weil er als Stern 2. Grösse schon in mässigen Fernrohren den ganzen Tag über gesehen werden kann. In Meridiankreisen gewöhnlicher Grösse wird auch schon δ Urs. min. zu den Polhöhenbestimmungen mit Vortheil herangezogen werden, doch muss bei diesen fest im Meridian aufgestellten Instrumenten die nicht genau am Mittelfaden gemachte Einstellung nach der an anderer Stelle gegebenen Formel auf den Meridian reducirt werden.

Man kann die Beobachtungen des Polarsterns nun bequem und vollkommen strenge nach der den Circummeridianbeobachtungen der Südsterne zu Grunde gelegten Formel reduciren, auch in den meisten Fällen schon den abgekürzten Ausdruck

$$z_0 = z - \frac{2 \cos\varphi \cos\delta}{\sin\frac{1}{2}(z_0 + z)} \sin^2\tfrac{1}{2}t$$

anwenden. Bezeichnet man die Reduction auf den Meridian $z - z_0$ oder $z_0 - z$ mit x, so kann man auch schreiben (indem man obere und untere Culmination, wo ja $\varphi = \delta - z_0$, bezw. $= 180° - (z_0 + \delta)$ ist, unterscheidet):

$$\text{O. C.} \quad \sin\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}t}{\sin(\delta - \varphi + \frac{1}{2}x)} = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}(\delta - \varphi + z)}$$

$$\text{U. C.} \quad \sin\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}t}{\sin(\varphi + \delta + \frac{1}{2}x)} = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)},$$

wo dann der Uebergang des Sinus x auf den Bogen selbst wieder unter Benutzung von Hilfstafeln wesentlich erleichtert wird.

In beliebigen Stundenwinkeln und bei ganz unbekannter Polhöhe kann man sich der strengen Formel

$$cos(\varphi - N) = \frac{sin\, N\, cos\, z}{sin\, \delta}$$

wo

$$tang\, N = tang\, \delta\, sec t$$

ist, bedienen, die aber zur scharfen Berechnung die grossen (7—8stelligen) Logarithmentafeln erfordert. Die Formel entsteht sofort, wenn in der Grundformel

$$cos\, z = sin\, \delta\, sin\, \varphi + cos\, \delta\, sos\, \varphi\, cos\, t$$
$$sin\, \delta = n\, sin\, N \qquad cos\, \delta\, cos\, t = n\, cos\, N$$

gesetzt wird. Der Bedeutung der Grösse $(\varphi - N)$ entsprechend besteht dann auch die Gleichung

$$cotang\, z = -\, cotang\, (N - \varphi)\, cos\, a,$$

und wenn man sich für verschiedene Polhöhen, z. B. 30°, 40°, 50°, 60° Zenithdistanz und Azimuth nach ihren Maximalwerthen berechnet, so findet sich leicht, dass $N - \varphi$ von z höchstens um 24", 36", 51", 78" abweichen, also N auch um nicht mehr von $\varphi + z$ verschieden sein kann.

Nun giebt aber die geringe Poldistanz von *α Ursae minoris* noch andere kürzere Methoden, wenn man Reihen entwickelt, die nach Potenzen der Poldistanz p fortschreiten. Solche Reihen sind in verschiedenen Formen aufgestellt. Der Polarstern ändert seine Zenithdistanz sehr langsam und sie wird stets nicht viel von der Polhöhe des Beobachtungsorts abweichen. Bezeichnen wir diese Abweichung, die im Maximum $= p$ werden kann, mit x, so haben wir

$$\varphi = (90 - z) + x$$

und

$$cos\, z = sin\, (\varphi - x).$$

Nun ist nach obiger Gleichung für $cos\, z$

$$sin\, \varphi\, cos\, x - cos\, \varphi\, sin\, x = sin\, \varphi\, sin\, \delta + cos\, \varphi\, cos\, \delta\, cos\, t,$$

woraus

$$sin\, x = -\, sin\, p\, cos\, t - tang\, \varphi\, (cos\, p - cos\, x).$$

Führen wir für sinus und cosinus von x und p die Reihen ein, so kommt mit Vernachlässigung der Grössen, welche höherer Ordnung als p^3 sind,

$$x = -\, p\, cos\, t + \tfrac{1}{2} p^2 sin\, 1''\, tang\, \varphi + \tfrac{1}{6} p^3 sin^2 1''\, cos\, t - \tfrac{1}{2} x^2 sin\, 1''\, tang\, \varphi + \tfrac{1}{6} x^3 sin^2 1''$$
$$= -\, p\, cos\, t + \tfrac{1}{2} p^2 sin\, 1''\, tang\, \varphi\, sin^2 t + \tfrac{1}{6} p^3 sin^2 1''\, sin^2 t\, cos\, t\, \frac{1 + 2\, sin^2 \varphi}{cos^2 \varphi}$$
$$= -\, p\, cos\, t + C,$$

wo

$$C = sin^2 t \left\{ \tfrac{1}{2} p^2 sin\, 1''\, tang\, \varphi + \tfrac{1}{6} p^3 sin^2 1''\, cos\, t\, \frac{1 + 2\, sin^2 \varphi}{cos^2 \varphi} \right\},$$

welche Reihe von Littrow herrührt. Setzt man in derselben

$$M = \tfrac{1}{2} p^2 sin\, 1''\, tang\, \varphi$$
$$N = \tfrac{1}{6} p^3 sin^2 1''\, \frac{1 + 2\, sin^2 \varphi}{cos^2 \varphi},$$

so erhalten wir den folgenden äusserst einfachen Ausdruck:

$$\varphi = (90 - z) - p\, cos\, t + sin^2 t\, (M + N\, cos\, t),$$

in welchem M und $N\, cos\, t$ leicht in Tafeln gebracht werden können, wie sie vom Verfasser, von Albrecht und anderen gegeben sind. In verschiedenen astronomischen Tafelsammlungen (Nautical Almanac u. A.), werden alljährlich Tafeln gegeben, die in bequemer Form die Berechnung der Polhöhe gestatten,

so lange eine Genauigkeit von 1—2″ genügt. Dieselben verwenden nur die ersten Glieder der Reihe bis einschliesslich der 2. Potenz von p. Im Nautical Almanac giebt z. B. eine Tafel I, »die erste Correction«, mit dem Argument der Sternzeit der Beobachtung von 10 zu 10 Zeitminuten den Werth $-p\cos t$, eine Tafel II, die »zweite Correction«, mit dem doppelten Argument der Sternzeit (von 30 zu 30 Zeitminuten) und der Höhe des Polarsterns (von 5 zu 5 Grad) den Werth $\frac{1}{2}p^2 \sin^2 t \sin 1'' \tang \varphi$, und zwar für einen mittleren Werth der Poldistanz und Rectascension. Da nun dieser mittlere Werth von dem wahren Werth am Beobachtungstage abweicht, so ist eine dritte Tafel hinzugefügt, welche als »dritte Correction« dieser Variation Rechnung trägt, und zwar mit dem doppelten Argument der Sternzeit (von 2 zu 2 Stunden), und dem Datum der Beobachtung (von Monat zu Monat). Um diese dritte Correction, die nur etwa 40″ im Maximum betragen kann, stets bei der Berechnung additiv zu machen, ist der Tafelwerth um 1′ vergrössert.

Will man nun volle Genauigkeit erreichen, so darf man natürlich bei diesen ersten Gliedern nicht stehen bleiben. Ja, es können unter Umständen Glieder höherer Ordnung von Einfluss werden. Entwickeln wir die Reihe weiter, so lauten die Glieder 4. Ordnung:

$$P = \frac{1}{24}p^4 \sin^3 1'' \tang\varphi \left\{4(2 + 3\tang^2\varphi) - 3\sin^2 t(3 + 5\tang^2\varphi)\right\} \sin^2 t.$$

Durch Differentiation und Trennung der einzelnen Theile dieses Gliedes, findet sich, dass es zunächst für den ersten Theil mehrere relative Maxima giebt, welche bei etwa $t = 42°$, $138°$, $222°$, $318°$ liegen und $\frac{2}{27}p^4 \sin^3 1'' \tang\varphi$ betragen. Der 2. Theil erreicht Maximalwerthe für $t = 90°$ und $270°$ im Betrage von $\frac{1}{8}p^4 \sin^3 1'' \tang^3\varphi$, und secundäre (etwas geringere) Maxima für $t = 39°$, $141°$, $219°$, $321°$. Berechnet man nun für $p = 1°\ 13'\ 0''$ und verschiedene Polhöhen die numerischen Beträge der Grenzwerthe, welche diese einzelnen Glieder erreichen können, so findet sich, dass für

	die Glieder 2. Ordn.	3. Ordn.	4. Ordn.	
			a	b
φ = 30°	26″·85	0″·25	0″·002	0″·001
40°	39·02	0·39	0·003	0·003
50°	55·42	0·67	0·004	0·009
60°	80·55	1·27	0·005	0·027

werden können. Es ergiebt sich also hieraus, dass wenn man die Rechnung auf 0″·01 durchführen will, man schon in mittleren Breiten eigentlich das Glied 4. Ordnung berücksichtigen muss. Man kann nun aber insofern gerne bei den Gliedern 3. Ordnung stehen bleiben, als man die einzelnen Einstellungen nebst Ablesungen doch kaum genauer als auf 0″·4—0″·5 sicher erhält. Will man aber trotzdem die Rechnungsgenauigkeit auf 0″·01 treiben, so genügt es durch Entnahme des Betrages dieser Glieder aus einem kleinen Täfelchen in Form einer Correction die Vernachlässigung in der Hauptrechnung zu beseitigen. Für den übrigen Theil der Formel ist, wie schon angedeutet, zur Berechnung die Benutzung von Hilfstafeln, und zwar einer solchen in folgender Form sehr zu empfehlen, insbesondere wo es sich um längere Beobachtungsreihen handelt. Das Glied $p\cos t$ ist stets 6stellig direkt zu berechnen. M kann man einer Tafel entnehmen, die für eine bestimmte Poldistanz p_0 gerechnet ist, indem man diesen Tafelwerth noch mit einem Faktor $\frac{p^2}{p_0^2}$ multiplicirt, wo dann p die für den Beobachtungstag gültige Poldistanz bezeichnet, um das ebenfalls für

diesen Tag gültige M zu erhalten. Aehnlich entnimmt man einer zweiten Tafel mit dem Argument t (Stundenwinkel), den Werth $N_0 \cos t$, den man wiederum durch Multiplikation mit $\frac{p^3}{p_0^3}$ in $N \cos t$ verwandelt. Die Summe dieser beiden Grössen, $M + N \cos t$, ist dann nur noch mit $\sin^2 t$ zu multipliciren, wozu 5-, häufig 4stellige Logarithmen genügen. In dieser Form sind die Tafeln ursprünglich vom Verfasser für alle Polhöhen von 36—64° in grosser Ausführlichkeit gegeben, sodann hat ALBRECHT sie für 30—63° in noch wesentlich compendiöserer Gestalt berechnet, indem hier die Formel

$$\varphi = 90^\circ - z - p \cos t + M \sin^2 t + N$$

angewandt wurde, sodass nun gleich M mit $\sin^2 t$ multiplicirt erscheint und N mit dem Argument t vollständig entnommen werden kann. Die rasche Aenderung der Poldistanz des Polarsterns nöthigt zu einer ziemlich häufigen Umrechnung solcher Generaltafeln. Die zuerst genannten Tafeln hatten als Poldistanz $p = 1^\circ\, 23'\, 0''$ angenommen und sind veraltet, die ALBRECHT'schen in der neuesten Form gelten für $p = 1^\circ\, 13''\, 0''$ und sind mit den Hilfsgrössen $\frac{p^2}{p_0^2}$ und $\frac{p^3}{p_0^3}$ bis zu einer Poldistanz $p = 1^\circ\, 10'\, 0''$ verwendbar, das ist etwa bis zum Jahre 1910. Um einen Ueberblick zu geben, wie einfach sich mit diesen Tafeln die Rechnung gestaltet, fügen wir hier die Werthe für die Polhöhen von 44—58° zugleich mit den Faktoren $\frac{p^2}{p_0^2}$ und $\frac{p^3}{p_0^3}$ für $p = 1^\circ\, 13'$ bis $1^\circ\, 10'$, also für die Deklinationen $88^\circ\, 47'\, 0''$ bis $88^\circ\, 50'\, 0''$ in zum Theil abgekürzter Form bei. Auch in dieser Gestalt wird die Tafel in den meisten Fällen, insbesondere bei Anlage von Specialtafeln, für den praktischen Gebrauch ausreichen.

Tafel für $M_0 = \frac{1}{2} p_0^2 \sin 1'' \tan g\, \varphi \qquad p_0 = 1^\circ\, 13'\, 0'' \qquad \delta_0 = 88^\circ\, 47'\, 0''$.

φ	M_0	φ	M_0	φ	M_0	φ	M_0	φ	M_0
44° 0'	44''·91	47° 0'	49''·87	50° 0'	55''·42	53° 0'	61''·71	56° 0'	68''·95
10	45·17	10	50·16	10	55·75	10	62·09	10	69·38
20	45·43	20	50·46	20	56·08	20	62·47	20	69·82
30	45·70	30	50·75	30	56·41	30	62·85	30	70·26
40	45·97	40	51·05	40	56·75	40	63·23	40	70·71
50	46·23	50	51·35	50	57·09	50	63·62	50	71·16
45 0	46·50	48 0	51·65	51 0	57·43	54 0	64·01	57 0	71·61
10	46·78	10	51·95	10	57·77	10	64·40	10	72·07
20	47·05	20	52·26	20	58·12	20	64·80	20	72·53
30	47·32	30	52·56	30	58·46	30	65·20	30	73·00
40	47·60	40	52·87	40	58·81	40	65·60	40	73·47
50	47·88	50	53·18	50	59·17	50	66·01	50	73·94
46 0	48·16	49 0	53·50	52 0	59·52	55 0	66·42	58 0	74·42
10	48·44	10	53·81	10	59·88	10	66·83	10	74·91
20	48·72	20	54·13	20	60·24	20	67·24	20	75·40
30	49·01	30	54·45	30	60·61	30	67·66	30	75·89
40	49·29	40	54·77	40	60·97	40	68·09	40	76·39
50	49·58	50	55·10	50	61·34	50	68·52	50	76·89
47 0	49·87	50 0	55·42	53 0	61·71	56 0	68·95	59 0	77·40

Tafel für $N_0 = \frac{1}{6} p_0^3 \sin^2 1'' (1 + 3 \tang^2 \varphi) \sin^3 t \cos t \quad p_0 = 1° 13' 0'' \quad \delta = 88° 47' 0''$.

t \ φ	44°	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	
+																	—
0h 0m	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	0''·00	12h 0m
30	0·02	0·02	0·02	0·02	0·03	0·03	0·03	0·03	0·03	0·04	0·04	0·04	0·04	0·05	0·05	0·05	30
1 0	0·08	0·09	0·09	0·09	0·10	0·11	0·11	0·12	0·13	0·13	0·14	0·15	0·16	0·17	0·19	0·20	11 0
30	0·17	0·18	0·19	0·20	0·21	0·22	0·23	0·25	0·26	0·28	0·30	0·32	0·34	0·36	0·39	0·42	30
2 0	0·27	0·29	0·30	0·32	0·34	0·35	0·38	0·40	0·42	0·45	0·48	0·51	0·54	0·58	0·62	0·66	10 0
30	0·37	0·39	0·41	0·43	0·45	0·48	0·51	0·54	0·57	0·61	0·65	0·69	0·73	0·79	0·84	0·90	30
3 0	0·44	0·46	0·49	0·52	0·55	0·58	0·61	0·65	0·69	0·73	0·78	0·83	0·88	0·94	1·01	1·08	9 0
30	0·48	0·50	0·53	0·56	0·59	0·63	0·66	0·70	0·75	0·79	0·84	0·90	0·96	1·02	1·09	1·17	30
4 0	0·47	0·49	0·52	0·55	0·58	0·61	0·65	0·69	0·73	0·78	0·83	0·88	0·94	1·00	1·07	1·15	8 0
30	0·41	0·43	0·45	0·48	0·51	0·53	0·57	0·60	0·64	0·68	0·72	0·77	0·82	0·87	0·93	1·00	30
5 0	0·30	0·32	0·34	0·35	0·37	0·40	0·42	0·44	0·47	0·50	0·53	0·57	0·60	0·64	0·69	0.74	7 0
30	0·16	0·17	0·18	0·19	0·20	0·21	0·22	0·24	0·25	0·27	0·28	0·30	0·32	0·34	0·37	0·39	30
6 0	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	6 0

Für die um 12 Stunden grösseren Stundenwinkel gelten dieselben Werthe jedoch mit entgegengesetztem Zeichen. Der Werth für N ist positiv im 1. und 4. Quadranten, negativ im 2. uud 3., numerisch sind die Werthe im 1. und 3. bezw. im 2. und 4. Quadranten einander gleich.

Tafel für $\frac{p^2}{p_0^2}$ und $\frac{p^3}{p_0^3}$.

Decl.	$\frac{p^2}{p_0^2}$	$\frac{p^3}{p_0^3}$	Decl.	$\frac{p^2}{p_0^2}$	$\frac{p^3}{p_0^3}$	Decl.	$\frac{p^2}{p_0^2}$	$\frac{p^3}{p_0^3}$
88° 47' 0''	1·0000	1·000	88° 48' 0''	0·9728	0·960	88° 49' 0''	0·9460	0·920
10	0·9954	0·993	10	0·9683	0·953	10	0·9415	0·914
20	0·9909	0·986	20	0·9638	0·946	20	0·9371	0·907
30	0·9863	0·980	30	0·9593	0·940	30	0·0327	0·901
40	0·9818	0·973	40	0·9549	0·933	40	0·9283	0·894
50	0·9773	0·966	50	0·9504	0·926	50	0·9239	0·888
88 48 0	0·9728	0·960	88 49 0	0·9460	0·920	88 50 0	0·9195	0·882

Andere Reihenentwickelungen, die zur Anlage von Tafeln geeignet oder auch sonst für die Reduction bequem sind, giebt es verschiedene, es mögen hier nur kurz die von PETERSEN erwähnt werden, welche ursprünglich in den WARNSTORF-SCHUMACHER'schen Hilfstafeln veröffentlicht wurden. PETERSEN geht ebenfalls von einem bestimmten Werth der Poldistanz p_0 aus und schreibt dann die Formel folgendermaassen:

$$\varphi = 90° - z - \frac{p}{p_0}\left(p_0 \cos t + \tfrac{1}{6} p_0^3 \cos t \sin^2 t\right) - \tfrac{1}{6}\,\frac{p}{p_0}\left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right) p_0^3 \cos t \sin^2 t$$
$$+ \frac{p^2}{p_0^2} \cotang z \left\{\tfrac{1}{2} p_0^2 \sin^2 t + \tfrac{1}{24} p_0^4 \sin^2 t (5 \sin^2 t - 4 \cos^2 t)\right\} + \tfrac{1}{8}\,\frac{p^4}{p_0^4}\, p_0^4 \sin^4 t \cotang^3 z$$

und führt dann folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{p}{p_0} = A, \quad p_0 \cos t + \tfrac{1}{6} p_0^3 \cos t \sin^2 t = \alpha, \quad \tfrac{1}{6} A (A^2 - 1) p_0^3 \cos t \sin^2 t = \gamma$$
$$\tfrac{1}{2} p_0^2 \sin^2 t + \tfrac{1}{24} p_0^4 \sin^2 t (5 \sin^2 t - 4 \cos^2 t) = \beta$$
$$\tfrac{1}{8} A^4 p_0^4 \sin^4 t \cotang^3 z = \tfrac{1}{2} A^4 \beta^2 \cotang^3 z = \mu,$$

wodurch

$$\varphi = 90° - \alpha - A\alpha - \gamma + A^2 \beta \cotang z + \mu$$

wird. Durch Tafeln giebt er die Grössen α, β mit dem Argument t, γ mit dem Argument p und t, und μ mit den Argumenten $A^2\beta\ cotang\ z = y$ und $90° - z$.

Was nun die Anstellung der Beobachtungen betrifft, so möge auch hier wieder, wie in ähnlichen Fällen, der Instruction des Königlich Preussischen Geodätischen Instituts gefolgt werden.

Die Messungen sind zur Elimination der Biegung auf den Polarstern und 4 Südsterne von nahezu gleicher Zenithdistanz wie die des Polarsternes auszudehnen. Letztere Bedingung erfüllen Sterne, deren Declination $\delta = 2\varphi - 90°$, von diesem Normalwerth sollte man sich nicht weiter als um $\pm 10°$ entfernen. Während die Beobachtungen der Südsterne möglichst symmetrisch zum Meridian auszuführen und auf kleine Stundenwinkel zu beschränken sind, ist beim Polarstern solche Einschränkung nicht nöthig; dagegen ist hier thunlich darauf Bedacht zu nehmen, dass sich die Beobachtungen gleichmässig auf diametrale Stellen seiner Bahn vertheilen, was durch Verbindung von Beobachtungen am Abend und Morgen erreicht wird. Danach sind auch die Südsterne so zu wählen, dass womöglich 2 Sterne am Abend, 2 am Morgen culminiren.

Es sind die Beobachtungen auf die verschiedenen Kreisstände zu vertheilen, sodass nach einem vollständigen Satz der Kreis um eine bestimmte Anzahl Grade gedreht wird, 30° oder 45°; es müssen soviele vollständige Sätze beobachtet werden, dass durch die Kreisdrehung der Kreis auf die erste Stellung zurückgeführt wird. Ein vollständiger Satz wird gebildet durch je eine Beobachtungsreihe des Polarsterns und je eine von 2 Südsternen am Abend und Morgen. Dabei sind die Beobachtungen des Polarsternes innerhalb jeder Reihe auszudehnen auf 2 Zenithdistanzmessungen bei Kreislage Ost, 4 bei Kreislage West, und nochmals 2 in der ersten Kreislage; bei den Südsternen sollten jeweils 3 Messungen in der einen und ebenso viele in der anderen Kreislage ausgeführt werden, die möglichst gleichmässig vor und nach dem Meridiandurchgang liegen.

Die Einstellung geschieht bei genügender Helligkeit des Sterns am besten auf einen der Horizontalfäden, es ist dann immer auf denselben Faden zu pointiren; ausserdem muss der Stern dann zwischen den beiden verticalen Mittelfäden stehen. Wie in dem das Universalinstrument behandelnden Artikel angegeben, wird die Horizontalstellung des die Ablesemikroskope am Höhenkreis tragenden Armes durch ein Höhenniveau controlirt. Die Ablesung desselben ist jeweils vor und nach der Ablesung des Kreises vorzunehmen. Zur Ermittlung der Refraction sind das Barometer und inneres wie äusseres Thermometer in nicht zu langen Zwischenräumen abzulesen.

Die Berechnung erfolgt dann in der Weise, dass zunächst die Mikroskopablesungen wenn nöthig um den Fehler des *Run* korrigirt, dann die Mittel der beiden Ablesungen gebildet und dieses um die Angabe des Höhenniveaus verbessert wird. Nach genäherter Berücksichtigung des Zenithpunktfehlers wird aus der Zenithdistanz die Strahlenbrechung berechnet und an erstere angebracht. Die Beobachtungszeit ist durch Addition des für diese Zeit geltenden Uhrstandes in wahre Sternzeit umzuwandeln und dann unter Verwendung der scheinbaren Rectascension der Stundenwinkel abzuleiten. Mit diesem werden dann den Tafeln für den Polarstern die erforderlichen Reductionen entnommen, bezw. die Beobachtungen der Südsterne auf den Meridian reducirt. Danach werden zu strenger Elimination des Zenithpunktfehlers die Beobachtungen bei Kreis West einzeln mit dem nächstliegenden bei Kreis Ost verbunden und alsdann die arithmetischen Mittel für jeden Stern gebildet. Vereinigt man hierauf die

Ergebnisse der verschiedenen Sätze und Stände für einen und denselben Stern zu einem Mittelwerth φ, so liefert, wenn man den definitiven Werth der Polhöhe mit φ_0 und die Biegung im Horizont mit b bezeichnet, jeder Stern eine Gleichung von der Form

$$\varphi_0 = \varphi \mp b \sin z$$

wo sich das obere Zeichen auf den Polarstern, das untere auf den Südstern bezieht. Aus diesen Gleichungen ist dann, eventuell nach der Methode der kleinsten Quadrate, der Biegungscoëfficient b zu ermitteln, und danach die Bestimmung aus den einzelnen Sternen zu corrigiren, aus deren innerer Uebereinstimmung dann auf die wirkliche Sicherheit des Resultats Schlüsse gezogen werden können.

Was nun die Entnahme der scheinbaren Oerter der Sterne aus den Ephemeridensammlungen betrifft, so ist noch zu untersuchen, welchen Einfluss die tägliche Aberration ausübt, da in den Sternörtern selbst nur die Präcession, Nutation und jährliche Aberration Berücksichtigung finden. An die Rectascension und Declination des beobachteten Sternes sind für die tägliche Aberration folgende Correctionen anzubringen:

$$d\alpha = -0''\!\cdot\!32 \cos\varphi \sec\delta \cos t = -\lambda \sec\delta \cos t$$
$$d\delta = -0''\!\cdot\!32 \cos\varphi \sin\delta \sin t = -\lambda \sin\delta \sin t.$$

Durch Differentiation und einfache Beziehungen in den Grundgleichungen des sphärischen Dreieck Pol, Zenith, Stern findet sich dann

$$dz = 0''\!\cdot\!32 \cos\varphi \sin a \cos z.$$

Für Aequatorsterne ist nun dz an und für sich unbedeutend, da wir in kleinen Azimuthen beobachten, durch die Beobachtungen zu beiden Seiten des Meridians verschwindet es aber vollständig. Bei den Beobachtungen des Polarsterns wird $\sin a$ ebenfalls nicht gross, im Maximum in den mittleren Breiten nur etwa den Betrag $\frac{1}{20}$ erreichen, daher $dz = 0''\!\cdot\!016 \cos\varphi \cos z$; nun ist aber $\cos z$ nie viel von $\sin\varphi$ verschieden und daher dz approximativ $= 0''\!\cdot\!008 \sin 2\varphi$. Der Maximalfehler beträgt also kaum $0''\!\cdot\!01$ und kann man daher von der Berücksichtigung der täglichen Aberration bei diesen Beobachtungen absehen.

Bei Beobachtungen der Sonne ist zur Reduction der Circummeridianzenithdistanzen auf den Meridian noch auf die veränderliche Deklination Rücksicht zu nehmen. Es kann das in verschiedener Art geschehen. Erstens man berechnet für jede einzelne Zenithdistanz die für die Zeit der Beobachtung gültigen Deklinationen und rechnet dann mit diesen nach den pag. 445 gegebenen Formeln die Reduction und erhält, da

$$z_0 = \varphi - \delta = z + Am + Bn$$

war, die Einzelwerthe

$$\varphi = \delta' + z' + Am' + Bn'$$
$$\varphi = \delta'' + z'' + Am'' + Bn''$$
$$\varphi = \delta''' + z''' + Am''' + Bn'''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nimmt man unter Voraussetzung von n Beobachtungen gleich das Mittel, so ist dann

$$\varphi = \frac{1}{n}(\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots) + \frac{1}{n}(z' + z'' + z''' + \ldots) + \frac{1}{n}A(m' + m'' + m''' + \ldots)$$
$$+ \frac{1}{n}B(n' + n'' + n''' + \ldots)$$

und man kann bei den geringen Unterschieden in der Zeit dabei ohne Bedenken für das Mittel aus den einzelnen Deklinationswerthen gleich die Deklination anwenden, die für das Mittel der Beobachtungszeiten gilt und auch das Mittel der m und n berechnen. Dabei entgeht man allerdings dem Vortheil, aus der Uebereinstimmung der Einzelwerthe auf etwaige Unrichtigkeiten in der Rechnung oder Beobachtung schliessen zu können. Zweitens — und das ist mehr zu empfehlen — reducirt man nicht auf den Moment des Meridiandurchgangs, sondern auf den der grössten Höhe der Sonne, wozu man die an anderer Stelle (I, pag. 661, 62) gegebene Berechnung für dieselbe anwendet. Es ist dann jedoch der dort gefundene Ausdruck mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen. Nennt man nämlich die Veränderung der Deklination in 48 Stunden μ, und drücken wir den Stundenwinkel t in Stunden aus, und nennen die für den Meridiandurchgang gültige Deklination δ_0, so ist, wenn wir beim ersten Glied der Reduction stehen bleiben

$$\varphi = z + \delta_0 + \frac{\mu}{48} - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t$$
$$= z + \delta_0 - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(t + y),$$

indem wir μ mit t in Verbindung bringen. Daraus wird

$$y = -\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta} \cdot \frac{206265}{3600 \cdot 15} \cdot \frac{\mu}{48}$$

oder wenn y in Zeitsecunden ausgedrückt werden soll,

$$y = -\frac{206265}{3600 \cdot 15^2} \cdot \frac{\mu}{48} \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta} = 0{\cdot}00530\,\mu(\tang\varphi - \tang\delta),$$

d. i. derselbe Ausdruck wie I, pag. 662, wo $\frac{d\delta}{dt}$ das Verhältniss der Aenderung der Deklination zu der des Stundenwinkels und $d\delta$ selbst die Veränderung der Deklination in der Zeitsecunde war. Man hat also mit der für die Culmination selbst gültigen Deklination zu rechnen, dabei aber nun nicht die Stundenwinkel vom Meridiandurchgang an zu zählen, sondern vom Augenblick der grössten Höhe.

Es wäre vielleicht hier der geeignete Ort, noch die verschiedenen Methoden anzuführen, die sich auf die Messungen von Zenithdistanzen aus mehreren Sternen gründen. Da dieselben aber gleichzeitig die Bestimmung der Zeit gestatten und in der Praxis zum Theil wenigstens häufiger für letztere Zwecke als für den der Polhöhenbestimmung zur Verwendung gelangen, so mag, um Wiederholungen zu vermeiden, für dieselben auf den Artikel »Zeitbestimmung« verwiesen sein.

Wir geben nun ein vollständiges Beispiel, nämlich 1) eine Beobachtungsreihe des Polarsterns, 2) eine solche von Südsternen mit deren Reductionen. Dieselben sind den Arbeiten des Königlich Preussischen Geodätischen Instituts aus dem Jahre 1881 entnommen.

Die Beobachtungen wurden auf dem Gollenberg bei Cöslin in der Zeit vom 14. Juni bis 1. Juli angestellt und es kam dabei ein Universalinstrument mit 13zölligem Kreis und 70facher Vergrösserung zur Anwendung. Zur Elimination der Theilfehler wurden die Beobachtungen auf 4 äquidistante Stände des Verticalkreises gleichmässig vertheilt und zu Ermittlung der Biegung der Polarstern einerseits, und die Sterne α, β Leonis, β Pegasi, α Andromedae, anderer-

seits eingestellt. An dieser Stelle genügt es natürlich, die Beobachtungen nur eines Tages mitzutheilen.

Die scheinbaren Oerter der benutzten Sterne waren:

	Polaris		α Leonis	
Juni 16	$\alpha = 1^h\,15^m\,9^s{\cdot}43$	$\delta = 88°\,40'\,23''{\cdot}41$		
17	10·26	23·35	$\alpha = 10^h\,2^m\,3^s{\cdot}93$	$\delta = +12°\,32'\,41''{\cdot}89$
18	11·11	23·27	3·92	41·96

	β Leonis		α Pegasi	
Juni 17	$\alpha = 11^h\,43^m\,1^s{\cdot}74$	$\delta = +15°\,14'\,2''{\cdot}63$	$\alpha = 22^h\,58^m\,52^s{\cdot}73$	$\delta = 14°\,34'\,5''{\cdot}26$
18	1·72	2·72	52·75	5·44

	α Andromedae	
Juni 17	$\alpha = 0^h\,2^m\,16^s{\cdot}72$	$\delta = +28°\,26'\,5''{\cdot}88$
18	16·78	6·18.

a. Polaris.

1881	Kreis-lage	Sternzeit der Beobachtung	Beobachtete Zenithdistanz	Refraction	Reduction auf d. Complement d. Polhöhe bez. den Meridian	Polhöhen aus den einzelnen Beobacht.	Polhöhen aus beiden Kreislagen
Juni 16	*W*	$0^h20^m33^s{\cdot}43$	34° 29′ 36″·00	+39″·55	+1°17′17″·26	54°12′27″·19	54°12′27″·66
(Mor-	*W*	23 0·43	29 24·30	39·54	17 29·44	26·72	27·55
gens)	*O*	26 16·13	29 7·35	39·53	17 44·75	28·37	
	O	28 49·43	28 56·25	39·52	17 56·11	28·12	
	O	31 0·43	28 47·50	39·51	18 5·31	27·68	
	O	33 7·43	28 39·00	39·50	18 13·83	27·67	
	O	35 7·43	28 31·65	39·49	18 21·49	27·37	
	W	38 33·43	28 19·25	39·47	18 33·79	27·49	27·43
	W	40 46·43	28 12·55	39·46	18 41·15	26·84	27·26
	W	42 54·43	28 5·40	39·45	18 47·81	27·34	27·61
Juni 17	*W*	10 58 4·43	36 53 1·60	+42·79	−1 6 10·82	54 12 26·43	54 12 26·68
(Abends)	*W*	11 0 22·42	53 27·10	42·80	6 36·92	27·02	27·25
	O	3 33·92	54 2·20	42·81	7 12·49	27·48	
	O	5 48·92	54 27·35	42·82	7 37·10	26·93	
	O	7 50·93	54 49·50	42·82	7 59·01	26·69	
	O	10 6·93	55 13·05	42·83	8 23·06	27·18	
	O	12 4·93	55 34·50	42·83	8 43·62	26·29	
	W	15 21·94	56 6·75	42·84	9 17·26	27·67	26·98
	W	17 34·94	56 30·25	42·84	9 39·52	26·43	26·81
	W	19 54·94	56 52·35	42·85	10 2·52	27·32	27·01

b. α Pegasi.

1881	Kreis-lage	Sternzeit der Beobachtung	Beobachtete Zenithdistanz	Refraction	Reduction auf d. Complement d. Polhöhe bez. den Meridian	Polhöhen aus den einzelnen Beobacht.	Polhöhen aus beiden Kreislagen
Juni 16	*O*	22 46 56·91	39 41 38·45	+48·09	−0 4 7·74	54 12 24·06	
(Mor-	*O*	49 25·91	40 5·35	48·03	2 35·39	23·25	
gens)	*O*	52 22·11	38 45·50	47·98	1 13·82	24·92	
	O	55 21·41	37 52·95	47·93	0 21·61	24·53	
	W	58 48·41	37 30·90	47·90	0 0·01	24·05	54 12 24·29
	W	23 1 24·41	37 41·95	47·90	0 11·13	23·98	24·45
	W	4 11·41	38 20·90	47·89	0 49·14	24·91	24·08
	W	6 19·91	39 9·05	47·91	1 36·74	25·48	24·77

α Andromedae

1881	Kreis-lage	Sternzeit der Beobachtung	Beobachtete Zenithdistanz	Refraction	Reduction auf d. Complement d Polhöhe bez. den Meridian	Polhöhen aus den einzelnen Beobacht.	Polhöhen aus beiden Kreislagen
Juni 16	W	23 51 54·42	25 50 0·70	+27·87	—0 4 9·50	54 12 24·95	54 12 24·38
(Morgens)	W	55 10·41	47 48·85	27·82	1 57·16	25·39	25·48
	W	57 29·92	46 44·10	27·80	0 53·05	24·73	24·27
	W	0 0 17·92	45 59·95	27·79	0 9·11	24·51	24·64
	O	6 3·43	46 24·25	27·79	0 33·15	24·77	
	O	8 39·03	47 24·35	27·82	1 34·25	23·80	
	O	10 48·43	48 40·60	27·85	2 48·77	25·56	
	O	13 23·03	50 36·00	27·89	4 45·96	23·81	

α Leonis

1881	Kreis-lage	Sternzeit der Beobachtung	Beobachtete Zenithdistanz	Refraction	Reduction auf d. Complement d Polhöhe bez. den Meridian	Polhöhen aus den einzelnen Beobacht.	Polhöhen aus beiden Kreislagen
Juni 17	W	9 50 59·67	41 42 18·35	+50·65	—0 3 26·53	54 12 24·36	54 12 24·32
(Abends)	W	53 14·37	41 1·75	50·64	2 11·30	22·98	23·80
	W	55 58·17	39 55·65	50·61	1 2·65	25·50	24·12
	W	59 14·87	39 5·00	50·61	0 13·39	24·11	24·07
	O	10 2 26·87	38 51·75	50·63	0 0·25	24·02	
	O	7 49·88	39 46·20	50·69	0 56·05	22·73	
	O	11 25·38	41 19·55	50·76	2 27·58	24·62	
	O	14 16·28	43 2·55	50·84	4 11·01	24·27	

β Leonis

1881	Kreis-lage	Sternzeit der Beobachtung	Beobachtete Zenithdistanz	Refraction	Reduction auf d. Complement d Polhöhe bez. den Meridian	Polhöhen aus den einzelnen Beobacht.	Polhöhen aus beiden Kreislagen
Juni 17	O	11 31 21·35	39 1 34·60	+46·22	—0 3 59·90	54 12 23·55	
(Abends)	O	34 27·15	38 59 44·30	46·18	2 9·52	23·59	
	O	37 7·35	58 36·55	46·16	1 1·45	23·89	
	O	39 21·95	58 0·15	46·14	0 23·64	25·28	
	W	42 47·96	57 36·60	46·14	0 0·09	25·28	54 12 25·28
	W	45 17·46	57 44·95	46·16	0 9·01	24·73	24·31
	W	47 37·96	58 11·75	46·18	0 37·34	23·22	23·41
	W	50 1·28	59 3·50	46·21	1 26·09	26·24	24·90

Zur Berechnung der Refractionen dienten folgende Thermometer- und Barometerstände, letztere bereits auf 0° reducirt.

	Sternzt.	Therm.	Barom.
Juni 16	$22^h{\cdot}8$	+ 7°·7 C.	
	23 0	+ 8·1	$750^{mm}{\cdot}4$
	23·1	+ 8·5	
	23 9	+ 9·8	
	0·0	+ 9·8	750·5
	0·2	+ 9·7	
	0·3	+ 9·8	
	0·5	+ 9·9	750·6
	0·7	+10·2	

	Sternzt.	Therm.	Barom.
Juni 17	$9^h{\cdot}8$	+ 13°·5	$751^{mm}{\cdot}0$
	10·2	+ 12·4	751·0
	11·0	+ 12·5	750·9
	11·3	+ 12·8	
	11·5	+ 12·5	750·8
	11·8	+ 12·0	

Aus den Werthen der letzten Columne wurden die Mittel gebildet und diese wiederum mit den entsprechenden Werthen der übrigen Abende zu Gesammtmitteln vereinigt und zur Ermittelung der Biegung benutzt, indem diese im Horizont mit b bezeichnet Gleichungen der Form $\varphi_0 = \varphi \mp b \sin z$ liefert, wobei

das obere Zeichen für den Polarstern, das untere für Südsterne gilt. Alle Beobachtungen führten zum Resultat

Polaris	$\varphi = 54° \; 12' \; 28''\cdot09$	$- \; 0\cdot586 b$
α Leonis	$12 \; 23 \; \cdot22$	$+ \; 0\cdot665 b$
β Leonis	$23 \; \cdot61$	$+ \; 0\cdot629 b$
α Pegasi	$24 \; \cdot58$	$+ \; 0\cdot638 b$
α Andromedae	$24 \; \cdot59$	$+ \; 0\cdot435 b$

welchen Gleichungen die Werthe

$$\varphi = 54° \; 12' \; 26''\cdot06 \qquad b = + \; 3''\cdot47$$

entsprechen.

Eine nicht minder wichtige Methode ist die folgende, wonach man die Polhöhe aus Durchgangsbeobachtungen am Passageninstrument im I. Vertical bestimmt. Nehmen wir in dem sphärischen Dreieck Pol, Zenith, Stern die Gleichung

$$cotang \, a \, sin \, t = - \, cos \, \varphi \, tang \, \delta - sin \, \varphi \, cos \, t$$

unter den eingeführten Bezeichnungen, so sehen wir, dass wenn δ, t, a bekannt ist, daraus φ ermittelt werden kann. Es ist nun zu untersuchen, ob sich ein besonderer Verticalkreis für die Bestimmung von φ günstiger erweist als andere. Differenziren wir die Gleichung, so kommt

$$d\varphi(cos \, t \, cos \, \varphi + tang \, \delta \, sin \, \varphi) = (cotang \, a \, cos \, t + sin \, t \, sin \, \varphi) dt - \frac{sin \, t}{sin^2 \, a} da + \frac{cos \, \varphi}{cos^2 \, \delta} d\delta$$

oder da

$$cos \, t \, cos \, \varphi + tang \, \delta \, sin \, \varphi = \frac{cos \, z}{cos \, \delta}$$

ist, so wird

$$d\varphi = \frac{cotang \, a \, cos \, t + sin \, t \, sin \, \varphi}{cos \, z} cos \, \delta \, dt - \frac{sin \, t \, cos \, \delta}{sin^2 \, a \, cos \, z} da + \frac{cos \, \varphi}{cos \, \delta \, cos \, z} d\delta,$$

welcher Ausdruck sich leicht in den folgenden verwandelt:

$$d\varphi = \frac{cos \, q \, cos \, \delta}{cos \, z \, sin \, a} dt - \frac{tang \, z}{sin \, a} da + \frac{sin \, q}{cos \, z \, sin \, a} d\delta.$$

Man sieht daraus, dass man vor allem danach trachten muss, $sin \, a$ und $cos \, z$ so gross als möglich zu machen, oder das Azimuth $a = 90°$ und die Zenithdistanz z nahe $= 0$. Beides wird erreicht, wenn wir Sterne, deren Deklination nahe gleich der Polhöhe des Beobachtungsortes ist, bei ihrem Durchgang durch den ersten Vertical beobachten. Unter diesen Verhältnissen werden nicht allein die Nenner am grössten, sondern gleichzeitig wird $cos \, q \, cos \, \delta$ (welches $= sin \, \varphi \, sin \, z + cos \, \varphi \, cos \, z \, cos \, a$ ist) sowie selbstverständlich $tang \, z$ sehr klein. Nur der Faktor von $d\delta$ wird nahe $= 1$, woraus wir wiederum sehen, dass wir mit derselben Genauigkeit wie aus bekannter Deklination die Polhöhe, so umgekehrt aus bekannter Polhöhe die Deklination des Sternes finden können. Es wird daher bei der Methode die Polhöhe durch Beobachtungen im ersten Vertical zu ermitteln, eine Methode, die sonst sehr grosse Genauigkeit zulässt, darauf Bedacht genommen werden müssen, dass nur sehr sorgfältig bestimmte Sterne zur Verwendung kommen, die namentlich auch, wenn ihre Bestimmungsepoche weiter zurückliegt, genau auf Eigenbewegungen untersucht sein müssen.

Setzen wir in obige Gleichung $a = 90°$, so wird

$$cos \, t = tang \, \delta \, cotang \, \varphi,$$

wo nun $t = U + \Delta u - \alpha$ zu setzen ist, wenn U die beobachtete Durchgangszeit, Δu die an dieselbe anzubringende Correction für den Uhrstand, und α die Rectascension des Sternes ist. Es bestimmt sich also die Polhöhe durch Zeitbeobachtungen, unabhängig von Winkelmessungen, und es wird die Behandlung der Beobachtungen, bezw. des angewandten Instrumentes die analoge sein, wie sie bei Zeitbestimmungen im Meridian am Passageninstrument und Meridiankreis vorkommt. Befindet sich das Instrument nicht genau im ersten Vertikal, macht z. B. die Umdrehungsaxe mit der Ebene des Horizonts einen Winkel b, oder macht sie mit der Ebene des ersten Verticals einen Winkel $90° \pm k$, oder beträgt der Winkel zwischen der Absehenslinie und der Umdrehungsaxe $90° \pm c$, oder wirken alle diese Fehler zusammen, so muss die beobachtete Durchgangszeit U entsprechend corrigirt werden, ebenfalls wenn wir an einem Seitenfaden statt am Mittelfaden beobachten, oder mehrere solcher Fäden zur Verwendung kommen, wo man dann entweder die Reduction auf den Mittelfaden vorzunehmen oder in geeigneter Anwendung die Fadendistanzen zu eliminiren hat.

Es kann hier im Grossen und Ganzen auf den Artikel »Passageninstrument« verwiesen werden, in welchem die Beobachtungen im ersten Vertical ausführlich behandelt sind. Hier braucht nur das mitgetheilt zu werden, was die Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit der Methode der Polhöhenbestimmungen erfordert.

Für die Beobachtungen im ersten Vertical bestehen die folgenden vier Gleichungen (s. »Passageninstrument«, pag. 359 ff.), in denen die üblichen Bezeichnungen beibehalten sind, nämlich k das Azimuth positiv von Norden gegen Westen, i die Erhöhung des Nordendes der Umdrehungsaxe, $90° + c$ der Winkel der Absehenslinie mit dem nördlichen Axenende, (ist dieses Ende zugleich das Kreisende, so hat man bei Kreis Süd für den Winkel zwischen der optischen Axe und dem nördlichen Axenende $90° - c$) f der Abstand eines südlichen Seitenfadens vom Mittelfaden und vorausgesetzt, dass man die Beobachtungen an demselben Seitenfaden in beiden Kreislagen anstellt:

$$\text{I. } \sin(\varphi - \delta) = 2\cos\delta \sin\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}t + c - f + i\cos z + k\sin z \quad \text{Kr. N. Stern West}$$
$$\text{II. } \sin(\varphi - \delta) = 2\cos\delta \sin\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}t + c - f + i\cos z - k\sin z \quad \text{Kr. N. Stern Ost}$$
$$\text{III. } \sin(\varphi - \delta) = 2\cos\delta \sin\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}t - c + f + i\cos z + k\sin z \quad \text{Kr. S. Stern West}$$
$$\text{IV. } \sin(\varphi - \delta) = 2\cos\delta \sin\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}t - c + f + i\cos z - k\sin z \quad \text{Kr. S. Stern Ost}$$

oder

$$\text{I. } \tan\varphi = \tan\delta \sec t + c\sec z - f\sec z + i + k\tan z \quad \text{Kr. N. Stern West}$$
$$\text{II. } \tan\varphi = \tan\delta \sec t + c\sec z - f\sec z + i - k\tan z \quad \text{Kr. N. Stern Ost}$$
$$\text{III. } \tan\varphi = \tan\delta \sec t - c\sec z + f\sec z + i + k\tan z \quad \text{Kr. S. Stern West}$$
$$\text{IV. } \tan\varphi = \tan\delta \sec t - c\sec z + f\sec z + i - k\tan z \quad \text{Kr. S. Stern Ost}$$

oder, indem man die Durchgangszeiten verbessert, um den richtigen Stundenwinkel zu erhalten

$$t = U + \frac{i}{\sin\varphi \tan z} + \frac{k}{\sin\varphi} + \frac{c}{\sin\varphi \sin z} \quad \text{Kr. N. Stern West}$$
$$t = U - \frac{i}{\sin\varphi \tan z} + \frac{k}{\sin\varphi} - \frac{c}{\sin\varphi \sin z} \quad \text{Kr. N. Stern Ost}$$
$$t = U - \frac{i}{\sin\varphi \tan z} + \frac{k}{\sin\varphi} - \frac{c}{\sin\varphi \sin z} \quad \text{Kr. S. Stern West}$$
$$t = U - \frac{i}{\sin\varphi \tan z} + \frac{k}{\sin\varphi} + \frac{c}{\sin\varphi \sin z} \quad \text{Kr. S. Stern Ost}$$

und dann φ berechnet nach $\tan\varphi = \tan\delta \sec t$.

Es wurde erwähnt, dass die Zenithdistanz der Sterne möglichst klein sein muss; man ist also bei der Auswahl der Sterne an Grenzen gebunden, wenn man genaue Resultate haben will. Um hierfür Anhaltspunkte zu gewinnen, entwickeln wir die Differentialformel für den ersten Vertical. Es ergiebt sich leicht:

$$d\varphi = \sin\varphi \tang z\, dt - \tang z\, da + \cos\varphi \sec z \sec\delta\, d\delta.$$

Wie bedeutend der Einfluss einer fehlerhaften Annahme in der Zeit oder eines Fehlers im Azimuth mit der Zunahme der Zenithdistanz wächst, lässt sich durch folgende Täfelchen zeigen, welche mit dem Argument $\varphi - \delta$ (bei Tafel I mit zugehörigem φ) die Fehler angeben, die ein Fehler von t um 1^s, bezw. ein solcher von a um $1''$ in φ in Bogensecunden hervorbringt.

Tafel I. $\frac{d\varphi}{dt}$ $dt = 1^s$

$\varphi - \delta$ \ φ	35°	45°	55°	65°
0° 0′	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00
5	0·40	0·50	0·58	0·64
10	0·60	0·74	0·86	0·96
15	0·74	0·91	1·06	1·18
20	0·86	1·06	1·22	1·36
25	0·96	1·18	1·36	1·51
30	1·05	1·30	1·50	1·66
40	1·22	1·50	1·73	1·92
50	1·36	1·68	1·94	2·15
1 0	1·49	1·85	2·13	2·36
10	1·62	2·00	2·31	2·56
20	1·74	2·14	2·47	2·75
30	1·85	2·27	2·63	2·92
40	1·96	2·41	2·78	3·09
50	2·06	2·54	2·93	3·26
2 0	2·15	2·65	3·07	3·40
20	2·33	2·88	3·34	3·70
40	2·51	3·10	3·60	3·98
3 0	2·68	3·30	3·83	4·24
20	2·84	3·50	4·06	4·50
40	3·00	3·69	4·28	4·74
4 0	3·15	3·88	4·50	4·98

Tafel II. $\frac{d\varphi}{da}$ $da = 1''$

$\varphi - \delta$	$\frac{d\varphi}{da}$
0° 0′	0″·000
5	0·045
10	0·070
15	0·086
20	0·100
25	0·111
30	0·122
40	0·142
50	0·158
1 0	0·174
10	0·188
20	0·202
30	0·215
40	0·227
50	0·239
2 0	0·250
20	0·272
40	0.293
3 0	0·312
20	0·331
40	0·349
4 0	0·366

Was den Fehler in t betrifft, so besteht dieser einestheils in der Unsicherheit der Zeitbestimmung, anderentheils aber aus dem Fehler, den man bei der Beobachtung des Fadenantritts im Schätzen der Zeit begeht und der hier wesentlich zusammengesetzterer Art ist, als bei den gewöhnlichen Antrittsbeobachtungen. Namentlich wird derjenige Theil des letzteren, der aus dem Gesichtsfehler (oder der Zeit, um welche man die Sterne früher oder später den Faden durchschneiden sieht, als es in Wahrheit der Fall ist) resultirt, grösseren Schwankungen unterliegen, da der Stern bei den Beobachtungen im ersten Vertical die Fäden schräg durchschneidet und der Winkel, unter dem dies geschieht, sowie die Schnelligkeit seiner Bewegung mit veränderter Zenithdistanz sich sehr rasch ändert. Von ganz besonderem Vortheil dürfte auch hier die Benutzung eines Repsold'schen Contactmikrometers sein, wie es in neuerer Zeit bei den Meridianbeobachtungen angewandt wird; eingehende Untersuchungen sind allerdings mit

demselben im ersten Vertical noch nicht gemacht, und damit gewisse Bedenken noch nicht widerlegt, die hauptsächlich darin bestehen, dass es bei dem schrägen Durchlaufen des Sterns sehr schwer sein wird, ihn immer mit der Zenithdistanzschraube an derselben Stelle des Gesichtsfeldes zu halten.

Was die Bestimmung der Fehler i, $c+f$, k betrifft, so zeigen die Formeln, dass man durch die Beobachtung des Sterns beim östlichen und westlichen Durchgang durch den ersten Vertical, wenn man das Instrument inzwischen umlegt, $c+f$ und k eliminirt, dagegen erhalten wir für die Neigung $\frac{1}{2} \cos z (i_o + i_w)$, und da z stets klein anzunehmen ist, so wird $\cos z = 1$; man sieht also, dass der Fehler i vollkommen auf das Resultat von $\varphi - \delta$ übergeht, und daher auf diese Bestimmung die denkbar grösste Sorgfalt zu verwenden ist. Bei den gebräuchlichen Passageninstrumenten mit gebrochenem Fernrohr ist die Einrichtung getroffen, dass das Niveau stets an der Axe hängen bleibt. Man ist daher in der Lage, die Libelle bei der Beobachtung jedes Sternes mehrfach abzulesen, wobei allerdings nach dem Umhängen der Libelle vor zu rascher Ablesung gewarnt werden muss. Ausserdem wird man gut thun, am Stativ des Instruments zwischen Beobachter und Okular einerseits, zwischen Lampe und Instrument andererseits eine Schutzvorrichtung anzubringen, damit die Wärme des Beobachters bezw. der Lampe nicht Instrument oder Libelle beeinflusst.

Bei der Elimination von $k \sin z = k \cos \delta \sin t$ gilt freilich die Voraussetzung, dass k sich während der ganzen Zeit der Beobachtung nicht geändert hat. Bei dem häufigen Umlegen ist daher ebenfalls grosse Vorsicht zu gebrauchen und auch mit Rücksicht auf diese Veränderlichkeit ist die Anbringung von Schutzvorrichtungen gegen die Temperaturschwankungen sehr zu empfehlen. Auch eine Controle des Azimuthes durch Miren ist wünschenswerth, aber in seltenen Fällen durchführbar. Bei Benutzung eines Universalinstrumentes statt des Passageninstrumentes kann man hierfür die Ablesung des Horizontalkreises verwenden, indessen wird dieser Vortheil des Universalinstruments durch die viel geringere Festigkeit im ganzen Bau, die namentlich bei der Umlegung in Frage kommt, reichlich zu Gunsten des Passageninstruments aufgewogen. Welchen Einfluss eine Veränderlichkeit von k auf die gesuchte Grösse $\varphi - \delta$ hat, lässt sich numerisch leicht in folgender Weise darstellen.

Bezeichnen wir der Kürze wegen $2 \cos \delta \sin \varphi \sin^2 \frac{1}{2} t$ mit R, und je nachdem der Stern im Osten oder Westen beobachtet worden, mit R_o, R_w, dementsprechend die beim Ostdurchgang und Westdurchgang stattfindenden Azimuthe k mit k_o, k_w, so wird, wenn wir noch für $\sin(\varphi - \delta)$ abgekürzt $(\varphi - \delta)$ setzen:

$$\varphi - \delta = R_o - k_o \cos \delta \sin t_o$$
$$\varphi - \delta = R_w - k_w \cos \delta \sin t_w .$$

Ferner sei k_m das für die Mitte der Durchgangszeiten, oder für den Meridiandurchgang stattfindende Azimuth, so ist

$$k_o = k_m - u\,dk \quad \text{und} \quad k_w = k_m + u\,dk,$$

wo wir mit u den halben Unterschied der Zeiten des östlichen und westlichen Durchgangs bezeichnen. Hiernach wird

$$\varphi - \delta = R_o - k_m \cos \delta \sin t_o + u\,dk \cos \delta \sin t_o$$
$$\varphi - \delta = R_w - k_m \cos \delta \sin t_w - u\,dk \cos \delta \sin t_w$$

oder durch Vereinigung beider Gleichungen

$$\varphi - \delta = \tfrac{1}{2}(R^o + R_w) - u\,dk \cos \delta \sin u.$$

Wir können nun für eine bestimmte Polhöhe und verschiedene Werthe von $\varphi - \delta$ den Ausdruck $u \cos \delta \sin u$ berechnen. Setzen wir dann noch für dk

eine bestimmte Grösse, so erhalten wir auf diese Art die gesuchte Veränderung, welche dk auf $\varphi - \delta$ bewirkt. Sei z. B. $\varphi = 50°$ und die Veränderung von k in dem Intervall von $10^m = 1''$, so erhalten wir folgende Zahlen

$\varphi - \delta$	t	$u\,dk\cos\delta\sin u$	$\varphi - \delta$	t	$u\,dk\cos\delta\sin u$
0° 10′	24^m·9	0″·17	1° 30′	74^m·0	1″·55
20	35·1	0·35	2 0	85·0	2·06
30	43 0	0 52	2 30	94·8	2·58
40	49·6	0·69	3 0	103·5	3·10
50	55·4	0·87	4 0	118·7	4 00
1 0	60·6	1 05	5 0	131·8	5 08

Auch für die Elimination von c gilt die Voraussetzung der Constanz dieses Fehlers während der im Allgemeinen mehrere Stunden dauernden Zeit zwischen dem Ost- und Westdurchgang. Wird man bei den jetzigen Instrumenten auch wohl eine starke Veränderlichkeit des Collimationsfehlers nicht zu befürchten haben, so ist es doch stets von Vortheil, eine noch wirksamere Elimination anzustreben umsomehr, da sich zeigen lässt, dass eine Veränderung in c etwa mit seinem halben Betrage ins Endresultat übergeht. STRUVE hat daher vorgeschlagen bei jedem Durchgange, sowohl in der Mitte des Durchgangs durch den Ostvertical, als in der des Westverticals umzulegen. Alsdann wird die Constanz von c nur während der kurzen Zeit des Durchgangs durch jeden Vertical verlangt. Die Elimination der übrigen Fehler ist die gleiche, wie aus der Betrachtung der Formeln ersichtlich. Man hat dieser Methode vorgeworfen, dass durch das häufige Umlegen des Fernrohrs das ganze Instrument in seiner festen Aufstellung nachtheilig beeinflusst werde, dass insbesondere Neigungs- und Azimuthänderungen in grösserem Maasse zu befürchten wären. Aber die Erfahrungen, die man bei Zeitbestimmungen, Längenbestimmungen, mit ähnlichen Instrumenten, den leicht umlegbaren gebrochenen Passageninstrumenten gemacht hat, wobei die Nivellirungen durch Umlegen des Fernrohrs statt der Libelle geschehen, haben unzweideutig gezeigt, dass die Befürchtung ungegründet ist, selbstverständlich unter Beachtung grösstmöglicher Vorsicht bei der ganzen Manipulation. Es darf darnach für die Bestimmung der Polhöhe im ersten Vertical die STRUVE'sche Methode wohl als die sicherste angesehen werden. Man wird also Sterne möglichst nahe dem Zenith aussuchen, deren Bewegung eine so langsame ist, dass sich die Umlegung beim Durchgang durch jeden Vertical bequem ausführen lässt. Es werden dann die ersten Fäden bis zum Mittelfaden in der einen Kreislage (Ostvertical), dann nach Umlegung dieselben Fäden in der anderen Kreislage (Ostvertical) beobachtet und in gleicher Weise beim Westvertical verfahren. In jeder Kreislage macht man eine vollständige Nivellirung, thunlichst in der der Zenithdistanz des Sterns entsprechenden Lage des Fernrohrs. Man erhält dadurch 4 Durchgangszeiten für jeden Faden, die wir mit $U_{o\,I}$, $U_{o\,II}$, $U_{w\,II}$, $U_{w\,I}$ bezeichnen, wo sich die Indices o und w auf den Durchgang des Sterns durch den Ost- bezw. Westvertical beziehen, die Indices I, II auf die Kreislage des Instruments. Nennen wir dann

$$U_{wI} - U_{oI} = t' \qquad U_{wII} - U_{oII} = t''$$
$$\tfrac{1}{4}(U_{oI} + U_{oII} + U_{wII} + U_{wI}) - \alpha = \Delta$$

so wird die Polhöhe, abgesehen vom Einfluss der Neigung der Horizontalaxe gegeben durch die Gleichung

$$tang\,\varphi' = tang\,\delta\,sec\,\tfrac{1}{2}(t' + t'')\,sec\,\tfrac{1}{2}(t' - t'')\cos\Delta.$$

Dieses Resultat ist dann noch um die halbe Summe der in den verschiedenen Kreislagen ermittelten Neigungswerthe $\frac{1}{2}(i_o + i_w)$ in dem entsprechenden Sinn zu corrigiren, um damit die wahre Polhöhe zu erhalten. So einfach sich diese Methode der Beobachtungen für die Rechnung gestaltet, so wird sie doch schon der beschränkten Zahl verfügbarer Sterne wegen nur seltener zur Anwendung kommen können. Man wird dann so verfahren, dass man eine grössere Zahl Sterne aussucht, die sich mit ihren Durchgängen durch den Ost- und Westvertical so ordnen lassen, dass man erst einige Sterne nach einander in einer Kreislage beobachtet, dann eine zweite Reihe in der anderen Kreislage auch im Ostvertical nimmt, dann die erste Reihe im Westvertical und endlich nach nochmaliger Umlegung die zweite Reihe im Westvertical beobachtet.

Gelingt es nun ferner nicht, die gleichen Fäden in allen zusammengehörigen Fällen zu beobachten, so kann man natürlich die beobachteten Fäden, wie bei Meridiandurchgängen auf den Mittelfaden reduciren, unter Voraussetzung, dass die Fadendistanzen selbst mit Sicherheit bekannt sind. Die Reduction ist aber wesentlich complicirter, und da ausserdem eine neue Unsicherheit bei diesem Verfahren ins Resultat eingeführt wird, so kann im Allgemeinen nur dem Verfahren zugestimmt werden, welches solche einfach beobachteten Fäden überhaupt von vornherein ausschliesst. Es wird aber ausdrücklich bemerkt, dass dies nur dann empfohlen werden kann, wenn an sonst guten Abenden hin und wieder einzelne Fäden verloren gingen, aber nicht, wenn etwa durch zweifelhafte Witterung oder ähnliche Verhältnisse die Zahl der gleichmässig beobachteten Fäden so gering wurde, dass bei Ausschluss der Uebrigen der ganze Abend als ein verlorener angesehen werden müsste, während die Reduction der beträchtlichen Anzahl der nicht gleichmässig beobachteten Fäden noch einen Abend mit beträchtlichem Gewicht liefern müsste. Für die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden kann auf die Ableitungen pag. 358 ff. d. Bandes (Art. »Passageninstrument«) verwiesen werden, ebenso hinsichtlich der Ermittlung der Fehler des Instrumentes, wo es nicht gelingt sie zu eliminiren. Nur mag hier noch daran erinnert werden, dass bei dem grossen Einfluss der Neigung auch bei einseitig beobachteten Sternen eine genaue Untersuchung der Zapfenform nicht unterlassen werden sollte.

Das Missliche der Methode bleibt immer noch die volle Abhängigkeit vom Sternort, selbst wenn es gelingt, bei der Beobachtung die Fehlerquellen, die im Instrument und seiner Aufstellung liegen und die unter steter Controle gehalten werden müssen, um über ihre Kleinheit nicht in Zweifel zu sein, zu eliminiren oder sehr gering zu machen. Bei der sonst so grossen Sicherheit der Methode, die frei von allen Messungen, Kreisablesungen ist, hat man für die Zwecke der Gradmessung ausgedehnte Sternverzeichnisse angelegt, welche die neuesten und genauesten Bestimmungen besonders geeigneter Sterne in weiten Grenzen enthalten. Aber es bleibt dabei immer zu beachten, dass auch solche für gewisse Epochen genau ermittelten Oerter für andere Epochen von geringem Werth sind, wegen der in der Regel nicht scharf bekannten Eigenbewegungen und sonstigen den Ort beeinflussenden Fundamentalgrössen der Astronomie.

Bevor auch von dieser Methode ein Beispiel gegeben wird, mag noch erwähnt werden, dass für die Beobachtungen gewisse Vorbereitungen nöthig sind, die sich auf die Ermittelung der Antrittszeiten und der Zenithdistanzen beziehen. Man hat zunächst zur Einstellung des für Collimation berichtigten Instrumentes in die Ebene des I. Vertical einen Stern von geringer Deklination aufzusuchen

und für diesen die Sternzeit seines Durchgangs durch den Vertical auszurechnen. Dazu dient die Formel

$$\cos t = \operatorname{tang} \delta \operatorname{cotang} \varphi,$$

und wenn α die Rectascension, ϑ die Sternzeit ist, ergiebt sich danach $\vartheta = \alpha \mp t$ für die Sternzeit des Durchgangs durch den östlichen, bezw. westlichen Vertical. Die Zenithdistanz des Sternes findet sich:

$$\cos z = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi},$$

wobei dann die Strahlenbrechung für geringe Höhen zu berücksichtigen ist. Sobald der Stern zur vorausberechneten Zeit den Mittelfaden passirt — man wird diese Beobachtung mehrfach mit Benutzung verschiedener Sterne und unter beständiger Correction der Neigung der Axe zu wiederholen haben — kann man sich mit der vorläufigen Aufstellung begnügen und hat dann durch eine genaue Fehlerbestimmung zu constatiren, ob die übrig gebliebenen Fehler noch zulässig oder weiter, eventuell unter Zuhilfenahme von Marken zu verringern sind. Es ist nun nicht allein für die erste Einstellung, sondern auch für die späteren definitiven Beobachtungen von Werth, die Zeit und Zenithdistanz zum Voraus zu kennen, zu welcher der Stern an einen gegebenen Seitenfaden tritt. Dazu dienen dann die leicht sich ergebenden Formeln:

$$J = \frac{i}{\sin \varphi \cos \delta \sin t} = \frac{i}{\sin \varphi \sin z},$$

wo i die Aequatorealfadendistanz, J die entsprechende für den Stern im ersten Vertical ist. Hat man danach J, so wird der Stundenwinkel $t \pm J$ und die Zenithdistanz $z \pm 15 J \cos \varphi$, worin für den Antritt an die Fäden vor oder nach dem Mittelfaden, im Ost- oder Westvertical einfache Ueberlegung das Zeichen bestimmt. Auch die Formeln

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang}(\delta \mp i)}{\operatorname{tang} \varphi} \qquad \cos z = \frac{\sin(\delta \mp i)}{\sin \varphi},$$

wo das obere Zeichen für den Ost-, das untere für den Westvertical gilt, führen rasch zum Ziel. Die Werthe $\cos t = \operatorname{tang} \delta \operatorname{cotang} \varphi$ und $\cos z = \sin \delta \operatorname{cosec} \varphi$ finden sich für die Breiten von 30—63° und für $\varphi - \delta$ von 0—3° in »ALBRECHT, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen« berechnet. Man wird sich vor Beginn einer längeren Beobachtungsreihe entweder aus diesen für eine gegebene Breite die Werthe interpoliren, oder sie auch leicht selbst tabuliren können. Ebenso dürfte es sich empfehlen, für die Fadendistanzen des zur Benutzung kommenden Instrumentes die Werthe J und $15 J \cos \varphi$ in eine Tabelle zu bringen.

Beispiel. Vom Königlich Preussischen Geodätischen Institut wurde im Jahre 1888 die Polhöhe der Schneekoppe durch Beobachtungen im I. Vertical ermittelt. Das Instrument war ein BAMBERG'sches gebrochenes Passageninstrument mit einem Objectiv von 82 *mm* Durchmesser, die angewandte Vergrösserung 115fach. Die Beobachtungen fanden statt vom 24. Juli bis 11. August und die Fadenantritte wurden registrirt. Das Programm umfasste 7 Sterne, welche nach folgendem Schema beobachtet wurden:

Kreis *N* oder *S* Stern B. A. C. 6717 . . . .
„ B. A. C. 6659 . . . .
„ ϑ Cygni . . . .

Umlegung

Kreis S oder N Stern e Cygni . . . .
„ B. A. C. 6985 . . . .
„ 51 Cygni . . . .
„ B. A. C. 7294 . . . .
. . . . Stern B. A. C. 66·59
. . . . „ ϑ Cygni
. . . . „ B. A. C. 6717

Umlegung

Kreis N oder S . . . . Stern e Cygni
. . . . „ B. A. C. 6985
. . . . „ 51 Cygni
. . . . „ B. A. C. 7294.

Die mittleren, bezw. scheinbaren Oerter dieser Sterne wurden theils durch direkte neue Bestimmungen an Meridiankreisen, theils aus den besten Sternverzeichnissen aufs genaueste ermittelt. Hier theilen wir nur die Beobachtungen zweier Sterne in verschiedener Kreislage mit, und zwar die von ϑ und e Cygni, am 24. Juli. Die Rectascensionen waren: ϑ Cygni $19^h\,33^m\,28^s{\cdot}96$, e Cygni $19^h\,58^m\,14^s{\cdot}15$. Die beobachteten Fäden tragen die in der ersten Columne gegebene Bezeichnung, die Berechnung erfolgt nach den ersten Formeln pag. 459 unter Benutzung von Hilfstafeln für $\sin^2 \frac{1}{2} t$.

	ϑ Cygni, Vert. Ost, Kr. Nord			ϑ Cygni, Vert. West, Kr. Süd			
Faden	Sternzeit d. Beobachtung	Stundenwinkel	$\varphi - \delta \mp F$	Sternzeit d. Beobachtung	Stundenwinkel	$\varphi - \delta \mp F$	$\varphi - \delta$
VII	$18^h\,37^m\,49^s{\cdot}96$	$55^m\,39^s{\cdot}00$	3013''·81	$20^h\,24^m\,46^s{\cdot}85$	$51^m\,17^s{\cdot}89$	2562''·75	2788''·28
d	38 21·66	55 7·30	2957·13	25 20·65	51 51·69	2619·11	2788·12
VI	38 53·16	54 35·80	2901·33	25 54·15	52 25·19	2675·56	2788·45
c	39 26·06	54 2·90	2843·61	26 28·25	52 59·29	2733·64	2788·63
V	39 58·86	53 30·10	2786·63	27 1·85	53 32·89	2791·46	2789·05
b	40 32·86	52 56·10	2728·18	27 34·65	54 5·69	2848·49	2788·34
IV	41 6·26	52 22·70	2671·34	28 7·05	54 38·09	2905·37	2788·36
a	41 40·46	51 48·50	2613·77	28 39·35	55 10·39	2962·63	2788·20
III	42 14·06	51 14·90	2557·79	29 10·75	55 41·79	3018·83	2788·31
	e Cygni, Vert. Ost, Kr. Süd			e Cygni, Vert. West Kr. Nord			
III	$18^h\,57^m\,16^s{\cdot}36$	$60^m\,57^s{\cdot}79$	3625''·95	$20^h\,55^m\,13^s{\cdot}05$	$56^m\,58^s{\cdot}90$	3170''·18	3398''·04
a	57 45·26	60 28·89	3569·22	55 43·25	57 29·10	3226·09	3397·66
IV	58 14·36	59 59·79	3512·53	56 13·95	57 59·80	3283·47	3398·00
b	58 43·96	59 30·19	3455·31	56 44·25	58 30·10	3340·60	3397·96
V	59 14·26	58 59·89	3397·23	57 14·65	59 0·50	3398·40	3397·83
c	59 44·06	58 30·09	3340·58	57 44·45	59 30·30	3455·58	3398·06
VI	19 0 14·96	57 59·19	3282·32	58 14·65	60 0·50	3513·91	3398·12
d	0 45·06	57 29·09	3226·08	58 43·75	60 29·60	3570·61	3398·35
VII	1 15·56	56 58·59	3169·55	59 12·05	60 57·90	3626·17	3397·86

Nimmt man aus den letzten Columnen die Mittelwerthe, so erhält man $\varphi - \delta$ für ϑ Cygni 0° 46′ 28″·42, für e Cygni 0° 56′ 37″·98; die Werthe für $i \cos z$ betrugen −1″·53 und −1″·78. Die scheinbaren Deklinationen (δ) waren für ϑ Cygni

49° 57′ 54″·59, für e Cygni 49° 47′ 45″·60, woraus dann durch Addition folgt $\varphi = 50^\circ\, 44'\, 21''\cdot 48$ bezw. 21″·80. Das Gesammtmittel aus allen 7 Sternen, die an je 4 Abenden beobachtet waren, ergab 50° 44′ 21″·46 ± 0″·12.

Die dritte hier zu besprechende Methode, welche namentlich in neuester Zeit sehr in Aufnahme kam, ist unter dem Namen HÖRREBOW-TALCOTT'sche Methode bekannt. Sie ist ursprünglich schon von RÖMER angegeben und auch praktisch angewandt worden.

Wir haben für einen südlich vom Zenith culminirenden Stern, dessen Deklination δ ist, bei seinem Meridiandurchgang die Zenithdistanz z

$$z = \varphi - \delta,$$

für einen anderen Stern, der nördlich vom Zenith culminirt, dessen Deklination δ' ist, dagegen beim Meridiandurchgang die Zenithdistanz z'

$$z' = \delta' - \varphi.$$

Subtrahiren wir beide Gleichungen, so haben wir

$$z - z' = 2\varphi - \delta - \delta'$$

oder

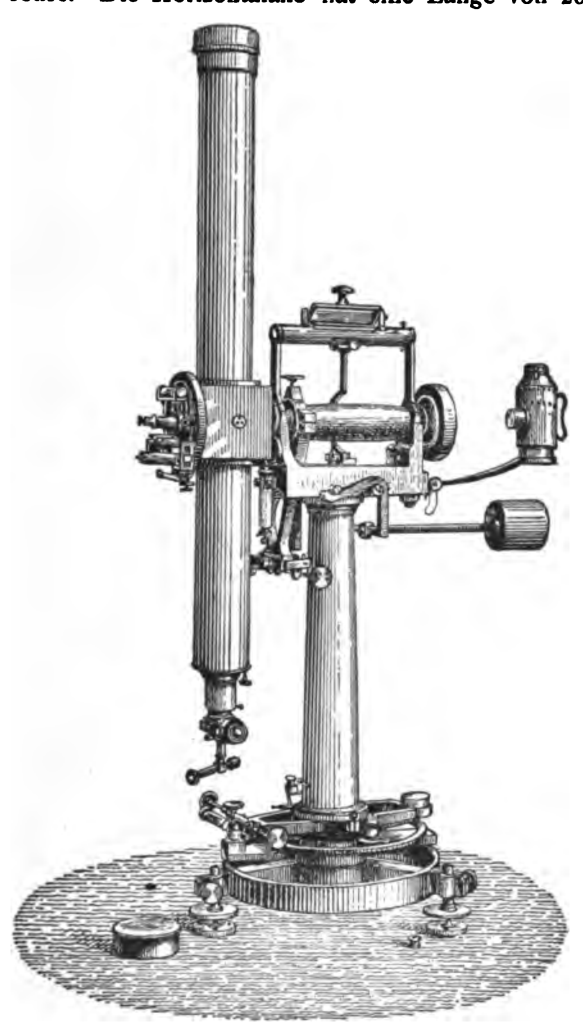
$$\varphi = \tfrac{1}{2}(z - z') + \tfrac{1}{2}(\delta + \delta').$$

Würde also $z = z'$ sein, so hätten wir natürlich $\varphi = \frac{1}{2}(\delta + \delta')$. Fänden sich also zwei rasch nach einander culminirende Sterne, sodass eine Veränderung des Instrumentes in der Zwischenzeit nicht zu befürchten wäre, von denen der eine bei nach Süden gerichtetem Fernrohr vom Faden bisecirt, und der andere bei genau gleich eingestellter Zenithdistanz des Fernrohrs, aber nach Norden, ebenfalls vom Faden bisecirt würde, so würde das Mittel der Deklinationen dieser beiden Sterne ohne Weiteres die geographische Breite geben. Die gleiche Zenithdistanzstellung des Fernrohrs erhält man, indem man, ohne die Klemme zu lösen, behutsam das Fernrohr mittelst der Umlegevorrichtung aus den Lagern hebt und umlegt. Es ist natürlich, dass diese Umlegung mit äusserster Vorsicht zu geschehen hat, dass das Instrument besonders auf leichte und sichere Umlegung gebaut sein muss, dass die Unveränderlichkeit der Einstellung gewährleistet oder controlirt werden kann, denn die geringste Veränderung würde ja diese Art der Polhöhenbestimmung zu einer fehlerhaften illusorischen machen. In dieser Forderung liegt aber wiederum in gewissem Sinn eine Unmöglichkeit. Ebenso dürften sich aber wohl kaum zwei Sterne finden, die der Grundbedingung nahe gleicher Rectascension und der nothwendigen Deklination genau entsprechen. Und würde letzteres wirklich einmal der Fall sein, so würde die verschiedene Präcession bald genug eine Veränderung hervorbringen. Man muss daher von der engbegrenzten Forderung abgehen und es wird sich trotzdem nach dem Princip der gleichen Meridianzenithdistanz nach Nord und Süd eine Methode finden lassen, die sich namentlich in neuester Zeit zu grösster Vollkommenheit herausgebildet hat, und nur von dem Nachtheil nicht frei wird, dass die etwaigen Fehler im Sternort voll ins Resultat übergehen.

Ist nämlich das Ocular an Stelle des einen festen Fadens mit einem einfachen Fadenmikrometer versehen, und ist an der Axe parallel der Ebene des Meridians ein sehr empfindliches Niveau angebracht, auf dessen unveränderliche Verbindung mit der Axe man sich für die kurze Zeit des Durchgangs der beiden Sterne verlassen kann, so braucht man dann die beiden Sterne nur so auszuwählen, dass bei ungefähr gleicher Rectascension ihre Zenithdistanzen nach Süd und Nord nur so nahe gleich sind, dass der Unterschied genau mit dem beweglichen Faden

des Mikrometers gemessen werden kann. Bereits pag. 176 (Bd. I) und pag. 306 (Bd. III) ist diese Methode, da sie sich gleichzeitig für die Bestimmung der Aberrations- und Nutationsconstante eignet, zum Theil ausführlich behandelt. Wir können uns daher hier darauf beschränken, das auf die praktische Anwendung Nothwendige anzuführen.

Vorzugsweise dient zur Anstellung der Beobachtungen ein sogenanntes Zenithteleskop, welches zuerst von TALCOTT zur Messung kleiner Unterschiede in der Zenithdistanz angegeben wurde, dann in mannigfacher Weise verbessert von der amerikanischen Coast Survey und dem Kön. Preuss. Geodätischen Institut zur Anwendung kam. Es besteht aus einem excentrisch an der auf eisernem Dreifuss ruhenden Horizontalaxe angebrachten Fernrohr von mässigen Dimensionen (im Geodät. Institut 68 *mm* Oeffn. bei 870 *mm* Brennweite), mit gebrochener Ocularröhre. Die Horizontalaxe hat eine Länge von 20 *cm*, die Verticalaxe 34 *cm*, es kann also wie ein Universalinstrument horizontal und vertical beliebig bewegt werden. Das Instrument ist mit verticalem und horizontalem Einstellungskreis von 24 *cm* bezw. 28 *cm* Durchmesser versehen. Letzterer, auf 0'·1 durch zwei gegenüberstehende Nonien ablesbar, gestattet genügend genaue Meridianeinstellung, die übrigens durch justirbare Anschläge leicht zu fixiren ist, sodass beim Umlegen bezw. Drehen um 180° die wiederholte Ablesung der Nonien unterbleiben kann. Die Horizontalaxe ist mit einem Aufsatzniveau versehen, eine Lampe im gehörigen Abstand beleuchtet das Feld. Am Höhenkreis, der sich am Axenende des Fernrohrs befindet, ist ein sehr empfindliches Doppelniveau senkrecht zur Richtung der Horizontalaxe angebracht, welches mit äusserster Genauigkeit die Veränderung der Zenithdistanz des Fernrohrs abzulesen gestattet. Dasselbe ist durch mehrfache Umhüllung gegen den Einfluss strahlender Wärme seitens des Beobachters und der Beleuchtung nach Möglichkeit geschützt. Trotz dieser Vorsichtsmaassregel empfiehlt es sich, die zum Ablesen der Libellen und zum Einstellen am Höhenkreis nöthige Beleuchtung vom Instrument ganz fern zu halten, was sich



(A. 398.)

erreichen lässt, wenn in beträchtlichem Abstand eine Lampe angebracht wird, die ihr Licht durch Linse und Spiegel auf die zu beleuchtenden Stellen wirft und etwa durch Klappenvorrichtungen beliebig verdeckt werden kann, sodass sie nicht störend für das Auge des Beobachters wird.

Anstatt eines solchen Zenithteleskopes kann man natürlich auch jedes leicht und sicher umlegbare Passageninstrument benutzen, sobald dasselbe mit einem sogen. Querniveau senkrecht zur Horizontalaxe und einem Ocularmikrometer versehen ist, und genau im Meridian steht.

Man hat nun vor dem Beginn der Beobachtungsreihe geeignete Sternpaare auszusuchen, von denen der eine südlich vom Zenith, der andere in möglichst gleichem Abstand nördlich vom Zenith culminirt. Die Zwischenzeiten zwischen den Sternen eines solchen Paares sollten in der Regel nicht unter 3 Minuten, nicht über 10—12 Minuten betragen, damit einestheils vollkommen genügende Zeit zu der etwa dreimaligen Pointirung des beweglichen Fadens, der Niveauablesung und Umlegung bleibt, und andererseits durch zu lange Zwischenzeit nicht uncontrolirbare Veränderungen im Instrument und der Refraction zu befürchten sind. Der Unterschied der Zenithdistanzen sollte den Halbmesser des Gesichtsfeldes (äussersten Falles 10--15 Bogenminuten), nicht überschreiten, da sonst die Einstellungen zu sehr an den Rand des Gesichtsfeldes kommen und die Abhängigkeit von der Schraube des Mikrometers von zu grossem Einfluss wird. Ueberhaupt ist darauf Bedacht zu nehmen, dass wenn bei einem Paar der Unterschied der Zenithdistanzen positiv ist, ein zweites Paar ausgewählt wird, bei dem der Unterschied möglichst ebenso sehr negativ ist.

Eine vollständige Beobachtungsreihe wird man auf 8—10 Paare festsetzen, und es ist dann darnach zu trachten, dass die Summe aller Unterschiede der zu einem Paar gehörigen Zenithdistanzen Null wird. Damit ist dann die Elimination des angenommenen Winkelwerthes einer Schraubenrevolution gewährleistet. Bei der Auswahl der Sterne ist noch darauf zu achten, dass die zu einem Sternpaar gehörigen Glieder von möglichst gleicher Helligkeit sind, dass keines einen die Einstellung störenden Begleiter hat, weil sonst systematische Fehler zu befürchten sind. Die Zenithabstände der Sterne überhaupt sollten nicht über 25° betragen, um die Wirkung der Strahlenbrechung in möglichst engen Grenzen zu halten.

Hat man nun solche Sternpaare ausgesucht und zu einem Beobachtungsprogramm vereinigt, so wird dann zunächst der Index des verticalen Einstellungskreises genau auf das Mittel der Zenithdistanzen der beiden das Paar bildenden Sterne gestellt und festgeklemmt. Dann wird das Fernrohr vorerst mit freier Hand, darnach unter Benutzuug der Feinbewegung so weit geneigt, dass das Querniveau (auch Horrebow-Niveau genannt), zum Einspielen kommt. Nachdem nun der erste Stern ins Gesichtsfeld getreten, wird der genaue Stand der Libellen abgelesen. Da selbst bei den besten Libellen Unregelmässigkeiten vorkommen können, so hat man jetzt stets zwei einander parallele Libellen in gleichem Gestell befestigt, und um die Ablesungen vor Irrthümern und Verwechselungen zu schützen, dieselben in entgegengesetzter oder doch gänzlich verschiedener Weise bezeichnet. Nach dieser Ablesung erfolgen mehrere Einstellungen des Mikrometerfadens auf den Stern mit den zugehörigen Ablesungen der Schraubentrommel. Es wird also nicht der Moment des Meridiandurchgangs abgewartet und dabei nur die eine mögliche Pointirung gemacht, sondern man sucht die Beobachtung durch einige Einstellungen vor und nach dem Meridian zu stärken. Diese Einzel-

einstellungen müssen nun natürlich für die Krümmung des Parallels in der nachher angegebenen Weise corrigirt werden, und hierzu ist die Zeitangabe der Einstellung nöthig. Um eine volle Symmetrie der Einstellungen zu erzielen, wodurch die Reduction sehr vereinfacht wird, sodann aber auch um die Sicherheit der Einstellung selbst nicht durch die Aufmerksamkeit auf die Zeit der Beobachtung zu beeinträchtigen, empfiehlt es sich, symmetrisch zum Mittelfaden (Meridian), in Abständen von 10—15 Secunden einige Fäden einzuziehen und die Einstellung genau in dem Augenblick vorzunehmen, wenn der Stern diesen Faden passirt. Man wird dann nur in den Fällen, wo die eine oder andere Einstellung missglückt und damit die Symmetrie unterbrochen ist, die Reduction in anderer Weise vorzunehmen haben. Nach diesen Einstellungen des Sterns erfolgt dann eine neue Ablesung der Libelle.

Hierauf wird nun, je nachdem ein Zenithteleskop oder ein Passageninstrument benutzt wird, die Drehung um 180° oder die Umlegung in den Lagern vorgenommen. Es wird nun freilich nicht selten der Fall eintreten, dass die Libellen nicht ganz befriedigend einspielen, dann muss man mit Hilfe der Mikrometerschraube des Fernrohrs letzteres so lange drehen, bis die Libellen genügend einspielen, keinesfalls darf aber an der die Libelle allein gegen die Fernrohraxe versetzenden Schraube gerührt werden. Es erfolgt nun die Niveauablesung, Mikrometereinstellung und letzte Niveauablesung in ganz gleicher Weise wie vorher.

Hat man zuerst mit einem Südstern begonnen, so wird das zweite Paar thunlichst so gewählt, dass man hier mit dem Nordstern beginnt, ebenso wird man bestrebt sein, an aufeinander folgenden Abenden den Beginn der Kreislage zu vertauschen, um alle Fehlerquellen, die aus verschiedener Bewegungsrichtung, Drehung der Mikrometerschraube, Refraction entstehen können, nach Möglichkeit zu eliminiren.

Die Libellen, auf deren Angabe soviel ankommt, müssen sehr gut und zuverlässig sein, ihr Scalentheil sollte den Werth einer Bogensecunde nicht übersteigen. Der Werth kann, wie an anderer Stelle angegeben, durch Niveauprüfer bestimmt werden, es kann aber auch der Werth gleich in Theilen der Mikrometerschraubenumdrehung gesucht werden. Man erreicht dies in der Weise, dass man auf das Fadenkreuz eines Collimatorfernrohrs oder auf ein gut sichtbares, sehr entferntes terrestrisches Object mit dem beweglichen Faden einstellt, und diese Einstellung bei veränderter Lage des Fernrohrs bezw. des Niveaus mehrfach wiederholt. Hat man den Niveauwerth in Theilen der Schraubenumdrehung, so kann man die Trommelablesungen bei den Sterneinstellungen gleich um die Niveauablesung verbessern, ohne beide erst in Bogensecunden umzuwandeln. Die Correction wird dann in folgender Weise angebracht.

Nennen wir die dem Nord- bezw. Südende der Blase entsprechenden Ablesungen n und s für den Südstern, dagegen n', s' für den Nordstern, so sind die Neigungen in Theilen des Niveaus

$$L = \frac{n - s}{2} \qquad L' = \frac{n' - s'}{2}$$

nnd die an das Mittel der gemessenen Zenithdistanzen des Süd- und Nordsterns anzubringende Correction wird sein:

$$\tfrac{1}{2}(L' + L) = \tfrac{1}{4}[(n + n') - (s + s')].$$

Dieser Werth ist dann mit dem Faktor zu multipliciren, welcher das Verhältniss der Niveautheile zu dem Werth der Schraube angiebt. Das Zeichen ergiebt sich ohne Weiteres aus obigem Ausdruck, sodass, wenn die Nordablesungen grösser als die Südablesungen sind, d. h. wenn die Blase nach Nord ausschlägt, die anzubringende Correction positiv wird. Das gilt für ein von der Mitte aus getheiltes Niveau. Ist das Niveau dagegen, wie jetzt in der Regel, durchlaufend getheilt, so hat man die der Mitte der Niveautheilung entsprechende Ablesung natürlich nur von dem Mittel der den Blasenenden entsprechenden Ablesungen abzuziehen, und dabei hinsichtlich des Zeichens zu beachten, dass ein südlicher Ausschlag zu grosse Zenithdistanzen durch die Trommelablesungen giebt, dass die Neigungscorrection dann negativ ist, sonst positiv.

Die verschiedenen Fadeneinstellungen müssen, wie schon erwähnt, wegen der Krümmung des Parallels verbessert, auf den Moment des Meridiandurchgangs reducirt sein. Es können hier zwei Fälle unterschieden werden, indem man, bei Benutzung von Zenithteleskopen oder Universalinstrumenten, in der Lage ist, das Instrument im Azimuth nachzudrehen, und den Stern immer in der Mitte des Gesichtsfeldes einzustellen, oder indem man bei fest im Meridian aufgestelltem Fernrohr die Einstellungen an verschiedenen Punkten beim Durchgang des Sterns durchs Gesichtsfeld vornimmt.

Bei ersterem Fall, der in der Praxis seltener vorkommt, hat man, wie pag. 446 bei der Messung von Circummeridianzenithdistanzen angegeben wurde, einfach

$$z_0 = z - \frac{2\, sin^2 \frac{1}{2} t}{sin\, 1''} \frac{cos\, \varphi\, cos\, \delta}{sin\, z_0}$$

zu bilden, wobei man für das zweite Glied rechts in Bogensecunden setzen kann;

$$\tfrac{1}{2} (15\, t)^2\, sin\, 1'' \frac{cos\, \varphi\, cos\, \delta}{sin\, z_0} = [6{\cdot}43570]\, t^2\, cos\, \varphi\, cos\, \delta\, cosec\, z_0,$$

wo die Zahl in eckiger Klammer den Logarithmus bedeutet und ungefähr $= 0{\cdot}0003$ ist. Die Grösse wird immer subtractiv an die beobachtete Zenithdistanz angebracht, oder positiv bezw. negativ als Verbesserung der Polhöhe aus südlichem oder nördlichem Stern.

Für den anderen gebräuchlicheren Fall ist die Correction einfach

$$\tfrac{1}{4} (15\, t)^2\, sin\, 1''\, sin\, 2\, \delta,$$

welche zu der beobachteten Zenithdistanz eines Südsterns zu addiren, von der eines Nordsterns zu subtrahiren ist (vergl. pag. 23 d. Bds.). Hat man nun, wie oben empfohlen, sich daran gewöhnt, die Einstellungen stets an bestimmten festen Fäden vor und nach dem Mittelfaden zu machen, und beträgt die Fadendistanz derselben im Aequator f^s, also für einen Stern von der Deklination δ, $f^s\, sec\, \delta$, so geht obige Verbesserung über in den Ausdruck

$$\frac{225}{2}\, sin\, 1'' f^{s2}\, tang\, \delta$$

und will man diese Correction endlich ausdrücken in Theilen der Schraubenrevolution, so ist sie mit $\frac{1}{R}$ zu multipliciren, wo R die Zahl der Bogensecunden beträgt, welche einer Schraubenumdrehung entspricht. Die folgende Tabelle giebt eine

Uebersicht über die Grösse dieser Correction für einige Werthe der Fadendistanzen und der Deklinationen der Sterne, ausgedrückt in Bogensecunden. Man wird sich darnach für den einzelnen Fall mit wenigen Zahlen eine Tafel anlegen, die die Anbringung dieser Verbesserung auf eine kaum nennenswerthe Arbeit zurückführt, wobei dann noch zu erwähnen, dass die hier in Secunden (der Uebersicht wegen) gegebenen Werthe, durch Division mit R in Schraubentheile umzusetzen sein würden.

F \ δ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
10′	0″·00	0″·01	0″·02	0″·03	0″·05	0″·06	0″·08	0″·09	0″·12	0″·15	0″·20	0″·31
20′	0·00	0·04	0·08	0·13	0·18	0·26	0·31	0·38	0·47	0·60	0·81	1·24
30′	0·00	0·09	0·18	0·28	0·41	0·58	0·70	0·85	1·05	1·35	1·83	2·78

Die Schraubenablesungen sind genau um die Fehler der Schraube zu corrigiren, die Schraube selbst daher aufs sorgfältigste zu untersuchen, und zwar am besten vor Beginn und nach Abschluss einer Beobachtungsreihe, und wenn diese sich über mehrere Jahre, überhaupt längere Zeit, ausdehnt, zu verschiedenen Malen. Auf die Art dieser Untersuchungen, der Bestimmung des Schraubenwerthes braucht hier nicht eingegangen zu werden, da auf den Artikel »Mikrometer« zu verweisen ist. Dagegen ist noch der Correction für Refraction und der Reduction auf den mittleren, bezw. von diesem auf den scheinbaren zu gedenken.

Da es sich nur um geringe Unterschiede in den Zenithdistanzen bei jedem Paar handelt, so wird die Refraction stets von geringer Bedeutung. Eine Berücksichtigung von Thermometer- und Barometerstand ist ganz unnöthig, und wir können für die beiden Sterne mit den Zenithdistanzen z und z' und den Einzelrefractionen r und r' die einfache Differentialformel

$$r - r' = (z - z')\,\frac{dr}{dz}$$

anwenden, wo dann $z - z'$ in Bogenminuten ausgedrückt ist und darnach $\frac{dr}{dz}$ die Aenderung der mittleren Refraction bezeichnet, die der Aenderung der Zenithdistanz um 1′ entspricht. Nach Bessel haben wir (s. Strahlenbrechung) die Strahlenbrechung

$$r = \alpha\, tang\, z,$$

wo α bei kleinen Aenderungen der Zenithdistanz als constant anzusehen ist. Hiernach ist

$$\frac{dr}{dz} = \alpha\, sin\, 1'\, sec^2 z,$$

folglich

$$r - r' = (z - z')\,\alpha\, sin\, 1'\, sec^2 z,$$

wonach diese Correction in Bogensecunden ausgedrückt erhalten wird. Die folgende kleine Uebersicht giebt den Betrag der Refraction mit dem doppelten

Argument der Zenithdistanz und dem Unterschied der Zenithdistanzen Stern Süd — Stern Nord

$z_s - z_n$ \ z	0°	10°	20°	30°
0′	0″·00	0″·00	0″·00	0″·00
5′	0·04	0·04	0·04	0·05
10′	0·08	0·09	0·10	0·11
15′	0·13	0·13	0·14	0·16
20′	0·17	0·18	0·20	0·23

Wie diese Zahlen zeigen, bleibt in der That der Einfluss äusserst gering. Dabei ist nun freilich vorausgesetzt, dass die Refractionen für den nördlichen Stern gleichgeartet denen für den südlichen Stern sind, was nur dann der Fall ist, wenn die atmosphärischen Verhältnisse im Norden und Süden ganz die gleichen sind. In dieser Hinsicht sind an verschiedenen Orten eigenthümliche Unregelmässigkeiten bemerkt worden, insbesondere sind Erfahrungen, welche vom Geodätischen Institut in Potsdam gemacht wurden, lehrreich. Hier wurde in einem Häuschen beobachtet, welches mit besonderer Vorsicht für den Temperaturausgleich construirt war, und aus einem niedrigen Mauerkranz bestand, über dem eine aus Doppelwellblech gefertigte Kuppel errichtet war, die sich in der Richtung senkrecht zum Meridian in der Mitte auseinanderschieben liess, sodass ein Spalt von etwa 1 *m* Breite entstand. Im Innern dieses Raumes war im Norden und Süden je ein isolirter Beobachtungspfeiler aufgeführt, und der südliche derselben diente zur Aufstellung des Instruments für eine ausgedehnte Beobachtungsreihe. Es ergab sich nun nach Abschluss derselben für die Polhöhe ein Werth, der mit anderen Resultaten nicht in Einklang zu bringen war. Eingehende Untersuchungen führten zu dem Ergebniss, dass die Ursache mit einer Temperaturdifferenz zwischen dem Innern des Beobachtungsraumes und der äusseren Luft zusammenhing, und dass »die excentrische Aufstellung des Instrumentes in einem Raum mit stark geneigter Dachfläche anormale Refractionswirkungen hervorruft.« Helmert hat durch theoretische Betrachtungen nachgewiesen, dass schon eine Temperaturdifferenz von 1° einen Polhöhenunterschied von 0″·3 für die beiden Pfeiler hervorriefe, wenn man als Begrenzungsfläche des erwärmten Raumes die Gestalt der äusseren Bedachung des Häuschens oder eine entsprechende Form der Niveauschichten voraussetze und zenithnahe Sterne beobachtete. Diese Erfahrung lehrt zur Genüge, mit welcher ausserordentlichen Vorsicht man verfahren muss, wenn man einwandfreie Resultate erzielen will.

Als Beispiel mögen hier einige Beobachtungen in voller Ausdehnung wiedergegeben werden, die in Potsdam im Jahre 1892 angestellt wurden. Es diente dafür ein gebrochenes Passageninstrument von Bamberg, mit welchem ein Horrebow-Niveau verbunden war.

Das Beobachtungsprogramm umfasste 9 Sterngruppen von je 6 Sternpaaren, die sich auf das ganze Jahr der Art vertheilten, dass jeweils 2—3 Gruppen in derselben Nacht beobachtet werden konnten, und so ein vollständiger Anschluss erreicht wurde. Hier wird nur Gruppe 5 mitgetheilt, welche mit Gruppe 6 am 8. Mai zur Beobachtung kam.

Gruppe V

Paar	Grösse	Rectasc. 1892·0	Declination 1892·0	Zenithdistanz N	S	$Z_N - Z_S$
1	4·6	13^h 12^m 42^s	41° 8′ 28″·47		11° 14′·4	+11′·6
	6·5	22 18	63 48 56·89	11° 26′·0		
2	5·0	30 2	49 34 5·83		2 48·8	+ 2·0
	5·4	36 39	55 13 41·89	2 50·8		
3	6·5	43 32	42 35 14·95		9 47·7	— 9·9
	6·7	54 10	62 0 44·61	9 37·8		
4	6·8	14 17 48	68 16 35·61	15 53·7		+ 11·6
	6·5	23 48	36 40 48·52		15 42·1	
5	6·2	28 47	60 42 5·83	8 19.2		+ 2·8
	5·5	34 10	44 6 29·52		8 16·4	
6	6·2	44 52	38 15 23·40		14 7·5	— 8·6
	5·0	55 52	66 21 45·64	13 58·9		

Das Mittel der Unterschiede der Zenithdistanzen ergiebt sich hiernach zu + 1′·6, ein Unterschied, der in Folge der Präcessionen in 2—3 Jahren verschwinden würde. Handelt es sich also um mehrjährige Beobachtungsreihen, so ist es in der Regel nicht erreichbar, dass bei Benutzung derselben Sternpaare dieser Unterschied so klein erhalten wird, wie es theoretisch wünschenswerth wäre. Die angewandten REICHEL'schen Libellen trugen No. I die Bezifferung 0 bis 40, No. II 50 bis 90, für erstere war der Werth eines Scalentheils 0·01843 Theile der Schraubenrevolution, für letztere 0·01982, und da eine Schraubenrevolution 57″·344 entsprach, so ist der Scalentheil für Lib. I 1″·056, für Lib. II 1″·137.

1892 Mai 8.

Paar	Kreislage	Libelle I vorher		Libelle II vorher		Einstellungen I	II	III	IV	Libelle I nachher		Libelle II nachher	
1	O	9^p·8	30^p·2	61^p·7	84^p·0	14^r·595	578	590	595	9^p·8	30^p·2	61^p·6	83^p·9
	W	9·3	29·8	61·8	84·2	2·367	377	382	358	9·3	30·0	62·0	84·3
2	W	8 6	29 1	61·9	84·3	7·933	932	934	912	—	—	—	—
	O	10·0	30·7	62·9	85·3	10·061	047	061	060	9·8	30·4	62·7	85·2
3	O	10·2	31·0	62·7	85·1	6·331	324	330	331	10·2	31·0	62·7	85·2
	W	10·3	31·0	63·0	85·7	16·627	633	631	621	10·2	31·0	63·0	85·7
4	W	7·5	28·3	64·6	87·0	3·733	757	763	745	6·5	27·3	63·7	86·3
	O	9·7	30·6	65·6	88·3	15·815	808	820	823	9·8	30·6	65·7	88·3
5	O	8·0	28·8	64·4	87·0	11·412	412	407	418	8·0	28·9	64·4	87·0
	W	6·4	27·3	63·3	85·9	8·617	618	627	616	6·2	27·1	63·2	86·6
6	W	9·9	30·8	68·0	(90·7)	14·455	465	450	453	9·8	30·8	68·0	(90·8)
	O	9·8	30·7	67·5	90·2	5·193	188	184	190	9·7	30·4	67·3	90·1

Meteorologische Ablesungen:

13^h·0	Th. I. +10°·0	Th. A. + 9°·9	Bar. 758^mm·7	+11°·6
14·0	+10·0	+10·0	758·9	+11·2
15·0	+ 9·7	+ 9·7	759·0	+11·2

Die Berechnung ist zwar ohne Weiteres aus folgendem Schema ersichtlich, doch mag noch bemerkt werden, dass die Col. »Mikrometerablesung« die Mittelzahl der 4 Einstellungen giebt und dass von den 3 Correctionsgrössen die erste (Neigung) erhalten wird, indem man bei Lib. I die Summe der Libellenablesungen, vorher und nachher, von 4·20, bei Lib. II von 4·70 abzieht und den Rest mit

dem Scalenwerth multiplicirt. Die zweite Correction rührt von der Krümmung des Parallels her, die dritte von den periodischen Fehlern der Schraube. Durchweg sind beide Libellen getrennt behandelt, sodass die erste Zeile jeweils die aus Lib. I, die zweite die aus Lib. II resultirenden Werthe giebt.

Paar	Kreislage	Mikrometerablesung	Korrection (Einh. 4 Decim.)			Verb. Abl.	Differenz	Mittel der scheinbaren Declinat.	Halbe Differenz der Ablesung	Korr. für Refr.	Polhöhe
			Neigung	Kr.	Schr.						
1	*O*	14ʳ·590	0	—24	+4	14ʳ·588					
			— 554			533	— 12ʳ·203	52° 28′ 43″·89	—5′ 49″·88	—0″·10	52° 22′ 53″·91
	W	2·371	+ 74	+57	+ 9	2·359	216		—5 50·26		53·53
			— 609			317					
2	*W*	7·928	+ 212	+33	— 8	7·952					
			— 614			869	— 2·096	23 53·86	—1 0·10	— 0·02	53·74
	O	10·057	— 41	—40	- 5	10·048	— 2·104		—1 0·33		53 51
			— 797			9·973					
3	*O*	6·329	— 110	—26	+ 8	6·316					
			— 177			249	+ 10·306	17 58·44	+4 55·49	+ 0·09	54·02
	W	16·628	— 115	+52	+ 1	16·622	298		55·26		53·79
			— 861			547					
4	*W*	3·750	+ 570	+70	—5	3·814					
			— 990			657	— 11·997	28 38·12	—5 43·98	— 0·10	54·04
	O	15·817	— 32	—21	—7	15·811	— 12·019		44·61		53·41
			—1381			676					
5	*O*	11·412	+ 290	—50	+10	11·437					
			—1129			295	— 2 754	24 12·85	—1 18·96	— 0·02	53·87
	W	8·620	+ 598	+27	+2	8·683	763		19·22		53·61
			— 911			532					
6	*W*	14·456	— 60	+22	+9	14·453					
			—			—	+ 9·273	18 28 09	+4 25·88	+ 0·08	54·05
	O	5·189	— 28	—64	+1	5·180					—

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass für diese Methode auch die Photographie auf KÜSTNER's Vorschlag versuchsweise zur Anwendung kam. Nach den Angaben FÖRSTER's und MARCUSE's wurde für die Berliner Sternwarte ein photographisches Zeniththeleskop in folgender Weise construirt. Das photographische Fernrohr hat 135 *mm* Oeffnung und 1350 *mm* Brennweite, ist excentrisch an einer 32 *cm* langen und 6·5 *cm* starken Horizontalaxe angebracht. Die Verticalaxe ist ebenfalls besonders stark und hat unten 9 *cm*, oben 3·5 *cm* Durchmesser. Am Azimuth- und Höhenkreis können die Ablesungen auf 5″ genau geschehen, der erstere gestattet die Lage des Meridians durch zwei am Kreise justirbare Anschläge mit vollkommener Genauigkeit festzuhalten, und der Verticalkreis ermöglicht die Höheneinstellung eines Sternpaares so genau, dass nur der centralste Theil der Bildebene bei der photographischen Abbildung benutzt wird. Libellen sind in ähnlicher Weise angebracht wie am gewöhnlichen Zeniththeleskop. Die Grösse des Objectivs ist bedingt durch die nothwendige Photographirung von Sternen bis wenigstens zur 7. Grössenklasse. Am Ende des geraden Fernrohrs befindet sich die kleine photographische Metallcassette, welche bequem und vollkommen sicher angesetzt und zur Belichtung der Platte geöffnet werden kann. Zur Justirung des Fernrohrs im Meridian und zur Bestimmung des Zenithpunktes wird ein gebrochenes Hilfsocular benutzt, das in eine der Cassetten eingesetzt werden kann. Im Fernrohr selbst befindet sich in der

Ebene des chemischen Focus und in der optischen Axe des Fernrohrs gelegen ein feiner verticaler Stahlfaden, dessen rahmenartiger Träger mittelst einer Axe mit Knopf von aussen zurückgeklappt werden kann. Derselbe ist an einer starken Platte befestigt, die mit Hilfe einer besonderen Collimationsschraube senkrecht zur optischen Axe des Fernrohrs verschoben werden kann. Der verticale Meridianfaden ruht nach Einsetzen der Platte und nach Oeffnen des Deckels dicht über der empfindlichen Schicht. Durch ihn wird der Moment des Meridiandurchganges der Sterne in einfacher und sicherer Weise bezeichnet, indem sich eine kleine Unterbrechung der photographischen Sternspuren genau im Meridian erkennbar macht. Was die Aufnahme selbst betrifft, so hat sich herausgestellt, dass die Platten höchstens nur etwa 15 Zeitsecunden vor und nach dem Meridiandurchgang eines Sterns im Aequator, für Sterne höherer Deklination entsprechend länger belichtet zu werden brauchen, um deutliche Spuren zu hinterlassen. Zur Verwerthung sind dann nach der Entwickelung und Fixirung die Abstände der feinen Sternspuren mikroskopisch auszumessen, wozu ein besonderer Apparat dient.

Ueber den Erfolg dieser Versuche gehen die Ansichten der Astronomen wohl auseinander, doch neigt die grosse Mehrzahl noch dem Urtheile zu, dass eine Vervollkommnung der HORREBOW-Methode nicht durch die Einführung der Photographie geliefert wird. Es werden als besondere Nachtheile der Photographie in diesem Punkte angeführt, dass der Beobachter keine Controlle über die Beobachtungen selbst hat, und erst nachträglich, nach der Entwickelung, von dem Gelingen der Operation Kenntniss erhält, während bei der visuellen Methode etwaige Unregelmässigkeiten, die dem Gelingen hinderlich sein könnten, gleich bemerkt und oft rechtzeitig beseitigt werden können. Es wird hervorgehoben, dass die photographische Aufzeichnung äusseren Einflüssen, Trübungen des Himmels u. dergl. mehr ausgesetzt ist, und auch die Zahl der sich zur Beobachtung eignenden Sternpaare geringer ist. Ganz besonders dürfte aber ins Gewicht fallen, dass durch die Ausmessung und Verwerthung der Platten ein ausserordentlich vergrössertes Arbeitsquantum gefordert wird, was nur dann nicht ausschlaggebend sein dürfte, wenn, wie in anderen Zweigen der Astronomie, durch die Photographie eine stark vermehrte Ausnutzung der klaren Nächte erfolgt, was aber bei der Polhöhenbestimmung nicht der Fall ist.

Auf weitere Einzelheiten in dieser Frage einzugehen ist hier nicht der Ort, es handelt sich vielfach um die Elimination äusserst subtiler Fehlerquellen, deren Erkennung oft nur erfahrensten Astronomen gelingen wird. Im übrigen mag auf die Berichte über diese Frage, die grösstentheils in den Verhandlungen der Internationalen Erdmessung (von 1895 an) abgedruckt sind, verwiesen werden.

So hervorragend nun die Methode der zu messenden Unterschiede der Meridianzenithdistanzen auch hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit ist, so haftet doch auch ihr eine nicht unwesentliche Fehlerquelle an, es geht nämlich die Unsicherheit der benutzten Sternörter ganz in das Resultat über. Es kommt da keineswegs allein die Unsicherheit der momentanen Deklination in Betracht, sondern vielmehr unsere mangelhafte Kenntniss hinsichtlich der Eigenbewegungen, welche letztere natürlich um so schädlicher wird, je weiter sich die Polhöhenbeobachtungen in der Zeit von der Epoche der Deklinationsbestimmungen entfernen. Störend wirkt ausserdem für langjährige Beobachtungsreihen, wie sie sich namentlich in neuerer Zeit als dringend nothwendig erwiesen haben, dass in Folge der Präcession die für eine frühere Epoche günstigen Sternpaare zu anderer Zeit

unbrauchbar werden, sodass dann zur Auswahl neuer Sternpaare geschritten werden muss, wodurch dann wieder ein neues Element der Unsicherheit durch die Oerter hereingezogen wird.

Diese Abhängigkeit vom Sternort hat vielfach Untersuchungen veranlasst, um eine Methode ausfindig zu machen, die den Sternort ganz eliminirt. In dieser Richtung sind insbesondere FÖRSTER, KAPTEYN, CONTARINO thätig gewesen, und es ist ihnen auch gelungen, anscheinend elegante Verfahrungsweisen aufzustellen, durch die der gedachte Zweck erreicht wird. Doch hat die Anwendung derselben noch Schwierigkeiten bereitet, sodass aus der Praxis über die Brauchbarkeit noch kein abschliessendes Urtheil zu geben ist. Immerhin dürfen bei der Wichtigkeit dieser Aufgabe die Methoden nicht unerwähnt bleiben, und da sie ausserdem in weniger leicht allgemein zugänglichen Schriften veröffentlicht wurden, mögen sie an dieser Stelle etwas eingehende Behandlung finden.

Die FÖRSTER'sche Methode (Berl. Astr. Jahrb. 1880. 82), combinirt die Beobachtungen dreier Sterne, eines Polsterns, eines Zenithsterns und eines Südsterns, dessen südliche Zenithdistanz sehr nahe gleich der nördlichen des Polsterns ist. Es werden die oberen und unteren Meridiandurchgänge der ersten beiden, die Ost- und Westdurchgänge durch den ersten Vertical der letzten beiden beobachtet und endlich die Meridianzenithdistanzen des Pol- und Südsterns bei der oberen Culmination des ersteren mit einem Fadenmikrometer und Horrebow Niveau gemessen. Das Instrument muss also diese letzte Einrichtung haben, ausserdem ein Passageninstrument sein, welches leicht und sicher in beliebige Verticalebenen übergeführt werden kann. Ein Universalinstrument, wie es sonst zu den geographischen Ortsbestimmungen zur Verwendung kommt, würde sich dazu nicht empfehlen, weil die Verbindung der oberen und unteren Culminationen desselben Sterns eine lange Beobachtungsdauer und daher Constanz des Instruments während dieser Zeit verlangt, und weil ausserdem das Fernrohr nicht von zu kleiner Dimension sein darf, da die Forderungen über die Auswahl der Sterne die Benutzung auch schwächerer Sterne nöthig machen werden. FÖRSTER hat daher das mit dem Namen Universaltransitinstrument belegte Instrument construirt, dessen Beschreibung an besonderer Stelle gegeben wird.

Der Gang der FÖRSTER'schen Ableitungen ist folgender. Ganz allgemein wird für ein Passageninstrument zunächst in beliebiger Verticalebene bezeichnet durch

P der Punkt, in dem die Verlängerung der Erdaxe,

K der Punkt, in dem die Verlängerung eines bestimmten Endes der Drehungsaxe des Passageninstruments,

S der Punkt — das Gestirn — in dem die Verlängerung des Objectivendes der optischen Axe des Instruments die Himmelskugel trifft.

Da nun jeder Stern in seinem täglichen Laufe im Allgemeinen in zwei verschiedenen Durchgängen, sei es in oberer und unterer Culmination, sei es im Ost- und Westvertical oder in zwei verschiedenen Lagen der Drehungsaxe eingestellt werden kann, so mögen diese beiden Lagen von K mit K' und K'' bezeichnet sein. Aus dem halben Rectascensionsunterschied von K' und K'', d. h. dem halben Sternzeitunterschied von zwei aufeinander folgenden Einstellungen lässt sich jeder der beiden gleichen Winkel $K'PS$ und $K''PS$, die mit $90° + k$ bezeichnet werden, ermitteln. Es sei dann der Neigungswinkel der Drehungsaxe gegen die Erdaxe $= 90° - n$, der der optischen Axe gegen die Drehungsaxe

$= 90° + c$, die Poldistanz des Sternes $= p$, so liefert das Dreieck PKS die bekannte Gleichung:

$$-\sin c = \cos p \sin n - \sin p \cos n \sin Q. \tag{1}$$

Bei der Aufstellung des Instrumentes im Meridian dient diese Gleichung, indem man denselben Stern in oberer und unterer Culmination beobachtet, und daraus Q ermittelt, bei sonst bekanntem p und c zur Bestimmung von $90° - n$, wo man dann bei genügend kleinen Werthen von c und n einfach setzt:

$$n \cos p + c = Q \sin p.$$

Ist das Instrument dagegen im ersten Vertical aufgestellt, so kann die Gleichung in der Form

$$\sin(p - n) = 2 \sin p \cos n \sin^2 \tfrac{1}{2} M + \sin c, \tag{2}$$

wo M für $90° - Q$ gesetzt ist, sowohl zur Bestimmung von n aus Q, p, c, dann mit Hilfe der Neigung i der Drehungsaxe gegen den Horizont zur Ermittelung der Polhöhe φ, als auch umgekehrt zur Bestimmung der Poldistanz p aus Q, n, c dienen, wo dann n aus φ und i nach bekannter Weise hergeleitet wird.

Es kann nun aber theoretisch wenigstens dieselbe Gleichung auch beim Durchgangsinstrument im Meridian, ebenso wie im ersten Vertical dazu benutzt werden, um nicht nur aus bekannten Q, p, c die Grösse n, sondern auch aus Q, n, c das unbekannte p, d. h. einerseits die Polhöhe, andererseits Differenzen von Poldistanzen zu ermitteln. Dasselbe würde auch für die zwischenliegenden Neigungen der Drehungsaxe gegen die Erdaxe, nämlich von $n = 0$ bis $n = 90° - \varphi$ der Fall sein.

Bezeichnen wir die Sternzeiten der beiden correspondirenden Durchgangsepochen eines Sternes von bekannter Poldistanz p_1 mit T_1', T_1'', die der entsprechenden Durchgangsepochen eines Sternes von unbekannter Poldistanz p_2 mit T_2', T_2'' und setzen

$$\begin{aligned} t_1 &= \tfrac{1}{2}(T_1'' - T_1') \\ t_2 &= \tfrac{1}{2}(T_2'' - T_2'), \end{aligned} \tag{3}$$

so ergeben sich leicht folgende Gleichungen unter bekannter Einführung von Hilfsgrössen zur Ermittelung von p_2:

$$\begin{aligned} a \cos A &= \cos p_1 \\ a \sin A &= \sin p_1 \cos t_1 \\ a \sin(A - n) &= \sin c \\ b \sin B &= \sin n \\ b \cos B &= \cos n \cos t_2 \\ b \sin(p_2 - B) &= \sin c. \end{aligned} \tag{4}$$

Kann man c vernachlässigen, oder ist c durch Umlegung bei den beobachteten Durchgängen eliminirt, so wird dann $n = A$ und $p_2 = B$ und

$$\begin{aligned} \tan n &= \tan p_1 \cos t_1 \\ \tan p_2 &= \tan p \sec t_2 = \tan p_1 \frac{\cos t_1}{\cos t_2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass die Poldistanz p_2 aus der bekannten p_1 um so sicherer erhalten wird, je weniger die beiden Poldistanzen, insbesondere p_2 von n verschieden sind; ferner, dass man mit dem Universaltransit in mittleren Breiten die Poldistanzen bis zum Nordpol des Himmels einerseits und bis zu etwa 20° südlicher Zenithdistanz aus den bekannten Poldistanzen solcher Sterne, die den ersten Vertical nahe dem Zenith passiren, fast ohne Einwirkung systematischer Instrumentalfehler oder der Strahlenbrechung mit Sicherheit ermitteln

kann, indem man nur Durchgangsbeobachtungen in entsprechenden Azimuthen, im ersten Vertical oder nahe dem Meridian bei beiden Durchgangsepochen des Sternes anstellt. Wenn man nun diese Durchgangsbeobachtungen noch mit der Messung von Zenithdistanzunterschieden nach der HORREBOW-TALCOTT-Methode verbindet, so wird man auch die Polhöhen erhalten. Bezeichnen wir dazu die Poldistanz eines Sternes, der den ersten Vertical sehr nahe dem Zenith passirt, mit p_1, die eines dem Pol näheren Sternes mit p_2, die eines südlich vom Zenith culminirenden mit p_3. Dann ist ähnlich wie vorher

$$\begin{aligned} tang\, p_2 &= tang\, p_1 \frac{\cos t_{1,2}}{\cos t_2} \\ tang\, p_3 &= tang\, p_1 \frac{\cos t_{1,3}}{\cos t_3}, \end{aligned} \tag{6}$$

wo die $t_{1,2}$, t_2 und $t_{1,3}$, t_3 die aus den Durchgangsbeobachtungen und Zeitmessungen hervorgehenden Grössen sind, wie sie ähnlich oben gebildet wurden.

Denkt man sich den noch unbekannten wahren Werth von p_1 aus dem Näherungswerth p_1^0 und einer unbekannten Verbesserung dp_1 zusammengesetzt, und bezeichnet man mit u_2 und u_3 bekannte von p_1^0, $t_{1,2}$, t_2 bezw. p_1^0, $t_{1,3}$, t_3 abhängige Grössen, so ist

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1^0 + u_2 + dp_1 \frac{\sin 2p_2}{\sin 2p_1} \\ p_3 &= p_1^0 + u_3 + dp_1 \frac{\sin 2p_3}{\sin 2p_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Wenn man nämlich die Gleichung 1 total differenzirt, so erhält man

$$\begin{aligned} -\cos c\, dc &= dn(\cos p \cos n + \sin p \sin n \sin Q) \\ &\quad - dp(\sin p \sin n + \cos p \cos n \sin Q) - dQ \sin p \cos n \cos Q \\ &= dn\left(\frac{\cos p + \sin n \sin c}{\cos n}\right) - dp\left(\frac{\sin n + \cos p \sin c}{\sin p}\right) - dQ \sin p \cos n \cos Q. \end{aligned}$$

Nimmt man hier $c = 0$, so wird

$$0 = dn \frac{\cos p}{\cos n} - dp \frac{\sin n}{\sin p} - dQ \sin p \cos n \cos Q,$$

woraus

$$\begin{aligned} dn &= dQ\, tang\, p \cos^2 n \cos Q + dp \frac{\sin 2n}{\sin 2p} \\ dp &= -dQ \sin^2 p\, cotang\, n \cos Q + dn \frac{\sin 2p}{\sin 2n}. \end{aligned} \tag{8}$$

Nimmt man dann zunächst an, dass die in dQ vereinten Beobachtungsfehler eliminirt oder so eingeschränkt werden, dass sie vernachlässigt werden dürfen, dass p_1 die bekannte Poldistanz eines Sternes, p_2 die unbekannte eines anderen ist, so hat man

$$\begin{aligned} dn &= dp_1 \frac{\sin 2n}{\sin 2p_1} \\ dp_2 &= dn \frac{\sin 2p_2}{\sin 2n} = dp_1 \frac{\sin 2p_2}{\sin 2p_1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ebenso ist, wenn die Poldistanz des Zeniths, $90° - \varphi$, mit ψ bezeichnet wird

$$tang\, p_1 = tang\, \psi \sec t_1,$$

und führt man für das unbekannte ψ auch zunächst einen Näherungswerth ψ_0 und die unbekannte kleine Verbesserung $d\psi$ ein, so wird auch

$$p_1^0 + dp_1 = \psi_0 + u_1 + d\psi \frac{\sin^2 p_1}{\sin 2\psi}, \tag{10}$$

wo wieder u_1 eine bekannte Function von ψ_0 und t_1 ist, und insbesondere die Neigung der Rotationsaxe gegen den Horizont enthält. Durch Verbindung dieser Gleichung mit den Gleichungen (7) wird, wenn man

$$p_1^0 = \psi_0 + u_1 \quad \text{und} \quad dp_1 = d\psi \frac{\sin 2p_1}{\sin 2\psi}$$

nimmt

$$p_2 = \psi_0 + u_1 + u_2 + d\psi \frac{\sin 2p_2}{\sin 2\psi}$$

$$p_3 = \psi_0 + u_1 + u_3 + d\psi \frac{\sin 2p_3}{\sin 2\psi}$$

und sind nun p_2 und p_3 so ausgewählt, dass ihr Mittelwerth bis auf wenige Secunden gleich ψ ist und der in

$$\psi_0 + d\psi = \tfrac{1}{2}(p_2 + p_3) + u_4$$

gegebene Unterschied mit dem Niveau ermittelt werden kann, so wird,

$$d\psi = u_1 + \tfrac{1}{2}(u_2 + u_3) + u_4 + \tfrac{1}{2} d\psi \frac{\sin 2p_2 + \sin 2p_3}{\sin 2\psi}$$

$$= \frac{\sin 2\psi}{\sin 2\psi - \tfrac{1}{2}(\sin 2p_2 + \sin 2p_3)} [u_1 + u_4 + \tfrac{1}{2}(u_2 + u_3)].$$

Nach den in den FÖRSTER'schen Abhandlungen durchgeführten speciellen Untersuchungen über die erreichbare Genauigkeit kann man den Werth der Methode, wenn sie in geeigneter Weise zur Anwendung kommt, kaum in Frage ziehen, nur wird man den schon erwähnten schwachen Punkt, die lange Zwischenzeit, während der man auf die Constanz des Instruments und Uhrgangs angewiesen ist, dadurch zu umgehen suchen müssen, dass man einestheils nur Uhren allerverlässlichster Art und andererseits ein in fester Aufstellung befindliches Instrument verwendet. Diese nicht leicht erfüllbaren Bedingungen werden die Ursache sein, dass die Methode praktisch noch nicht verwerthet wurde.

KAPTEYN[1]) fordert Beobachtungen zweierlei Art, welche beide mit einem Altazimuth ausgeführt werden können, aber ebenfalls ziemlich lichtstarke Fernrohre verlangen, da auch hier die Zuflucht zu schwächeren Sternen genommen werden muss. Die beiden Beobachtungsarten sind: 1) Unterschiede in Zenithdistanzen von Sternpaaren bei ihrer Culmination in nahezu gleicher Entfernung nördlich und südlich vom Zenith und zwar in einer Höhe, die nie beträchtlich kleiner sein soll als die Polhöhe des Beobachtungsortes; 2) Unterschiede im Azimuth von Sternen, deren Deklinationen wenigstens innerhalb weniger Grade einander gleich sind und die unmittelbar nach einander in gleicher Zenithdistanz und fast in gleicher Entfernung östlich und westlich vom Meridian beobachtet werden. Für andere in Betracht kommende Grössen wird nur genäherte Kenntniss vorausgesetzt. Bei dieser Methode tritt der Einfluss systematischer Fehler sehr zurück, und auch hinsichtlich der bei den Polhöhenbestimmungen so sehr zu flüchtenden Fehlerquelle, der Refraction, kommt man mit Voraussetzungen aus, welche auch sonst nicht zu umgehen sind, nämlich erstens, dass die Refractionen in gleicher Entfernung nördlich und südlich vom Zenith einander

---

[1]) »Ueber eine Methode, die Polhöhe möglichst frei von systematischen Fehlern zu bestimmen« von J. C. KAPTEYN, in der Zeitschrift »COPERNICUS, an international Journal of Astronomy ed. by R. COPELAND and J. L. E. DREYER«. Vol. III. DUBLIN 1884.

gleich sind, oder wenigstens bis zu einer Zenithdistanz, die gleich $90° - \varphi$ ist, nicht systematisch verschieden sind; und zweitens, dass eine systematisch wirkende seitliche Refraction nicht befürchten werden muss. Es wird hier, wie auch sonst bei genauen Messungen von Zenithdistanzen, immerhin geboten sein, dass man sich grosser Umsicht bei der Beobachtung selbst, oder auch hinsichtlich der Verwerthung und Benutzung des Beobachtungsraumes befleissigt, dann aber dürfte ein Fehler, der einige Hundertel der Bogensecunde erreicht, kaum zu erwarten sein, und man ist zu dem Schluss berechtigt, dass diese Unsicherheit nur einen kleinen Bruchtheil der Unsicherheiten ausmachen wird, die aus totalen Refractionen bei der Messung absoluter Zenithdistanzen entstehen können. Von anderen in Betracht kommenden systematischen Fehlerquellen wären besonders die Biegung von Rohr und Kreis, sowie die Theilfehler der Kreise zu berücksichtigen. Diese lassen sich aber durch Combination der Beobachtungen in verschiedenen Kreislagen, durch Kreisdrehungen, wodurch man auf andere Theilstriche kommt, fast vollständig eliminiren, oder was die Theilfehler betrifft, durch ihre Bestimmung unschädlich machen. Ebenso wird endlich ein Fehler durch den Uhrgang nicht zu befürchten sein, da die direct mit einander zu verbindenden Beobachtungen nur wenige Minuten dauern, während welcher man allemal bei den in solchen Fällen zur Anwendung kommenden Uhren die Constanz des Ganges anzunehmen berechtigt ist.

Die einfachste Form der Methode ist nun die folgende: Sei P ein Circumpolarstern, und S_1, S_2 zwei südliche Sterne, deren Deklinationen innerhalb weniger Secunden gleich sind. Es soll ferner der Stern S_1 bis auf wenige Minuten gleichzeitig mit der oberen Culmination von P culminiren, und S_2 ebenso mit der unteren Culmination von P. Man bestimmt dann folgende 4 Grössen:

1) Wenn der Stern S_1 mit S_2 bis auf einige Secunden gleiche Zenithdistanz, daher auch gleiches Azimuth hat, wobei S_1 als östlich, S_2 als westlich vom Meridian vorausgesetzt wird, die Differenz

$$\text{Azimuth } S_2 - \text{Azimuth } S_1 = h$$
$$\text{Beobachtungszeit } S_2 - \text{Beobachtungszeit } S_1 = \lambda.$$

2) Dieselben Grössen, wenn sich der Stern S_1 westlich und S_2 östlich vom Meridian befindet, also

$$\text{Azimuth } S_1 - \text{Azimuth } S_2 = h'$$
$$\text{Beobachtungszeit } S_1 - \text{Beobachtungszeit } S_2 = \lambda'.$$

3) Wenn P in oberer Culmination und, wie angenommen, nahe gleichzeitig mit S_1 den Meridian passirt, die Differenz

$$\text{Zenithdistanz } P_1 \text{ ob. Culm.} - \text{Zenithdistanz } S_1 = \beta,$$

ebenso

4) $\text{Zenithdistanz } P_1 \text{ unt. Culm.} - \text{Zenithdistanz } S_2 = \beta'.$

Dann ergiebt sich die Polhöhe nach der allgemeinen Gleichung

$$\sin t \cot\!ang\, A = \sin\varphi \cos t - \cos\varphi \tang\,\delta$$

hier

$$\sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda') - \cos\varphi \,\mathrm{cotang}\{2\varphi + \tfrac{1}{2}(\beta+\beta')\} + \cos\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\,\mathrm{cotang}\tfrac{1}{2}(h+h') = 0. \quad (1)$$

Die Polhöhe wird also in der That unabhängig von den Deklinationen und absoluten Azimuthen, und nur aus den Unterschieden der Zeiten λ, λ', denen der Azimuthe h, h' und denen der Zenithdistanzen β, β' bestimmt, wenn man bei der Wahl der Sterne daran festhält, dass die Deklinationen der südlichen Sterne S_1, S_2 möglichst nahe gleich $2\varphi - 90°$ und der Polstern dem Pol möglichst nahe steht.

In dieser Form ist nun aber die Methode in der Praxis nicht verwendba denn es werden sich nur ganz ausnahmsweise unter den allein hier in Frag kommenden helleren Sternen solche finden lassen, deren Oerter den obige Bedingungen genügen, d. h. also solche, deren Deklinationen bis auf einig Secunden gleich sind, die in der erforderlichen Zenithdistanz culminiren, dere Rectascensionen fast genau um 12 Stunden von einander verschieden sind Wollte man aber wenigstens von letzterer Bedingung abgehen, so müssten di mit λ bezeichneten Grössen sehr verschieden ausfallen, es würde beträchtliche Zeitverlust und Abhängigkeit vom Uhrgang die Folge sein. Man wird dahe die Grenzen der Deklinationen und der Azimuthe erweitern müssen, damit abe freilich wieder auf die vollständige Unabhängigkeit von der Deklination des Pol sternes und der absoluten Azimuthe verzichten müssen. Ferner wird aber dies Methode in der angegebenen Form nur für grosse Polhöhen verwendbar sein da bei klein bleibendem λ in Polhöhen unter 45—50° die Beobachtungen i viel zu kleinen Höhen angestellt werden müssten, was selbstverständlich zu ver meiden ist. Die Methode fordert daher, wenn anders sie praktischen Wertl haben soll, nach verschiedenen Richtungen eine Erweiterung. Nun können zu Beobachtung eine grössere Anzahl Sterne, deren Rectascensionen über all 24 Stunden des Himmels regelmässig vertheilt sind, herangezogen werden, so dass n Polsterne mit ihren $2n$ Culminationen nahe gleichzeitig mit $2n$ Süd sternen den Meridian passiren und dabei die Zenithdistanzen gemessen werden

Bezeichnen wir mit S_1, S_2, S_3 .... S_{2n} die $2n$ südlichen Sterne, die nach Rectascensionen geordnet sind und bis auf wenige Minuten nach Zwischen-räumen von $\frac{24^h}{2n}$ culminiren. Die Deklinationen sollen dabei nur um wenige Grade von einander verschieden sein und möglichst gleichmässig nördlich und südlich von $\delta = 2\varphi - 90°$ liegen. Ferner seien P_1, P_2 .... P_{2n} die n Circum-polarsterne nach ihren $2n$ Culminationen geordnet, und es sollen diese mit den Culminationen der Sterne S_1 .... S_n nahe zusammenfallen. Für einen Stern P_k finden also die beiden Culminationen P_{k+n} und P_{k-n} statt.

Nun werde im Augenblick des Durchganges eines jeden Sternpaares S_k und P_k der Unterschied in der Zenithdistanz beobachtet. Ferner bestimme man den Unterschied der Azimuthe und den entsprechenden der Beobachtungszeiten zwischen jedem Sternpaar S_k und S_{k+l}, wenn ihre Zenithdistanzen gleich sind und wo dann $l\frac{24^h}{2n}$ der Rectascensionsunterschied ist, indem l eine ganze positive Zahl kleiner als $2n$ ist. Sobald dann alle $2n$ Differenzen der Zenithdistanzen und die im Azimuth bestimmt sind, wobei jeder Stern einmal östlich und einmal westlich vom Meridian eingestellt wird, ist alles für die Polhöhenbestimmung erforderliche vorhanden.

Wir bezeichnen mit α_k, δ_k die Rectascension und Deklination des Sternes S_k mit Δ_k die Deklination des Circumpolarsterns P_k, und wenn wir die Deklination in unterer Culmination einfach über 90° hinüber zählen, so haben wir also auch hier für k alle bei den Südsternen angenommenen Werthe 1 bis $2n$, und es wird immer $\Delta_k + \Delta_{k\pm n} = 180°$ sein. Ferner sei

$A_{k,w}$	$A_{k,o}$	das absolute Azimuth
$T_{k,w}$	$T_{k,o}$	die Durchgangszeit
$t_{k,w}$	$t_{k,o}$	der Stundenwinkel
$z_{k,w}$	$z_{k,o}$	die Zenithdistanz
$\omega_{k,w}$	$\omega_{k,o}$	der parallactische Winkel

des Sterns bei der Beobachtung westlich, bezw. östlich vom Meridian, β der im Meridian beobachtete Unterschied der Zenithdistanzen von P_k und S_k, und λ, h die den obigen Differenzen entsprechenden Grössen, welche durch die Gleichungen

$$\lambda_{k,\,k+l} = T_{k,\,w} - T_{k+l,\,o} \tag{2}$$
$$h_{k,\,k+l} = A_{k,\,w} - A_{k+l,\,o} \tag{3}$$

gegeben sind. Darnach liefern die $6n$ beobachteten Grössen λ, h, β die $6n$ Gleichungen

$$\alpha_k + t_{k,\,w} - \alpha_{k+l} - t_{k+l,\,o} = \lambda_{k,\,k+l} \tag{4}$$
$$A_{k,\,w} - A_{k+l,\,o} = h_{k,\,k+l} \tag{5}$$
$$\delta_k + \Delta_k - 2\varphi = \beta_k \tag{6}$$

und ferner bestehen noch zwischen den Unbekannten $4n$ Gleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} -\sin\varphi\cos t_{k,w} + \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta_k + \sin t_{k,\,w}\,\mathrm{cotang}\,A_{k,w} = 0 \\ -\sin\varphi\cos t_{k,o} + \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta_k + \sin t_{k,\,o}\,\mathrm{cotang}\,A_{k,\,o} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Um nun hiernach die Unbekannten, deren es mehr als Gleichungen giebt, insbesondere φ zu bestimmen, muss man Näherungswerthe annehmen und noch einige weitere Bedingungen einführen, durch die die Zahl der Gleichungen vermehrt wird. Die Näherungswerthe von φ, δ_k, A_k, Δ_k u. s. w. werden durch $\varphi^0 + d\varphi$, $\delta_k^0 + d\delta$ u. s. w. bezeichnet und es wird angenommen, dass diese Näherungswerthe für die verschiedenen Grössen im Dreieck Pol, Zenith, Stern mit einander derartig vereinbar sind, dass z. B. der östliche bezw. westliche Stundenwinkel für sie nach der Formel

$$\sin\varphi^0\cos t^0_{k,o} + \cos\varphi^0\,\mathrm{tang}\,\delta_k + \sin t^0_{k,o}\,\mathrm{cotang}\,A^0_{k,o} = 0 \tag{8}$$

bestimmt werden kann. Dadurch werden, wenn man

$$\alpha_k^0 - \alpha_{k+l}^0 + t^0_{k,w} - t^0_{k+l,o} = \lambda^0_{k,\,k+l}$$

u. s. w. setzt, die Differenziale die wirklichen Unbekannten und man hat dann zu ihrer Bestimmung die Gleichungen

$$d\alpha_k - d\alpha_{k+l} + dt_{k,\,w} - dt_{k+l,\,o} = \lambda_{k,\,k+l} - \lambda^0_{k,\,k+l} \tag{9}$$
$$dA_w - dA_{k+l,\,o} = h_{k,\,k+l} - h^0_{k,\,k+l} \tag{10}$$
$$d\delta_k + d\Delta_k - 2\,d\varphi = \beta_k - \beta_k^0 \tag{11}$$
$$dt_{k.\,w} = \frac{\sin z^0_{k,w}}{\cos\omega^0_{k,w}\cos\delta_k^0}\,dA_{k,w} + \frac{\cos z^0_{k,w}\sin A^0_{k,w}}{\cos\omega^0_{k,w}\cos\delta_k^0}\,d\varphi - \frac{\mathrm{tang}\,\omega^0_{k,w}}{\cos\delta_k^0}\,d\delta_k \tag{12}$$
$$dt_{k,o} = \frac{\sin z^0_{k,o}}{\cos\omega^0_{k,o}\cos\delta_k^0}\,dA_{k,o} + \frac{\cos z^0_{k,o}\sin A^0_{k,o}}{\cos\omega^0_{k,o}\cos\delta_k^0}\,d\varphi - \frac{\mathrm{tang}\,\omega^0_{k,o}}{\cos\delta_k^0}\,d\delta_k. \tag{13}$$

Durch Summation sämmtlicher Gleichungen (9) werden die Rectascensionen alle eliminirt und man erhält dafür

$$\Sigma dt_{k,\,w} - \Sigma dt_{k,\,o} = \Sigma(\lambda - \lambda^0). \tag{14}$$

Um die δ zu eliminiren, werden die Gleichungen (11) und (12) benützt und zunächst zur Abkürzung gesetzt

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\sin z^0}{\cos\omega^0\cos\delta^0} = \frac{\sin t^0}{\sin A^0\cos\omega^0} \\ E &= \mathrm{tang}\,\omega^0\sec\delta^0 \\ D &= 2\,\mathrm{tang}\,\omega^0\sec\delta^0 - \cos z^0\sin A^0\sec\omega^0\sec\delta^0 = 2E\left(1 - \frac{\cos z^0\cos\delta^0}{2\cos\varphi^0}\right), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

woraus

$$\begin{aligned} dt_{k,w} &= C_{k,w}dA_{k,w} - D_{k,w}d\varphi - E_{k,w}(\beta_k - \beta_k^0) + E_{k,w}d\Delta_k \\ dt_{k,o} &= C_{k,o}dA_{k,o} - D_{k,o}d\varphi - E_{k,o}(\beta_k - \beta_k^0) + E_{k,o}d\Delta_k \end{aligned} \tag{15}$$

und durch Einsetzung in (14) folgt

$$\begin{aligned} d\varphi\Sigma(D_{k,w} - D_{k,o}) &= -\Sigma(\lambda - \lambda^0) - \Sigma(E_{k,w} - E_{k,o})(\beta_k - \beta_k^0) \\ &\quad + \Sigma(E_{k,w} - E_{k,o})d\Delta_k + \Sigma C_{k,w}dA_{k,w} - \Sigma C_{k_0}dA_{k,o} \\ &= -\Sigma(\lambda - \lambda^0) + \tfrac{1}{2}\Sigma(C_{k,w} + C_{k+l,o})(h_{k,k+l} - h^0_{k,k+l}) \\ &\quad - \Sigma(E_{kw} - E_{k,o})(\beta_k - \beta_k^0) + \Sigma(E_{kw} - E_{k,o})d\Delta_k \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Sigma(C_{k,w} - C_{k+l,o})(dA_{k,w} + dA_{k+l,o}). \end{aligned} \tag{16}$$

Auch diese Gleichung führt, wenn $n = 1$ ist und alle Deklinationen bis auf einige Secunden gleich sind, wenn ferner die Azimuthbeobachtungen alle bis auf wenige Secunden in gleichen Entfernungen vom Meridian angestellt werden, zu dem Resultat, dass die Polhöhe sich unabhängig von Δ_k und den absoluten Azimuthen bestimmen lässt, da man für alle Deklinationen die gleiche Näherung δ^0 annehmen kann. Setzt man dann noch

$$A^0_{k,w} = A, \qquad A^0_{k,o} = 360° - A, \qquad t^0_{k,w} = t, \qquad t^0_{k,o}360° - t,$$

so ist unter Fortlassung der Indices

$$n d\varphi = -\frac{1}{4D}\Sigma(\lambda - \lambda^0) + \frac{C}{4D}\Sigma(h - h^0) - \frac{E}{2D}\Sigma(\beta - \beta^0).$$

Allerdings lässt sich ja eine so vollständige Gleichheit der Deklinationen kaum erreichen, es lässt sich aber feststellen, dass der Maximalcoëfficient, mit dem ein constanter Fehler in allen angenommenen Deklinationen in $d\varphi$ eingeht, stets sehr klein ist und durch besondere Auswahl der Sterne kann man ihn ganz zum Verschwinden bringen. Hat man für Δ_k so genäherte Werthe, dass sie von der Wahrheit kaum mehr als um 1″—2″ abweichen, so können die beiden letzten Glieder in (16) vernachlässigt werden. Soweit kann man aber die Näherung leicht erhalten, wenn man die Beobachtungen der grössten Azimuthe der Circumpolarsterne gleich an denselben Abenden mit bestimmt.

Werden hiernach die zur Berechnung der Azimutheinstellungen und zur Reduction der Beobachtungen nöthigen Formeln zusammengestellt, so ergiebt sich folgendes: Sei der Stern α_k, δ_k zur Zeit $T_{k,w}$ westlich vom Meridian im Stundenwinkel $t_{k,w} = T_{k,w} - \alpha_k$ beobachtet, der Stern α_{k+l}, δ_{k+l} zur Zeit $T_{k+l,o}$ im Stundenwinkel $t_{k+l,o}$, dann sind die Zenithdistanzen gegeben durch:

$$\begin{aligned} \cos z_{k,w} &= \sin\delta_k \sin\varphi + \cos\delta_k \cos\varphi \cos t_{k,w} \\ \cos z_{k+l,o} &= \sin\delta_{k+l}\sin\varphi + \cos\delta_{k+l}\cos\varphi\cos t_{k+l,o}. \end{aligned}$$

Nun soll $z_{k,w} = z_{k+l,o}$ sein und zwischen der östlichen und westlichen Beobachtung die Zeit $\lambda_{k,k+l}$ vergehen. Man hat dann

$$\begin{aligned} t_{k,w} &= T + \tau \\ t_{k+l,o} &= -T + \tau, \end{aligned}$$

wo T und τ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(\alpha_{k+l} - \alpha_k) + \tfrac{1}{2}\lambda_{k,k+l} \\ \sin(\tau + \vartheta) &= \operatorname{tang}\varphi \cos\vartheta \operatorname{cosec} T \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta_k - \delta_{k+l}), \end{aligned}$$

in welcher letzteren

$$\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta_k + \delta_{k+l})\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta_k - \delta_{k+l})\operatorname{cotang} T$$

bestimmt werden. Hiernach ergeben die GAUSS'schen Gleichungen Azimuth, Zenithdistanz und parallactischen Winkel. Für φ, α_k, δ_k, Δ_k werden die Näherungen φ^0, α_k^0, δ_k^0, Δ_k^0, angenommen, und für diese die scheinbaren Oerter der Beob-

achtungstage berechnet. Für die absoluten Azimuthe werden als Näherungen die direkt beobachteten genommen. Dann rechnet man nach (16), wobei die Coëfficienten D, E u. s. w. nur von φ^0, δ_k^0, A_k^0 abhängig sind und sich für eine bestimmte Polhöhe in kleinen Täfelchen mit Deklination und Azimuth als Argument bringen lassen. Die β_0, λ_0 und t werden nach den Formeln (6), (4), (8) gerechnet, wo in (6) und (4) die Näherungswerthe einzusetzen sind, und wobei nur die (8) für t die siebenstellige, also umständlichere Rechnung fordert.

Um nun noch bei der Messung der Zenithdistanzen die HORREBOW-Methode zur Anwendung bringen zu können, und überhaupt bei Auswahl der Sterne nicht auf so enge Grenzen angewiesen zu sein, führt KAPTEYN selbst noch eine Modifikation seiner Methode an. Wählt man z. B. die Sterne so aus, dass man 2 Polsterne mit 4 südlichen Sternen verbindet, so hat man darauf zu achten, dass die Deklinationen der Polsterne nicht mehr als 2°, dass ihre Rectascensionen aber 12^h verschieden sind, und dass die südlichen Sterne bis auf wenige Zeitminuten gleichzeitig und bis auf wenige Bogenminuten in gleicher Zenithdistanz wie die Polsterne in oberer, bezw. unterer Culmination in den Meridian kommen. Nimmt man 3 Polsterne und 6 Südsterne, so sind erstere so zu wählen, dass die oberen Culminationen gleichmässig über die 24 Stunden vertheilt liegen und ihre Deklinationen innerhalb einiger Grade gleich sind und die Südsterne mit diesen Culminationen gleichzeitig (bis auf wenige Minuten) culminiren. Sind also die Rectascensionen der Sterne P_1, P_2, P_3, bezw. α, $\alpha + 8^h$, $\alpha + 16^h$, so sind die unteren Culminationen $\alpha + 12^h$, $\alpha + 20^h$, $\alpha + 4^h$, und entsprechend die Rectascensionen der südlichen Sterne. Die Sterne S_1, S_3, S_5 sind zur Zeit der oberen Culmination der Sterne P_1, P_2, P_3 im Meridian, die Sterne S_2, S_4, S_6 zur Zeit der unteren Culmination der Sterne P_3, P_1, P_2. Wählt man dann die Südsterne S_1, S_3, S_5 derart, dass sie bis auf wenige Minuten in gleicher Zenithdistanz culminiren wie P_1, P_2, P_3 in oberer Culmination, und S_2, S_4, S_6 entsprechend wie P_3, P_1, P_2 in unterer Culmination, so wird man die HORREBOW'sche Methode anwenden können, und es werden ausserdem die Deklinationen der Sterne S_1, S_3, S_5 bezw. die der S_2, S_4 S_6, innerhalb weniger Grade einander gleich, und bei der Bestimmung der Azimuthunterschiede der Sternpaare $S_1 S_3$, $S_3 S_5$, $S_5 S_1$ werden die beiden Sterne eines Paares so nahe symmetrisch zum Meridian stehen, dass der Werth der Coëfficienten $C_{1,w} - C_{3,o}$ (Gl. 16) fast verschwindet. Ferner ist hier die Summe der Rectascensionsunterschiede gleich Null und die Coëfficienten der absoluten Azimuthe, sowie die der Fehler der angenommenen Polsterndeklinationen (dA, $d\Delta$) werden so gering, dass man $d\varphi$ frei von ihnen erhält.

CONTARINO's Methode[1] hat in mancher Beziehung Aehnlichkeit mit der soeben entwickelten von KAPTEYN. Bei ihr werden die Azimuthunterschiede zwischen den Durchschnittspunkten des durchs Zenith laufenden Parallels mit dem 6^h, bezw. 4^h Stundenkreis gemessen.

Nehmen wir einen Stern, dessen Deklination δ genau gleich der Polhöhe φ des Beobachtungsortes ist und messen wir mit einem Altazimuth das Azimuth a dieses Sternes in dem Augenblick, wo sein Stundenwinkel t 6^h beträgt, so ergiebt diese alleinige Azimuthmessung, wenn wir in der allgemeinen Gleichung

$$\cos\varphi \, tang\,\delta = \sin\varphi \cos t + cotang\, a \sin t \qquad (1)$$

$\varphi = \delta$ und $t = 90°$ setzen, die Polhöhe durch die Formel

$$\sin\varphi = cotang\, a.$$

---

[1] FR. CONTARINO »su di un metodo per determinare la latitudine geografica indipendentemente dai piccoli errori delle coordinate delle stelle.« Napoli 1897.

In der Praxis wird nun dieser ideale Fall, da er in solcher Gestalt schon wegen Mangels geeigneter Sterne nicht ausführbar ist, durch Modifikationen zu ersetzen sein. Dies kann nun geschehen, indem man zwei dem Zenith sehr nahe Sterne, S_1 und S_2 beobachtet, deren Rectascensionen bis auf wenige Minuten um 12 Stunden verschieden sind und deren Deklinationen auch nur wenige Bogenminuten von der Polhöhe abweichen dürfen. Es wird dann die Messung des Azimuths ersetzt durch solche von Azimuth**unterschieden** und zu diesen tritt dann noch die Beobachtung von Zenithdistanzen oder von Unterschieden derselben beim Durchgang der Sterne durch den Meridian, sodass beobachtet wird eine erste Reihe, wobei das Instrument im Azimuth auf den Durchschnittspunkt des Zenithparallels und des 6 Uhr Stundenkreises gerichtet ist, und zwar am selben Tage einmal nach Ost, sodann nach West. In dieser Reihe werden die Momente bestimmt, in denen der eine Stern im Osten, der andere im Westen den Verticalfaden des Fadennetzes passirt, dabei darf das Fernrohr in Höhe nicht versetzt werden; sodann ist die Neigung der Horizontalaxe durch Ablesungen des Niveaus, und das Azimuth durch Ablesung der Mikroskope des Kreises bei den Azimutheinstellungen zu bestimmen. Bei der zweiten Reihe befindet sich das Instrument im Meridian und das Fernrohr nach dem Zenith gerichtet. In dieser Lage werden die Zenithdistanzen der Sterne durch Mikrometermessung bestimmt und dabei das Niveau wie bei der HORREBOW-Methode abgelesen. Die erste Reihe kann man mit einem Altazimuth beobachten, die zweite entweder mit demselben Instrument, wenn es mit einer HORREBOW-Libelle versehen ist, oder mit einem Zenithteleskop.

Um nun die Beobachtungen der ersten Reihe für beide Sterne in beiden Durchgängen durch den 6 Uhr Stundenkreis an demselben Tage zu erhalten, müssen die Rectascensionen der Sterne etwas grösser als die der Sonne sein, und die Bestimmungen müssen in die Jahreszeit verlegt werden, wo die Nächte länger als die Tage sind, also von Ende September bis Mitte März. Ein Paar der Durchgänge erfolgt dann Abends, das andere Morgens. An denselben Tagen, an denen man die Beobachtungen der ersten Reihe anstellt, kann man nun nicht beide der zweiten Reihe erhalten, sondern nur diejenige, wo der Stern um Mitternacht den Meridian passirt. Um diese Reihe auch vollständig zu erhalten, muss man 3 Monate vorher oder nachher beobachten, wo dann der eine Stern Abends, der andere Morgens den Meridian passirt.

Es ergeben sich nun in folgender Weise die Formeln, die man in der Praxis anzuwenden hat. Die Reihenfolge der Beobachtungen wird, wenn wir zuerst annehmen, dass der Rectascensionsunterschied der Sterne S_1, S_2 grösser als 12 Stunden ist, und dass der Stern mit geringerer Rectascension S_1 im Osten ist, durch nachstehendes Schema bestimmt:

Abends nach Sonnenuntergang wird S_1 im Osten beobachtet
und wenige Minuten nachher S_2 im Westen,
Morgens ungefähr 12 Stunden später S_1 im Westen,
und wenige Minuten nachher S_2 im Osten.

Ist dagegen der Rectascensionsunterschied kleiner als 12 Stunden, so wird man in demselben Fall, wo der Stern kleinerer Rectascension S_1 im Osten ist, in folgender Weise beobachten:

Abends nach Sonnenuntergang S_2 im Westen
und wenige Minuten nachher S_1 im Osten,
Morgens etwa 12 Stunden später S_2 im Osten,
und wenige Minuten nachher S_1 im Westen.

Sechs Monate vorher oder nachher, wo dann der Stern von geringerer Rectascension S_1 Abends im Westen ist, wird die Reihenfolge der Beobachtungen natürlich in beiden Fällen die umgekehrte. Für die weitere Berechnung genügt es einen Fall durchzunehmen, und es mag hier das zweite Schema zu Grunde gelegt werden. Bezeichnen wir mit

α_1, α_2 die Rectascensionen der Sterne S_1, S_2, die mit den kleinen Fehlern des benutzten Katalogs behaftet sind,
δ_1, δ_2 die Deklinationen dieser Sterne,
T_1, T_3 die Sternzeiten der Beobachtungen von S_1,
T_2, T_4 die „ „ S_2,
die Grössen T_1 bis T_4 behaftet mit den kleinen Fehlern der Uhrcorrection und des Uhrganges
a_1, a_2, a_3, a_4 die Azimuthe,
A_1, A_2, A_3, A_4 die Kreisablesungen der Azimuthe, wobei angenommen wird, dass A_1, A_4, auf denselben Theilstrich P, und A_2, A_3 auf denselben Theilstrich Q fallen.
b_1, b_2, b_3, b_4 die Neigungen der Horizontalaxe des Altazimuths, wie sie den obigen Sternzeiten entsprechen.

Wir wollen dann die Azimuthe und Stundenwinkel stets so zählen, dass sie immer positiv sind, nämlich vom Meridian und von Nord nach Ost, wenn der Stern im Osten ist, und vom Meridian und von Nord nach West, wenn der Stern im Westen ist. Ferner nehmen wir an, dass die Ablesungen am Kreise bei wachsendem Azimuth von Nord über Ost von 0° bis 360° gehen.

Zur Elimination der Catalogdeklination des beobachteten Sterns setzen wir nun in der obigen allgemeinen Gleichung (1)

$$\delta = \varphi - (\varphi - \delta)$$

wo $\varphi - \delta$ die Zenithdistanz ist, die sich aus später zu besprechenden Mikrometermessungen ergiebt. Darnach ist

$$tang\,\delta = tang\,\varphi - \frac{sin(\varphi - \delta)}{cos\,\varphi\,cos[\varphi - (\varphi - \delta)]}$$

und das Glied links in Gleichung (1) wird

$$sin\,\varphi - \frac{sin(\varphi - \delta)}{cos\,[\varphi - (\varphi - \delta)]}.$$

Da nun im vorliegenden Fall vorausgesetzt wird, dass t sehr nahe 90° oder 6^h ist, so ersetzen wir hier den Winkel durch den kleinen Winkel $t - 6^h$, und dann ist Gleichung (1) nun

$$cos\,t = -sin\,(t - 6^h) \qquad sin\,t = cos\,(t - 6^h)$$

$$sin\,\varphi = \frac{sin\,(\varphi - \delta)}{cos\,[\varphi - (\varphi - \delta)]} - sin\,\varphi\,sin\,(t - 6^h) + cotang\,a\,cos\,(t - 6). \qquad (2)$$

Bezeichne nun φ_0 einen bis auf wenige Secunden richtigen Näherungswerth der Polhöhe, a_0 das Azimuth des Durchschnittspunktes des dem Werthe φ_0 entsprechenden Parallelkreises mit dem 6 Uhr-Stundenkreis, so kann man a_0 nach der Formel

$$sin\,\varphi_0 = cotang\,a_0$$

berechnen. Setzt man dann

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \qquad a = a_0 + \Delta a,$$

daher

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0 + \Delta\varphi\cos\varphi_0 \sin 1''$$

$$cotang\, a = cotang\, a_0 - \frac{\sin\Delta a}{\sin a_0 \sin(a_0 + \Delta a)}$$

und ferner

$$\cos(t - 6^h) = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(t - 6^h),$$

so wird die Gleichung (2) für jede der 4 Beobachtungen

$$\begin{aligned}\Delta\varphi\sin 1'' = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi_0\cos(\varphi_0 + \Delta\varphi - (\varphi - \delta)]} - \frac{\sin(\varphi_0 + \Delta\varphi)}{\cos\varphi_0}\sin(t - 6^h) - \\ - 2\,tang\,\varphi_0 \sin^2\tfrac{1}{2}(t - 6^h) - \frac{\sin\Delta a[1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(t - 6^h)]}{\cos\varphi_0\sin a_0 \sin(a_0 + \Delta a)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Diese umständliche Form lässt sich nun nach mancher Richtung hin vereinfachen und für die Rechnung bequemer machen. Das geschieht dadurch, dass man die Glieder, welche schon $\Delta\varphi$ enthalten, unter Näherungsrechnung vereinigt, bei den kleinen Grössen die Sinus mit den Bögen vertauscht, bezw. kleine Grössen vernachlässigt. Nehmen wir an, dass $\Delta\varphi$ kleiner als $\pm 5''$, und $\varphi - \delta$ kleiner als $\pm 10'$ sei, dass ferner der Fehler Δa in der Einstellung im Azimuth in der Ost- und Westbeobachtung unter Einbeziehung des Indexfehlers, der Fehler in der Neigung und der Collimation, nicht grösser als $\pm 30''$ sei, ersetzen wir dann in Gleichung (2)

$\cos[\varphi - (\varphi - \delta)]$ durch $\cos\varphi$
$cotang\, a$ durch $\sin\varphi$
$\cos(t - 6^h)$ durch 1,

so kommt

$$\sin(t - 6^h) = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin\varphi\cos\varphi}$$

und mit hinreichender Genauigkeit

$$t - 6^h = \frac{\varphi - \delta}{\sin\varphi\cos\varphi} < \frac{\pm 10'}{siu\,\varphi\cos\varphi}.$$

Um $\Delta\varphi$ in den verschiedenen Gliedern zu vereinigen, zerlegen wir zunächst die beiden ersten Glieder der rechten Seite in zwei Theile, von denen der eine $\Delta\varphi$ nicht enthält, der andere aber mit Vernachlässigung höherer Potenzen von $\Delta\varphi$ mit dem $\Delta\varphi\sin 1''$ der linken Seite vereinigt werden kann. Es werden dann nämlich die $\Delta\varphi$ nicht enthaltenden Theile

$$\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi_0\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta)]} - tang\,\varphi_0\sin(t - 6^h)$$

und die $\Delta\varphi$ enthaltenden

$$\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi_0}\,\frac{\sin[\varphi_0 - (\varphi - \delta)]}{\cos^2[\varphi_0 - (\varphi - \delta)]}\,\Delta\varphi\sin 1'' - \sin(t - 6^h)\Delta\varphi\sin 1''.$$

Hier kann man nun für $\varphi_0 - (\varphi - \delta)$ einfach φ_0 und für $\sin(t - 6^h)$ wieder $\dfrac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin\varphi_0\cos\varphi_0}$ setzen und es werden dadurch die letzten Glieder

$$\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi_0}\left\{\frac{\sin\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} - \frac{1}{\sin\varphi_0}\right\}\Delta\varphi\sin 1'' = -\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin\varphi_0\cos^3\varphi_0}\cos 2\varphi_0\,\Delta\varphi\sin 1''.$$

In den meisten Fällen kann diese Grösse vernachlässigt werden, denn man findet den Faktor von $\Delta\varphi$ für

$\varphi = 30^\circ$ $\mp 0''{\cdot}004\,\Delta\varphi$
$\varphi = 45^\circ$ $0{\cdot}000$
$\varphi = 60^\circ$ $\mp 0''{\cdot}013\,\Delta\varphi$.

Will man aber den Ausdruck doch nicht ausschliessen, so vereinigt er sich nun mit der linken Seite zu

$$\left[1 + \frac{\cos 2\varphi_0}{\sin\varphi_0 \cos^3\varphi_0} \sin(\varphi - \delta)\right] \Delta\varphi \sin 1''.$$

Es ist nun noch das letzte Glied in der Gleichung (3) zu vereinfachen, nämlich $-\frac{\sin\Delta a\,[1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(t - 6^h)]}{\cos\varphi_0 \sin a_0 \sin(a_0 + \Delta a)}$.

Hier kann nun $\sin(a_0 + \Delta a)$ mit $\sin a_0$ vertauscht und $2\sin^2\frac{1}{2}t = 0$ gesetzt werden, und da

$$\frac{1}{\sin^2 a_0} = 1 + cotang^2 a_0 = 1 + \sin^2\varphi_0$$

ist, so kommt für jenes Glied

$$-\frac{\sin\Delta a}{\cos\varphi_0 \sin^2 a_0} = -\frac{1 + \sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0} \sin\Delta a.$$

Die hier vernachlässigten Grössen sind, wenn man $\Delta a = \pm 30''$ und $t - 6^h = \frac{\pm 10'}{\sin\varphi_0 \cos\varphi_0}$ annimmt, von keinem höheren Betrag als im vorhergehenden Fall, d. h. sie erreichen erst in Breiten von 50° an den Maximalbetrag von $\pm 0''{\cdot}01$, der auch bei $\varphi = 60°$ höchstens auf $0''{\cdot}015$ steigt. Setzen wir nun endlich noch bei den $\sin(\varphi - \delta)$, $\sin(t - 6^h)$ und $\sin\Delta a$ überall die Bögen für die Sinus, so geht dann die Gleichung (3) in den wesentlich vereinfachten Ausdruck

$$\Delta\varphi\left[1 + \frac{\cos 2\varphi_0}{\sin\varphi_0 \cos^3\varphi_0}(\varphi - \delta)\sin 1''\right] = \frac{\varphi - \delta}{\cos\varphi_0 \cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta)]} - tang\,\varphi_0 (t - 6^h) - \frac{1}{2} tang\,\varphi_0 (t - 6^h)^2 \sin 1'' - \frac{1 + \sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}\Delta a \qquad (4)$$

über, wo nun die Gesammtvernachlässigungen für

die Breiten	30°	45°	60°
nicht den Betrag von	$\pm 0''{\cdot}009$	$\pm 0''{\cdot}013$	$\pm 0''{\cdot}029$

übersteigen können. Dieser Fehler verschwindet nun aber ganz aus der Summe der 4 Gleichungen, wenn die beiden Sterne in den entgegengesetzten Lagen in gleichen Abständen von dem durchs Zenith laufenden Parallel sind, und wenn zugleich das Mittel der Einstellungsfehler bei Δa Null ist, was wohl im allgemeinen zu erreichen ist. Bezeichnen wir die Coëfficienten

$$\frac{\cos 2\varphi_0}{\sin\varphi_0 \cos^3\varphi_0}\sin 1'' \text{ mit } B \qquad \frac{1}{\cos\varphi_0} \text{ mit } C \qquad tang\,\varphi_0 \text{ mit } D$$

$$\frac{1}{2} tang\,\varphi_0 \sin 1'' \text{ mit } E \qquad \frac{1 + \sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0} \text{ mit } F,$$

so sind die 4 Gleichungen, indem wir für $t_1, \ldots.$ setzen $\alpha_1 - T_1, \ldots.$

Stern S_1 im Ost $\Delta\varphi[1 + B(\varphi - \delta_1)] = \frac{C(\varphi - \delta_1)}{\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta_1)]} - D(\alpha_1 - T_1 - 6^h) - E(\alpha_1 - T_1 - 6^h)^2 - F\Delta a_1$

Stern S_2 im West $\Delta\varphi[1 + B(\varphi - \delta_2)] = \frac{C(\varphi - \delta_2)}{\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta_2)]} - D(T_2 - \alpha_2 - 6^h) - E(T_2 - \alpha_2 - 6^h)^2 - F\Delta a_2$

Stern S_1 im West $\Delta\varphi[1 + B(\varphi - \delta_1)] = \frac{C(\varphi - \delta_1)}{\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta_1)]} - D(T_3 - \alpha_1 - 6^h) - E(T_3 - \alpha_1 - 6^h)^2 - F\Delta a_3$

Stern S_2 im Ost $\Delta\varphi[1 + B(\varphi - \delta_2)] = \frac{C(\varphi - \delta_2)}{\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta_2)]} - D(\alpha_2 - T_4 - 6^h) - E(\alpha_2 - T_4 - 6^h)^2 - F\Delta a_4,$

deren Summe durch 4 getheilt den endlich zur Berechnung anzuwendenden Ausdruck ergiebt

$$\Delta\varphi[1+\tfrac{1}{2}B[(\varphi-\delta_1)+(\varphi-\delta_2)]=\tfrac{1}{2}C\left\{\frac{(\varphi-\delta_1)}{cos\,[\varphi_0-(\varphi-\delta_1)]}+\frac{(\varphi-\delta_2)}{cos\,[\varphi_0-(\varphi-\delta_2)]}\right\}-$$
$$-\tfrac{1}{4}D\Sigma(\alpha-T-6^h)-\tfrac{1}{4}E\Sigma(\alpha-T-6^h)^2-\tfrac{1}{4}F\Sigma\Delta a.$$

Hier sind dann die Grössen $(\varphi-\delta)$, $\Sigma(\alpha-T-6^h)$, $\Sigma\Delta a$ durch die Beobachtung zu bestimmen. $(\varphi-\delta)$ kann man entweder durch Beobachtungen im ersten Vertical oder nach der Horrebow-Methode mikrometrisch ermitteln. In letzterem Falle muss man dann durch Hinzunahme eines Zusatzsternes, der ebenfalls dem Zenith sehr nahe ist und kurz vor oder nach dem eigentlichen Stern culminirt, an einem Abend die Differenz der Zenithdistanzen (bei Belassung des Fernrohres in derselben Lage), am folgenden Abend die Summe der Zenithdistanzen (durch Umlegung und Ablesung des Horrebow-Niveaus) mit Hilfe des beweglichen Fadens messen. Die Grösse $\Sigma(\alpha-T-6^h)$ setzt sich einfach aus der Summe je zweier Unterschiede der vier Beobachtungszeiten zusammen, nämlich es ist

$$\Sigma(\alpha-T-6^h)=T_2-T_1+T_3-T_4.$$

$\Sigma\Delta a$ endlich erhält man durch die Azimuthbestimmungen. Da $a=a_0+\Delta a$ gesetzt war, so folgt

$$a_1+a_2+a_3+a_4=4\,a_0+\Sigma\Delta a$$

und a_1+a_2, sowie a_3+a_4 werden durch die Kreisablesungen in Verbindung mit den Nivellirungen der Horizontalaxe ersetzt, sodass

$$\Sigma\Delta\alpha=A_1-A_2+A_4-A_3+\frac{b_1-b_2+b_4-b_3}{tang\,z}-4a_0$$

wird, wo dann a_0 nach

$$sin\,\varphi_0=cotang\,a_0$$

mit möglichster Schärfe berechnet wird, und vorausgesetzt ist, dass A_1, A_2 .... für die Theilfehler und den Schraubenwerth der Mikroskope verbessert sind.

Will man die Methode in höheren Breiten als 60° oder in niedrigeren als 30° anwenden, so kann man mit zwei Sternen in obiger Ausführung nicht auskommen. Es lässt sich aber dann durch Benutzung von drei Sternen, die in Rectascension gleich weit von einander entfernt sind, eine Umformung vornehmen, welche die Contarino'sche Methode auch in solchen Fällen anwendbar macht.

Die Polhöhe ist nicht constant. An anderer Stelle (s. Mechanik des Himmels, pag. 569 ff.) wurde darauf hingewiesen, dass Euler theoretisch unter der Annahme, die Erde sei ein fester Körper, bewies, dass die Rotationsaxe um die Hauptträgheitsaxe im Laufe von 10 Monaten einen Kegel beschreiben müsse. Es werden darnach auf der Erdoberfläche die Polhöhen und Azimuthe innerhalb dieser Perioden zu einem Maximum ansteigen und auf ein Minimum hinabgehen. Finden nun aber Massenverschiebungen im Innern der Erde, Hebungen und Senkungen statt, wie sie bei dem nicht absolut starren Erdkörper vorkommen, so wird diese geänderte Massenlagerung eine Verschiebung der Hauptträgheitsaxe nach sich ziehen und daher wieder die Lage der Umdrehungsaxe beeinflussen.

Schon lange hatte man versucht, etwaige Schwankungen in den Polhöhen, die man nach obigem als periodische oder säculare ansehen konnte, durch die Beobachtungen nachzuweisen, während an rasche, fast sprungweise und unregel-

mässig vor sich gehende Aenderungen nicht gedacht wurde. Bis zum Anfang der achtziger Jahre können folgende Polhöhenbestimmungen an Sternwarten aus verschiedenen Epochen verzeichnet werden:

Greenwich	1755	51° 28′ 38″·95	Washington	1845	35° 53′ 39″·25
	1836—41	38·43		1861—64	38·78
	1842—48	38·17	Mailand	1811	45 27 60·7
	1841—60	37·92		1871	59·2
Paris vor	1825	48 50 13·2	Rom	1807—12	41 53 54·26
	1851—54	11·2		1866	54·09
	—	11·7	Königsberg	1820	54 42 50·71
	—	10·6		1843	50·56
Pulcowa	1843	59 46 18·73	Neapel	1820	40 51 46·63
	1866	18·65		1871	45·47
	1872	18·50		1883	45·51

Wir finden also in diesem ganzen Material fast allgemein eine Abnahme der Polhöhen ausgesprochen, und es sind auch Folgerungen verschiedener Art an diese Erscheinung geknüpft, wenngleich von Seiten der Astronomen mit allem Vorbehalt. Sieht man zunächst von den Pulcowaer und Greenwicher Bestimmungen ab, so dürften alle Veränderungen zunächst nur als scheinbare, durch die Unsicherheit der Beobachtungen zu erklären sein. Die Grössen, um die es sich hier handelt, können durch die älteren Beobachtungen nicht gewährleistet werden, würden ausserdem durch eine Neureduction mit den verbesserten Reductionselementen der Gegenwart in manchen Fällen wohl zu anderen Resultaten führen, wie dies z. B. durch Nobile hinsichtlich der alten Bestimmungen in Neapel, die von Brioschi herrühren, nachgewiesen wurde, indem sich statt 46″·63 der Werth 45″·76 finden würde, der aber immer noch mit dem wahrscheinlichen Fehler ± 0″·57 behaftet bleibt. Die Greenwicher Bestimmungen haben als die zahlreichsten und die am gleichmässigsten angestellten stets hervorragendes Interesse geboten. Es stellte sich aber durch Untersuchungen von Nobile, Faye, Bakhuyzen heraus, dass eine im Beobachtungssaal hervorgerufene Strahlenbrechung wenigstens zum grossen Theil für diese und andere Erscheinungen an jenen Beobachtungen (Unterschiede zwischen direkten und reflektirten Beobachtungen) verantwortlich gemacht werden kann. Auch in Paris haben sich eigenthümliche Schwankungen gezeigt, indem bei einer Gruppirung der Polhöhen nach Monaten im Mittel aus den Jahren 1856—62 folgende Abweichungen vom Mittelwerthe constatirt wurden.

Januar	— 0″·23	Mai	+ 0″·10	September	+ 0″·13
Februar	— 0·06	Juni	0·16	October	— 0·07
März	— 0·03	Juli	0·25	November	— 0·11
April	— 0·03	August	0·16	December	— 0·27.

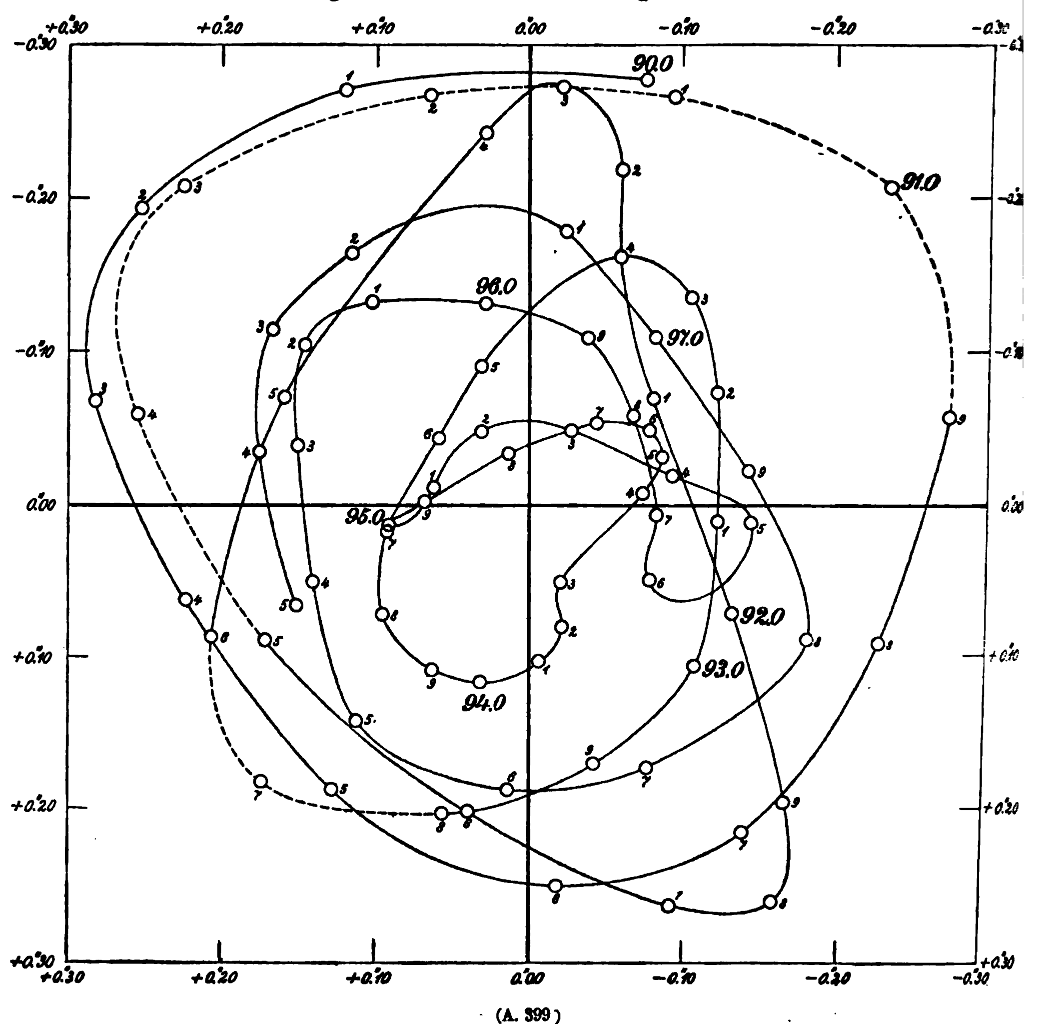
Solche Abweichungen, die sich auch an anderen Sternwarten ergeben haben, dürften wahrscheinlich auch auf Refractionsanomalien zurückzuführen sein.

So gering nun die Abweichungen in den drei Pulcowaer Bestimmungen sind, so war man doch geneigt, in ihnen das begründetste Beispiel einer Veränderung zu erkennen. Trotzdem blieb die Frage eine unentschiedene, bis Küstner 1885 durch Beobachtungen zur Bestimmung der Aberrationsconstante nach der Horrebow-Talcott-Methode eine Polhöhenänderung im Sinne einer Abnahme während der Beobachtungsperiode eines Jahres nachwies, die den Betrag von 0″·44 mit dem wahrscheinlichen Fehler von ± 0″·02 erreichte. In diese Zeit fallen

nun auch neuere Bestimmungen in Pulcowa und an anderen Orten, die zu gleichen Resultaten führten. Das Bureau der Internationalen Erdmessung nahm darauf die Angelegenheit in die Hand. Schon 1883 hatte FERGOLA den Antrag gestellt, gemeinsame Polhöhenbestimmungen an verschiedenen Sternwarten, die nahe auf demselben Parallel lagen, durchzuführen, um durch solche Combinationen die systematischen Beobachtungsfehler zu vermeiden. Solche Sternwartengruppen waren:

	Breitenunterschied	Längenunterschied
Cap. d. g. H. — Sydney	4'·4	8^h 51^m
Santiago — Windsor	9·8	9 14
Rom — Chicago	3·9	6 40
Neapel — New-York	6·4	5 53
Lissabon — Washington	11·1	4 31.

Im Wesentlichen hatte er aber dabei nur die säcularen Aenderungen im Auge. Einige Jahre später, als die Schwankungen in kurzen Zeiträumen nachgewiesen waren, wurde der Antrag wieder aufgenommen, zunächst aber traten mehrere Sternwarten zusammen, u. A. Berlin, Potsdam, Prag, Strassburg, Karlsruhe und brachten längere Reihen zur Ausführung, wodurch die Thatsache der

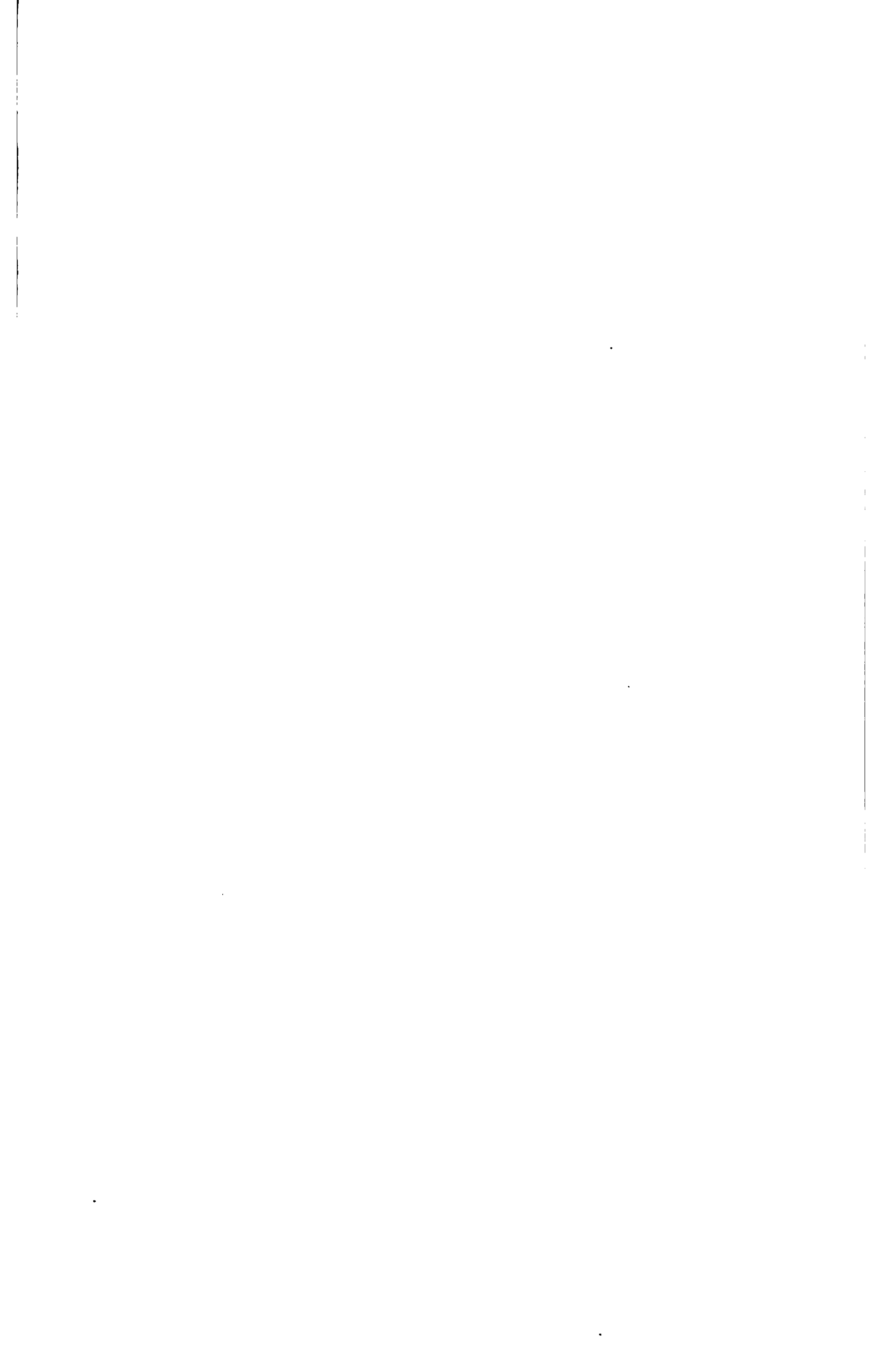


(A. 399)

Veränderlichkeit der Polhöhe aufs schlagendste bestätigt wurde, wodurch aber zugleich erkannt wurde, dass man es mit durchaus keiner regelmässig verlaufenden Erscheinung zu thun habe, indem sowohl die Amplitude als die Periode unbestimmt wurde. Die bis zum Jahre 1898 fortgesetzten Beobachtungen sind von ALBRECHT eingehend bearbeitet und in Fig. 399 ist die Bewegung des Pols in den letzten Jahren wiedergegeben. Von CHANDLER ist der Nachweis geliefert worden, dass mit grösster Wahrscheinlichkeit zwei Perioden vorhanden sind, von denen die eine eine jährliche, die andere eine 14monatliche ist. CHANDLER leitet aus einem sehr grossen Beobachtungsmaterial, welches vielleicht nicht immer für diese Untersuchungen die nöthige und von CHANDLER angenommene Genauigkeit besitzt, ab, dass die 14 monatliche Periode nicht constant ist, eine Ansicht, welcher von anderer Seite, z. B. E. F. v. d. S. BAKHUYZEN widersprochen wird. Letzterer kommt zu dem Resultat, dass die eine Periode eine kreisförmige Bewegung darstellt, mit einer Amplitude von $0''\cdot155$ und einer Dauer von 431·1 Tagen, dass die andere die Bewegung in einer Ellipse giebt, deren grose Axe 19° östlich vom Greenwicher Meridian liegt, und deren Halbaxen $0''\cdot12$ und $0''\cdot06$ betragen bei einer Dauer von einem Jahr.

Die Art der Polbewegung ist noch eine durchaus nur genähert bekannte, ebenso sind die Ursachen der Bewegung noch nicht festzustellen. Es wird einestheils, um diese Fragen zu lösen, dann aber auch um in Zukunft im Stande zu sein, die Bestimmungen der Sternpositionen mit der momentanen Polhöhe zu reduciren, nöthig, unausgesetzt an verschiedenen Orten Polhöhenbestimmungen zu machen und so gleichsam Polhöhenephemeriden für alle Orte der Erde zu liefern. Die Internationale Erdmessung hat daher die Mittel verfügbar gemacht, um zunächst 5 Jahre lang an 4 Orten solche Bestimmungen zu machen. Bei der Auswahl der Orte kommt es wesentlich darauf an, dass sie genau unter derselben Breite liegen, dass sie in meteorologischer Hinsicht und ihrer ganzen Lage nach günstigen Erfolg erwarten lassen. Die Stationen sind: 1) Mizusawa in Japan, 2) Carloforte in Italien, 3) Gaithersburg in Ost-Amerika, 4) Ukiah in West-Amerika. Freiwillig sind zu diesem Netz noch hinzugetreten die Sternwarte in Cincinnati und, von Seiten Russlands, Tschardjui. Es muss genügen, an dieser Stelle auf die grossen Unternehmungen hingewiesen zu haben, welche durch die Erkennung der Polhöhenveränderungen hervorgerufen sind, und welche hoffentlich in absehbarer Zeit zur vollen Erklärung derselben führen werden.

VALENTINER.



Berichtigungen.

a) Zum ersten Band.

pag. 771, Zeile 17 v. u. statt »7·3191944« lies »7·3191944$_n$«.
„ „ „ 15 v. u. statt »7·9400948« lies »7·9400788«.
„ „ „ 13 v. u. statt »9·0769415« lies »9·0769415$_n$«.
„ „ „ 12 v. u. statt »9·6978584« lies »9·6978424«.
„ 772, „ 3 v. o. statt »9·833074« lies »9·833077«.
„ 776, „ 18 v. u. statt »s'« lies »s«.
„ 780, „ 22 v. u. statt »0·1880« lies »0·1880$_n$«.
„ „ „ 20 v. u. statt »$H_1 - d_0$« lies »$(H_1 - d_0)$«.
„ 782, „ 17 v. u. statt »$\varkappa$« lies »k«.
„ 784, „ 1 v. u. statt »$\sin H$« lies »$e' \sin H$«.
„ 789, „ 7, 13, 14, 15 v. o. statt »K'« lies »K_0'«.
„ 794, „ 24 v. o. statt »η_2« lies »η^2«.
„ „ „ 25 v. o. statt »ξ_2« lies »ξ^2«.
„ 799, „ 9 v. o. statt »— 21·25« lies »21°·25«.
„ „ „ 22 v. u. statt »u'« lies »u_a'«.
„ „ „ 21 v. u. statt »0·0799« lies »1·0799«.
„ 801, „ 6 v. o. statt »766« lies »767«.
„ „ „ 8 u. 16 v. o. statt »$\beta_☾ - \beta_\odot$« lies »$\delta_☾ - \delta_\odot$«.
„ 806, „ 13 v. u. statt »16′ 45′« lies »16′ 45″«.
„ 807, „ 7 v. u. statt »$(\sin M - N)$« lies »$\sin(M - N)$.
„ 814, „ 14 v. u. statt »$\frac{m}{n}$« lies «$\frac{m}{n_1}$«.
„ 815, „ 22 v. o. statt »$d\beta$« lies »$d\beta_☾$«.
„ 821, „ 16 v. u. statt »82016·930« lies »82916·930«.
„ 824, „ 12 v. u. statt »775« lies »770«.
„ 837, „ 13 v. u. statt »$e \cos\left(\frac{l_{11} + l_1}{2} - \pi\right)$« lies »$2\, e \cos\left(\frac{l_{11} - l_1}{2} - \pi\right)$«.

b) Zum zweiten Band.

pag. 29, Fig. 249 statt »Z« lies »s«.
„ 30, Zeile 6 v. o. statt »Z« lies »z«.
„ „ „ 15 v. o. statt »$x_1 P$« lies »x, P«.
„ 31, „ 26, 20, 19 v. u. statt »″« lies »s«.
„ 38, „ 1 v. o. statt »ρ^2« lies »ρ^3«.
„ 43, „ 3 v. u. statt »$f(a)$« lies »$f(a + 1)$«.
„ 44, „ 7 v. u. statt »1·957« lies »1·952«.
„ „ „ 6 v. u. statt »0·169« lies »0·172«.
„ „ „ 4 v. u. statt »36^s·497« lies »36″·499«.

pag. 45, Zeile 4 u. 5 v. u. statt »3« lies »$\frac{1}{2}$«.

„ 47, „ 14 v. o. Die Schlussklammer zu $(a + \frac{1}{2})$ fehlt.

„ „ „ 15 v. o. statt dem zweiten »—« lies »+«.

„ 65, „ 10 v. o. statt »471« lies »468«.

„ 85, „ 5 v. o. statt »78·9« lies »78·5«.

„ „ „ 7 v. o. statt »44·0« lies »44·4«.

„ 101, „ 1 v. u. statt »0·00540« lies »0·00547.

„ 145, „ 21 v. u. bei K_1' ist die Schlussklammer zu streichen.

„ 150, „ 11 u. 12 v. u. statt »$\frac{d^2x}{dt}$« und »$\frac{d^2y}{dt}$« lies »$\frac{d^2x}{dt^2}$« und »$\frac{d^2y}{dt^2}$«.

„ 155, „ 8 v. o. statt »log« lies »log_n«.

„ 165, „ 21 v. u. statt »$v \cos \psi$« lies »$v \cos \varphi$«.

„ 166, „ 21 v. u. statt »$4R\pi$« lies »$4R^2\pi$«.

„ 172, „ 6 v. o. statt »$1·0636_n$« lies »$1·0638_n$«.

„ 194, „ 18 v. o. statt »9·5914« lies »9·5944«.

„ 197, „ 14 v. o. statt »9·5897« lies »9·5895«.

„ „ „ 17 v. o. statt »$\log u_0 \cos \mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - \odot) - \omega$« lies »$\log[u_0 \cos \mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - \odot)) - \omega]$«.

„ „ „ 18 v. o. statt »$L' - \odot$« lies »$\mathfrak{L}' - \odot$«.

„ „ „ 20 v. o. statt »$\log z$« lies »z«.

„ „ „ 21 v. o. statt »$u_0 = \mathrm{cotang} \frac{1}{2} z$« lies »$\log u_0 = \log \mathrm{cotang} \frac{1}{2} z$«.

„ „ „ 9 v. u. statt »$\frac{z}{2}$« lies »z«.

„ 337, Zeile 1 v. u. statt »Zeiten« lies »Zeilen«.

„ 351, „ 4 v. u. statt »wiedergegenen« lies »wiedergegeben«.

„ 439, „ 21, 11, 10 v. u. fehlt zwischen $2\omega_1$ und dem letzten Zeichen der Zeile die Schlussklammer.

„ 440, „ 5 v. u. statt »$2\int d'\,\Omega_1$« lies »$2\int d'\,\Omega$«.

„ 441, „ 9 v. o. statt »die Coefficienten« lies »den Coefficienten«.

„ 477, „ 16 v. u. statt »$\frac{r\sqrt{a}}{k_0}\int \frac{dM}{dE}\,dE$« lies »$\frac{r\sqrt{a}}{k_0}\int \frac{d\mu}{dE}\,dE$«.

„ 584, „ 4 v. o. statt »$\frac{\partial \zeta}{\partial \psi'}$« lies »$\frac{\partial \xi'}{\partial \psi'}$«.

„ 590, „ 10 v. o. statt »0·998« lies »0·996«.

„ 619, gehört die Schlussklammer von Zeile 3 v. u. nach Zeile 4 v. u.

c) Zur ersten Abtheilung des dritten Bandes.

„ 60, Zeile 18, 17 v. u. statt »Differentialproduktion« lies »Differentialquotienten«.

„ 128, statt »Tafel I« lies »Tafel II«.

„ 135, statt »Tafel II« lies »Tafel III«.

„ 237, Zeile 5 v. o. in der Ueberschrift statt »III« lies »IV«.

„ 239, „ 15 v. u. in der Ueberschrift ist vor »Verbesserungen« zu setzen »V«.

„ 252, „ 15 v. o. statt »Mondhemisphäre« lies »Nordhemisphäre«.

„ 253, „ 14 v. o. statt »Durchmessers« lies »Durchmesser«.

„ 255, „ 11 v. o. statt »an der Grenze« lies »wie die Grenze«.

„ „ „ 21 v. o. statt »Thales« lies »Theiles«.

„ „ „ „ „ „ »Bordat« lies »Borda«.

„ „ „ 15 v. u. statt »Gruppe« lies »Grenze«.

„ „ „ 14 v. u. statt »Nectariis« lies »Nectaris«.

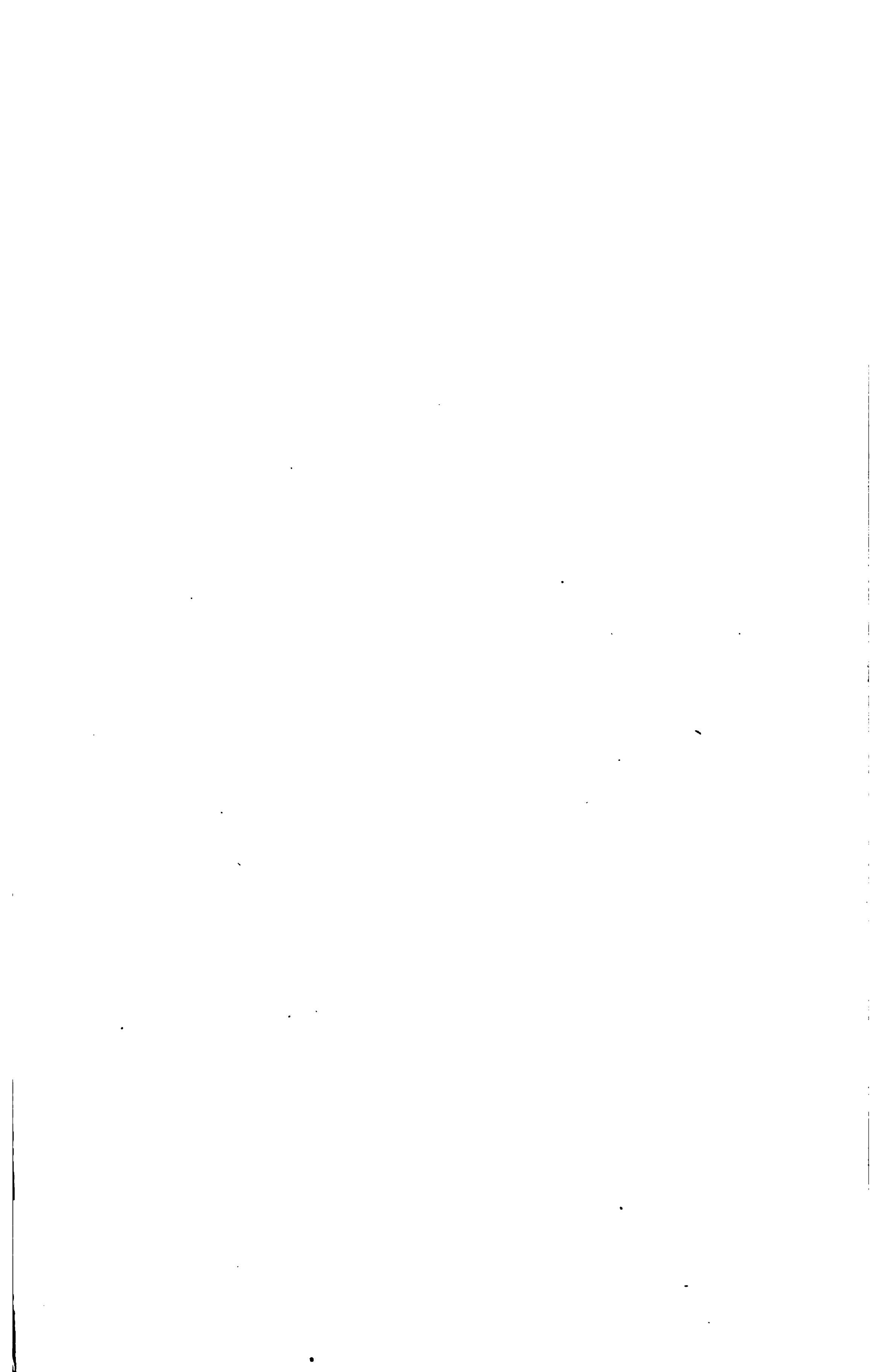
„ „ „ 7 v. u. statt »Metidus« lies »Metius«.

„ 272, „ 10 v. u. statt »östlich« lies »nordöstlich«.

„ 359, „ 1 v. o. statt »Kreisende« lies »Axenende«.

„ 375, „ 2 v. u. (Note) statt »physischen« lies »psychischen«.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).







$$\sin\varphi = \sin\varphi_0 + \Delta\varphi \cos\varphi_0 \sin 1''$$

$$\operatorname{cotang} a = \operatorname{cotang} a_0 - \frac{\sin \Delta a}{\sin a_0 \sin (a_0 + \Delta a)}$$

und ferner

$$\cos(t - 6^h) = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}(t - 6^h),$$

so wird die Gleichung (2) für jede der 4 Beobachtungen

$$\begin{aligned}\Delta\varphi \sin 1'' = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi_0 \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi - (\varphi - \delta))} - \frac{\sin(\varphi_0 + \Delta\varphi)}{\cos\varphi_0} \sin(t - 6^h) - \\ - 2 \operatorname{tang}\varphi_0 \sin^2 \tfrac{1}{2}(t - 6^h) - \frac{\sin\Delta a[1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(t - 6^h)]}{\cos\varphi_0 \sin a_0 \sin(a_0 + \Delta a)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Diese umständliche Form lässt sich nun nach mancher Richtung hin vereinfachen und für die Rechnung bequemer machen. Das geschieht dadurch, dass man die Glieder, welche schon $\Delta\varphi$ enthalten, unter Näherungsrechnung vereinigt, bei den kleinen Grössen die Sinus mit den Bögen vertauscht, bezw. kleine Grössen vernachlässigt. Nehmen wir an, dass $\Delta\varphi$ kleiner als $\pm 5''$, und $\varphi - \delta$ kleiner als $\pm 10'$ sei, dass ferner der Fehler Δa in der Einstellung im Azimuth in der Ost- und Westbeobachtung unter Einbeziehung des Indexfehlers, der Fehler in der Neigung und der Collimation, nicht grösser als $\pm 30''$ sei, ersetzen wir dann in Gleichung (2)

$$\begin{aligned}&\cos[\varphi - (\varphi - \delta)] &&\text{durch} && \cos\varphi \\ &\operatorname{cotang} a &&\text{durch} && \sin\varphi \\ &\cos(t - 6^h) &&\text{durch} && 1,\end{aligned}$$

so kommt

$$\sin(t - 6^h) = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin\varphi \cos\varphi}$$

und mit hinreichender Genauigkeit

$$t - 6^h = \frac{\varphi - \delta}{\sin\varphi\cos\varphi} < \frac{\pm 10'}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Um $\Delta\varphi$ in den verschiedenen Gliedern zu vereinigen, zerlegen wir zunächst die beiden ersten Glieder der rechten Seite in zwei Theile, von denen der eine $\Delta\varphi$ nicht enthält, der andere aber mit Vernachlässigung höherer Potenzen von $\Delta\varphi$ mit dem $\Delta\varphi \sin 1''$ der linken Seite vereinigt werden kann. Es werden dann nämlich die $\Delta\varphi$ nicht enthaltenden Theile

$$\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi_0 \cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta)]} - \operatorname{tang}\varphi_0 \sin(t - 6^h)$$

und die $\Delta\varphi$ enthaltenden

$$\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi_0} \frac{\sin[\varphi_0 - (\varphi - \delta)]}{\cos^2[\varphi_0 - (\varphi - \delta)]} \Delta\varphi \sin 1'' - \sin(t - 6^h)\Delta\varphi \sin 1''.$$

Hier kann man nun für $\varphi_0 - (\varphi - \delta)$ einfach φ_0 und für $\sin(t - 6^h)$ wieder $\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin\varphi_0 \cos\varphi_0}$ setzen und es werden dadurch die letzten Glieder

$$\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi_0} \left\{\frac{\sin\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} - \frac{1}{\sin\varphi_0}\right\} \Delta\varphi \sin 1'' = - \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin\varphi_0 \cos^3\varphi_0} \cos 2\varphi_0 \Delta\varphi \sin 1''.$$

In den meisten Fällen kann diese Grösse vernachlässigt werden, denn man findet den Faktor von $\Delta\varphi$ für

$$\begin{aligned}\varphi &= 30^\circ && \mp 0''{\cdot}004\, \Delta\varphi \\ \varphi &= 45^\circ && 0{\cdot}000 \\ \varphi &= 60^\circ && \mp 0''{\cdot}013\, \Delta\varphi.\end{aligned}$$

Will man aber den Ausdruck doch nicht ausschliessen, so vereinigt er sich nun mit der linken Seite zu

$$\left[1 + \frac{\cos 2\varphi_0}{\sin\varphi_0 \cos^2\varphi_0} \sin(\varphi - \delta)\right] \Delta\varphi \sin 1''.$$

Es ist nun noch das letzte Glied in der Gleichung (3) zu vereinfachen, nämlich $-\dfrac{\sin\Delta a\,[1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(t - 6^h)]}{\cos\varphi_0 \sin a_0 \sin(a_0 + \Delta a)}$.

Hier kann nun $\sin(a_0 + \Delta a)$ mit $\sin a_0$ vertauscht und $2\sin^2\frac{1}{2}t = 0$ gesetzt werden, und da

$$\frac{1}{\sin^2 a_0} = 1 + \cotang^2 a_0 = 1 + \sin^2\varphi_0$$

ist, so kommt für jenes Glied

$$-\frac{\sin\Delta a}{\cos\varphi_0 \sin^2 a_0} = -\frac{1 + \sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0} \sin\Delta a.$$

Die hier vernachlässigten Grössen sind, wenn man $\Delta a = \pm 30''$ und $t - 6^h = \dfrac{\pm 10'}{\sin\varphi_0 \cos\varphi_0}$ annimmt, von keinem höheren Betrag als im vorhergehenden Fall, d. h. sie erreichen erst in Breiten von 50° an den Maximalbetrag von $\pm 0''\cdot01$, der auch bei $\varphi = 60°$ höchstens auf $0''\cdot015$ steigt. Setzen wir nun endlich noch bei den $\sin(\varphi - \delta)$, $\sin(t - 6^h)$ und $\sin\Delta a$ überall die Bögen für die Sinus, so geht dann die Gleichung (3) in den wesentlich vereinfachten Ausdruck

$$\Delta\varphi\left[1 + \frac{\cos 2\varphi_0}{\sin\varphi_0 \cos^2\varphi_0}(\varphi - \delta)\sin 1''\right] = \frac{\varphi - \delta}{\cos\varphi_0 \cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta)]} - \tang\varphi_0(t - 6^h)$$
$$- \tfrac{1}{2}\tang\varphi_0(t - 6^h)^2 \sin 1'' - \frac{1 + \sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}\Delta a \qquad (4)$$

über, wo nun die Gesammtvernachlässigungen für

die Breiten	30°	45°	60°
nicht den Betrag von	$\pm 0''\cdot009$	$\pm 0''\cdot013$	$\pm 0''\cdot029$

übersteigen können. Dieser Fehler verschwindet nun aber ganz aus der Summe der 4 Gleichungen, wenn die beiden Sterne in den entgegengesetzten Lagen in gleichen Abständen von dem durchs Zenith laufenden Parallel sind, und wenn zugleich das Mittel der Einstellungsfehler bei Δa Null ist, was wohl im allgemeinen zu erreichen ist. Bezeichnen wir die Coëfficienten

$\dfrac{\cos 2\varphi_0}{\sin\varphi_0 \cos^2\varphi_0}\sin 1''$ mit B $\quad \dfrac{1}{\cos\varphi_0}$ mit C $\quad \tang\varphi_0$ mit D

$\frac{1}{2}\tang\varphi_0 \sin 1''$ mit E $\quad \dfrac{1 + \sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}$ mit F,

so sind die 4 Gleichungen, indem wir für $t_1, \ldots$ setzen $\alpha_1 - T_1, \ldots$

Stern S_1 im Ost $\Delta\varphi[1 + B(\varphi - \delta_1)] = \dfrac{C(\varphi - \delta_1)}{\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta_1)]} - D(\alpha_1 - T_1 - 6^h) -$
$\qquad - E(\alpha_1 - T_1 - 6^h)^2 - F\Delta a_1$

Stern S_2 im West $\Delta\varphi[1 + B(\varphi - \delta_2)] = \dfrac{C(\varphi - \delta_2)}{\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta_2)]} - D(T_2 - \alpha_2 - 6^h) -$
$\qquad - E(T_2 - \alpha_2 - 6^h)^2 - F\Delta a_2$

Stern S_1 im West $\Delta\varphi[1 + B(\varphi - \delta_1)] = \dfrac{C(\varphi - \delta_1)}{\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta_1)]} - D(T_3 - \alpha_1 - 6^h) -$
$\qquad - E(T_3 - \alpha_1 - 6^h)^2 - F\Delta a_3$

Stern S_2 im Ost $\Delta\varphi[1 + B(\varphi - \delta_2)] = \dfrac{C(\varphi - \delta_2)}{\cos[\varphi_0 - (\varphi - \delta_2)]} - D(\alpha_2 - T_4 - 6^h) -$
$\qquad - E(\alpha_2 - T_4 - 6^h)^2 - F\Delta a_4$,

